经济应用数学
解题方法与检测

周值强 编著

海南出版社

内 容 提 要

本书比较全面、系统地介绍了《经济应用数学》一百多种常用的解题方法。全书共分三篇，包括微积分、矩阵代数与线性模型、概率初步等内容。书中按不同篇章对解题方法进行归纳、整理，并通过对典型例题的分析和解答，揭示解题的思路与技巧，帮助读者以较高的效率掌握解题方法，提高解题能力。

经济应用数学解题方法与检测
周值强 编著

海南出版社出版发行
海南省新华书店经销
江门日报印刷厂印刷
开本：787×1092 毫米 1/32 印张：9.5 字数：20.2 万
1994 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN7—80617—017—0/G.18 定价 5.28 元
（琼新登字 04 号）

前　言

为帮助电视大学财经类学员学好《经济应用数学》这门课程，本人根据多年从事高校和电大数学教学的经验与体会，编写了这本小册子，供自学和测试参考。同时，本书也可作为普通财经院校、职工业余大学、函授大学、夜大学等学员学习经济应用数学的参考读物；也可供从事经济应用数学教学的老师及财经管理人员参阅。

本书较全面、系统地介绍了微积分、矩阵代数与线性模型、概率初步等内容的常用解题方法一百多种，并注意其应用性和可读性，力求做到深入浅出，通俗易懂，同时按不同篇章进行归纳、整理，通过对典型例题的分析与解答，揭示解题的思路与技巧，以开拓学生的视野，提高读者运用数学知识去分析和解决各类经济应用问题（如利息计算、投资决策、边际分析、生产规划等）的能力。

书中每章后面的检测题，是根据电大历年的考试题型而编的，供学员复习总结时作检测之用。同时附有检测题参考答案，以便读者对检测的结果进行查对。

本书由华南师范大学汤慕忠教授和广东电大谭英仕副教授审阅，并提出许多宝贵意见；同时，本书在编写出版的过程中，还得到有关领导，同行的热情支持和大力相助。在此一并致以衷心的感谢。

对于书中的缺点和错误，敬请读者批评指正。

编者

一九九四年春

目　录

第一篇　微积分

第二篇　矩阵代数与线性模型

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

第一篇　微积分

第一章 函数与极限

§1.1　函数的概念与特性

函数是变量之间的相互依存、相互制约关系的一种概括。在日常生活与经济交往中，变量的个数很多，而一元函数是研究两个变量 x 和 y 之间的关系，通常记作：$y=f(x)$。

函数定义中包含定义域、对应规律和值域三个因素，由于前两因素可确定第三因素，故定义域和对应规律是确定函数的两要素，它是判别两个函数异同的依据。下面，给出一些有关函数的概念与特性问题的求解方法：

一、函数定义域的确定方法

函数的定义域是指自变量的取值范围，其确定方法一般有三种：

1、解析法。此法适用于解析式表示的函数关系，解题时要注意考虑以下几点：

(1)若 $y=\frac{p(x)}{Q(x)}$，则要求 $Q(x)\neq 0$。

(2) 若 $y=\sqrt[2n]{p(x)}$，(n 为自然数)，则要求 $p(x)\geqslant 0$，因负数的偶次方根在实数范围无意义。

(3) 若 $y=\log_a N(x)$，$(o<a\neq 1)$，则要求 $N(x)>0$，因 0 和负数无对数。

(4) 若 $y=\mathrm{tg}\varnothing(x)$，则要求 $\varnothing(x)\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$；若 $y=\mathrm{ctg}\varnothing(x)$，则 $\varnothing(x)\neq k\pi$，(k 为整数)。

(5) 若 $y=\arcsin\varnothing(x)$ 或 $y=\arccos\varnothing(x)$，则要求：$-1\leqslant\varnothing(x)\leqslant 1$，即 $|\varnothing(x)\leqslant|\leqslant 1$。

(6)若函数是由几个式子的代数和组成时，则其定义域是这几个式子的自变量取值范围的公共部分(即交集)。

(7) 对于分段函数，其定义域是各段函数的定义域之和(即并集)。

(8) 对于经济应用问题建立的函数，其定义域是由所研究的问题的实际意义来决定的，例如产量只能取非负的值等等。

例 1　求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x}$

(2) $y=\arcsin\dfrac{1-x}{2}+\ln(x-1)$

(3) $y=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & |x|\leqslant 2\\ x-2 & x>2\end{cases}$

解：(1)要使函数有意义，必须有：

$$\begin{cases}1+x\geqslant 0\\ 1-x\neq 0\end{cases}\qquad 即：\qquad \begin{cases}x\geqslant -1\\ x\neq 1\end{cases}$$

得函数的定义域为：$[-1,1)\cup(1,+\infty)$。

(2) 函数的定义域应使

$$\begin{cases} \left|\dfrac{1-x}{2}\right| \leqslant 1 \\ x-1>0 \end{cases}$$ 成立，

即：$\begin{cases} -2\leqslant 1-x\leqslant 2 \\ x>1 \end{cases}$　　解得：$\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 3 \\ x>1 \end{cases}$

故函数的定义域为：(1,3〕。

(3) 这是分段函数，第一段函数的定义域为：$-2\leqslant x\leqslant 2$；第二段函数的定义域为：$x>2$；两段函数的定义域之和（并集）为：$-2\leqslant x<+\infty$，即得该函数的定义域是〔$-2,+\infty$）

例 2　有一块边长为 50 厘米的正方形铁皮，把它的四角剪去四块面积相等的边长为 x 的正方形，制成一只没有盖的容器，试写出此容器的容积 y 与 x 之间的函数关系，并求定义域。

解：依题意得容器的高为 x，底边长为：$50-2x$，则，

$y=x(50-2x)^2$

由问题的实际意义得函数的定义域：$0<x<25$。

2、代换法。此法常用于求复合函数的定义域。

例 3　设 $y=f(u)$ 的定义域是〔0,1〕，求：$f(\ln x)$，$f(x+1)$ 的定义域。

解：要使 $f(\ln x)$ 有意义，必须 $0\leqslant \ln x\leqslant 1$，即，$1\leqslant x\leqslant e$，所以 $f(\ln x)$ 的定义域是：〔1,e〕

同理，要使 $f(x+1)$ 有意义，须有 $0\leqslant x+1\leqslant 1$ 即：$-1\leqslant x\leqslant 0$，所以 $f(x+1)$ 的定义域是：〔$-1,0$〕。

3、图示法。此法适合于用图象法表示的函数。

例 4　求出如图 1.1 所示的函数的定义域。

解：由函数的图象可得该函数的定义域为$[0,1]\cup[1,2]$。

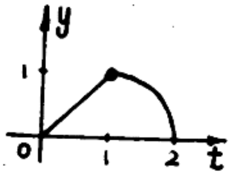

图1.1

二、函数值的求法

求函数值的方法有多种，如代入法，递归法，推算法等。本书要求重点掌握代入法。

例 1　设 $f(x)=1-x^2$，求 $f(0)$ 及 $f(x+1)$。

解：$f(0)=1-0^2=1$；

$f(x+1)=1-(x+1)^2=-x^2-2x$。

例 2　设 $f(x+1)=x^3-x$，求 $f(x)$

解：令 $x+1=u$，则 $x=u-1$，代入得：

$f(u)=(u-1)^3-(u-1)=u^3-3u^2+3u-1-u+1$

$=u^3-3u^2+2u$。

$\therefore\ f(x)=x^3-3x^2+2x$

例 3　设 $f(x)=1+x^2, g(x)=\sqrt{x}$，求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$

解：$f[g(x)]=1+[g(x)]^2=1+(\sqrt{x})^2=1+x$

$g[f(x)]=\sqrt{f(x)}=\sqrt{1+x^2}$

例 4　设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，求 $f[f(x)]$ 及 $f[\dfrac{1}{f(x)}]$ $(x\neq 0, x\neq 1)$

$$解：f[f(x)]=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=\frac{x}{x-(x-1)}=x$$

又：$\frac{1}{f(x)}=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$，

$$\therefore f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f\left[1-\frac{1}{x}\right]=\frac{1-\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)-1}=1-x。$$

三、判别函数异同的方法

前面已提到，若两个函数的定义域相同且对应法则也相同，则该两函数是同函数。至于两函数的自变量与因变量用什么字母表示或具体表述方式如何可不用考虑。

例 1　判定下列函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{1}{x-1}$

(2) $y=3x^2$，$y=3t^2$

(3) $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$

解：(1)不同，因为 $f(x)$的定义域为 $x\neq\pm1$ 的实数，而 $g(x)$的定义域是 $x\neq1$ 的实数。

(2)相同，因两函数的定义域相同，均为：$(-\infty,+\infty)$，对应法则也相同

(3)不同，因 $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；而 $g(x)$的定义域为$(0,\infty)$。

例 2　判别 $f(x)=\lg(1-x)-\lg(1+x)$与 $g(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$是否相同函数，为什么？

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

解：因为 f(x)的定义域应定满足$\begin{cases}1-x>0\\1+x>0\end{cases}$

即$(-1,1)$；g(x)的定域也是$(-1,1)$。可见其定义域相同。而且 $\lg\frac{1-x}{1+x}=\lg(1-x)-\lg(1+x)$，所以 f(x)与 g(x)是同函数。

四、函数奇偶性的判定方法

通常采用定义法，即直接利用定义通过验算使问题得以解决的方法。函数奇偶性的定义是：若 $f(-x)=f(x)$，则 f(x)为偶函数；(其图形对称于 y 轴)。若 $f(-x)=-f(x)$，则 f(x)为奇函数；(其图形对称于原点)。

例　判定下列函数的奇偶性

(1) $y=x^3\sin x$

(2) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

(3) $f(x)=x+\cos x$

解：(1) $\because y(-x)=(-x)^3\sin(-x)=x^3\sin x=y(x)$。

$\therefore y=x^3\sin x$ 是偶函数。

(2) $\because f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-f(x)$

$\therefore f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$是奇函数。

(3) $\because f(\frac{-\pi}{3})=\frac{-\pi}{2}+\frac{1}{2}$，　$f(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}$

得：$f(-\frac{\pi}{3})\neq f(\frac{\pi}{3})$，　$f(-\frac{\pi}{3})\neq -f(\frac{\pi}{3})$

$\therefore f(x)=x+\cos x$ 是非奇非偶函数。

注：函数的奇偶性是在对称区间上讨论的。要说明函数为

奇(偶)函数,必须对任何属于对称区间内的 x,证得 $f(-x)=-f(x)$ (或:$f(-x)=f(x)$),

若要说明函数为非奇非偶函数,只需在区间上找一点 x_0,使 $f(-x_0)\neq -f(x_0)$ 且 $f(-x_0)\neq f(x_0)$ 即可。

五、函数单调性的判定方法

1、定义法。若 $f(x)$ 在某定义区间上任意 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则 $f(x)$ 在该区间上单调递增;若对于 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)>f(x_2)$,则 $f(x)$ 在该区间内单调递减。

例 1　判定 $y=1-x^2$ 的单调性。

解:在 $(-\infty,0)$ 内,取 $-\infty<x_1<x_2<0$,有 $f(x_1)-f(x_2)$

$=1-x_1^2-(1-x_2^2)=x_2^2-x_1^2$

$=(x_2+x_1)(x_2-x_1)<0$

即:$f(x_1)<f(x_2)$,

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递增(简记↗)。

在 $(0,+\infty)$ 内,取 $0<x_1<x_2<+\infty$ 时,有 $f(x_1)-f(x_2)$

$=(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$,即,$f(x_1)>f(x_2)$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减(简记↘)。

例 2　讨论 $y=\log_a x$ 的单调性,$(0<a\neq 1)$。

解:对于 $0<x_1<x_2<+\infty$,有:

$$f(x_1)-f(x_2)=\log_a x_1-\log_a x_2=\log_a \frac{x_1}{x_2}。$$

当 $a>1$ 时,$f(x_1)-f(x_2)=\log_a \dfrac{x_1}{x_2}<0$,

(因为 $\dfrac{x_1}{x_2}<1$),即有 $f(x_1)<f(x_2)$,则 y↗。

当 $0<a<1$ 时，$f(x_1)-f(x_2)=\log_a\frac{x_1}{x_2}>0$，即：

$f(x_1)>f(x_2)$，则有 y↘。

2、微分判定法。见本书第一篇第二章。

六、函数有界性的判定方法

1、放缩法。即用放大或缩小不等式的方法，若有 $|f(x)|\leqslant M(M>0)$ 成立。则 f(x)在所论区间上有界；否则，无界。

例 1　判定 $f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}$ 的有界性。

解：$\because |\sin x|\leqslant 1,\quad 1+x^2\geqslant 1,\ \therefore |f(x)|=|\frac{\sin x}{1+x^2}|\leqslant 1$

得　f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。

2、反例法。即通过具体的例子，从反面说明所论函数无界。

例 2　判别 $y=x\cdot\sin x$ 的有界性。

解：$\because$ 当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时　（k 为整数）

有 $y=(2k\pi+\frac{\pi}{2})\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})$

$=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

$\therefore y=x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界。

七、函数周期性的判定方法

本书主要讨论用定义法判定。若 $f(x+T)=f(x)$，则称 f(x)为周期函数，其中最小的正周期 T 称为函数的周期。

例　$y=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 是否为周期函数？若是，写出它的周期。

解：$\because \sin(2x+\frac{\pi}{4})=\sin(2x+\frac{\pi}{4}+2\pi)$

$=\sin[2(x+\pi)+\frac{\pi}{4}]$

即：$f(x)=f(x+\pi)$

$\therefore y=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$是周期函数。它的周期为 $T=\pi$.

注：一般地，对于 $y=\sin(\omega\chi+\varphi)$以及：$y=\cos(\omega\chi+\varphi)$，它们的周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$。

§1.2 常见简单经济函数

常见的简单经济函数有：总成本函数、总收益函数、利润函数、价格函数、需求函数、供应函数、库存函数等，建立这些函数关系主要有两种方法：一是等量关系法，即把某一经济应用问题归结为建立数学模型的基本方法；二是待定系数法。现对各类简单经济函数的建立介绍于下：

一、总成本函数

总成本是由固定成本和变动成本两部分组成。其中固定成本在某一时期内是相对稳定的，可用常量表示。变动成本随产量的变化而变化。若设产量为 x 个单位，每单位产品的变动费用 a，产品的固定成本为 b，则总成本函数为：

$$C(x)=ax+b。$$

例 1　某洗衣机厂最大生产能力为年产 3 万台全自动超静洗衣机，固定成本为 200 万元，每生产一台机，增加成本 600 元，试求总成本函数。

解：设年产量为 x 台，则 x 只能在[0,30000]内取值，其变动成本为 600x 元，故总成本为：

$$c(x)=600x+2000000 \quad x\in[0,30000]$$

二、平均成本函数

若产量为 x 单位时的总成本为 c(x)，则平均成本函数可记为：$A(x)=\frac{c(x)}{x}$

例 2　求出本节例 1 情况下的平均成本函数。

解：$\because c(x)=600x+2000000$

$$\therefore A(x)=\frac{c(x)}{x}=600+\frac{2000000}{x}$$

$$x\in(0,30000]$$

三、价格函数

在经济领域中，商品价格与销量有密切联系，若价格太高，销量可能会减少；反之，若销量(产量)增大，可能导致价格降低。价格一般是销量的函数，记为 $p=p(x)$，它一般是个减函数。

例 3　设某批发站批发一千个电饭煲给为民家电商场，其批发价为 80 元/个，若少于一千个不作批发价，若每多批发 100 个，批发价就相应降低 2 元/个，现批发站最多只能批发三千个给该家电商场，试求价格函数。

解：设批发量(销售量)为 x，则 x 只能在[1000,3000]内取值。每多销 100 个，每个价格相应减少 2 元，按此比例，多销

$x-1000$ 个价格相应减少 $2\cdot\frac{x-1000}{100}$元。故价格函数为：

$$p(x)=80-2\cdot\frac{x-1000}{100}$$

即：$p(x)=100-0.02x \qquad x\in[1000,3000]$

四、需求函数

社会对产品的需求量，一方面与人们生活的需要有关；另一方面与商品的价格有关。当生活的需要这一因素确定后，需求量可视为价格的函数。在例 3 中把价格 P 看作是销量 x（也称需求量 q）的函数；反之，也可把需求量 q（即销量 x）看作价格 p 的函数，一般需求量是随价格的提高而减少的，故为减函数。

例 4　如果我们把例 3 的条件改为："电饭煲的批发价为 80 元/个时，销量为 1000 个，若每个提价 2 元，需求量就减少 100 个"，则我们可得需求函数为：

$$q=1000-\frac{p-80}{2}\times 100$$

即：$q=50(100-p)$

可见，这个关系式与例 3 解出的关系式〔即：$x=50(100-p)$〕是等价的。而且电饭煲的价格不能超过 100 元/个，否则没有销路。

五、供应函数

若考虑市场供应，商品价格与供应量有直接关系，当商品价格提高时，生产者的积极性就高，从而生产更多的产品供应市场，可见，供应量 q 也是价格 p 的函数，且一般是增函数。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo