

大学下放课程辅导

微积分入门

张楚廷 张 尧

大学下放课程辅导

微积分入门

张楚廷 张尧

湖南教育出版社

微 积 分 入 门

张楚廷 张 尧

责任编辑：孟实华

*

湖南教育出版社出版

(长沙市展览馆路14号)

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1982年4月第1版第1次印刷

字数：196,000 印张：9.625 印数：1—18,900

统一书号：7284·12 定价：0.73元

出版说明

从1982年上半年起，全国中学将普遍开设微积分。这在解放以来还是第一次。这本书就是为紧密配合中学数学教材中的微积分部分，为中学生编写的参考读物。

为帮助中学生学好微积分，本书在编写过程中注意了以下几点：

I. 本书侧重于分析概念、定理、法则以及公式的实质。

II. 为使中学生了解微积分的有关知识，本书特意编写了“绪论”一章，简单介绍了微积分发展的历史，并且详细地谈到了为什么要学微积分以及如何学好微积分等问题。

III. 本书在每章每节都指出了学习的重点、难点，指出哪些是应特别注意的，哪些是容易被忽略的，哪些是可能出现错误的。

IV. 为帮助中学生做好作业，书中编有较大数量的例题，以作为解题的示范，同时也归纳出一些解题的典型方法，而教材本身常常因篇幅所限而难以充分顾及到这一点。

V. 对于一些基本理论和运算，本书在许多地方提出了一些不同的处理方法，这一方面有利于学生加深理解教材，也有利于中学数学教师在教学中参考。

由于本书目的是引导中学生学好微积分的课程，所以它着重于剖析中学教材本身，为中学生顺利完成中学阶段微积分学习任务服务，而没有涉及理论上更艰深的部分，这点请在阅读时注意。

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1.1 微积分发展简史	(2)
§ 1.2 微积分研究的对象是什么?	(5)
§ 1.3 为什么要学微积分?	(7)
§ 1.4 如何学好微积分?	(8)
第二章 数列与极限	(13)
一、数列	(13)
§ 2.1 数列的概念	(13)
§ 2.2 等差数列	(20)
§ 2.3 等比数列	(25)
§ 2.4 有关数列的各种问题举例	(30)
二、极限	(49)
§ 2.5 数列的极限	(50)
§ 2.6 极限的四则运算	(61)
§ 2.7 函数的极限	(75)
§ 2.8 函数极限的四则运算	(89)
§ 2.9 两个重要的极限	(94)
§ 2.10 各种极限计算举例	(106)
第三章 导数与微分	(115)
§ 3.1 瞬时速度、切线斜率、电流强度	(115)
§ 3.2 导数的定义	(119)

§ 3.3	导数概念的初步应用	(125)
§ 3.4	求导法则	(129)
§ 3.5	高阶导数	(155)
§ 3.6	微分概念	(157)
第四章	导数与微分的应用	(165)
§ 4.1	微分学基本定理	(165)
§ 4.2	利用导数研究函数的增减性	(172)
§ 4.3	函数的极大值和极小值	(178)
§ 4.4	函数的最大值和最小值	(183)
§ 4.5	近似公式	(189)
第五章	不定积分	(194)
§ 5.1	原函数概念	(194)
§ 5.2	不定积分	(196)
§ 5.3	基本积分公式	(199)
§ 5.4	不定积分的运算法则	(203)
§ 5.5	直接积分法	(205)
§ 5.6	换元积分法	(209)
§ 5.7	分部积分法	(222)
§ 5.8	如何查积分表	(235)
第六章	定积分	(245)
§ 6.1	定积分是什么?	(245)
§ 6.2	定积分的性质	(258)
§ 6.3	微积分基本公式	(262)
§ 6.4	利用微积分基本公式计算定积分	(267)
§ 6.5	定积分的应用	(273)

第一章 绪 论

在我国，解放以来，《微积分》一直是大学学习的课程。现在要放一部分到中学学习了。大学生学的东西要中学生来学，会不会使中学生感到特别困难呢？我们想是不会的，对于一个用功学习的中学生来说，尤其不会感到有多大困难。例如，要记住那些基本微分公式、积分公式并不比记住那些三角公式更困难；拿这些公式进行运算时也并不特别复杂。实际情况将表明：大多数中学生是能够顺利地学好中学微积分的，而且会有相当多的学生特别喜爱微积分。他们将会体会到马克思说过的一句话：微积分能够“完成奇妙的运算”，微积分的学习将会极大地开阔他们的眼界，提高他们认识世界、改造世界的能力。

中学生学习微积分也不是没有先例的，世界上有许多国家在中学开设了微积分课程。在我国，一些中等专业学校也早已开设过微积分。这部分学习内容没有使中学生特别感到困难。当然，微积分的一些基本概念比较深一些，要真正理解清楚也不很容易。但是，只要我们认真学习，又注意学习方法，困难就可以克服。更何况我们许多同学都立志为祖国四化勇攀科学高峰，对于在前进道路上遇到一些困难和险阻是早有思想准备的。

下面，我们简单介绍一下微积分发展的历史，初步谈谈微

积分要讨论的内容，并且在学习方法上提出一些建议。同学们越往前学，对学好微积分的信心就会越大。

§ 1.1 微积分发展简史

同学们都知道，半径为 r 的圆的面积是 πr^2 。但是，是不是每个同学都懂得这个面积公式是怎样得来的呢？特别象 π 这样一个数，也许不少人记得它等于 $3.14159265359\cdots$ ，但是对于它是怎样计算出来的，就不一定清楚了。

π 这个数是怎样计算出来的？它是个什么样的数？是有理数还是无理数？这些问题的确不是很容易回答的。

不过，关于如何计算 π 的问题，很早很早以前就有人研究了。我国古代杰出的数学家刘徽、祖冲之对这一问题的研究达到了很高的水平。祖冲之已算出 π 的七位小数值，即精确到了千万分之一！他们取得的成就在当时的世界上的确是具有第一流水平的。这是中华民族古代灿烂文化的光辉一页。

刘徽的基本思想就是利用圆内接正多边形的面积来近似表示圆面积，内接正多边形的边数越大，近似程度越好。这里已经孕育着微积分的思想。但这是一千七百年前的事了。

科学的发展是与一定的历史条件、与社会生产的发展密切联系着的。微积分正式产生和形成只是三百年前的事。那时，资本主义开始出现，社会生产和科学技术在蓬勃发展，工业、航海、天文等各方面提出了大量实际问题需要计算解决。当时存在着与微积分的诞生相关的四类问题：第一类是已知物体运动的距离与时间的关系，求物体在任一时刻的速度、加速度；

另一方面是已知物体的加速度，求速度和距离。第二类是求曲线的切线，这与光学的发展有关。例如，若要知道入射线与反射线的关系，就必须知道切线(图1.1—1)。

第三类是求函数的最小值、最大值。例如炮弹从炮筒射出后，其射程与发射角有关，这就要求出使射程达到最大值的发射角，又例如，要求出行星与太阳的最远距离和最近距离等。第四类是求曲线长度，曲线围成的面积，曲面围成的体积，物体的重心以及一物体对另一物体的引力等。

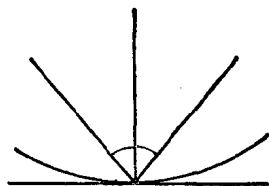


图 1.1—1

有许多人对这些问题进行了研究。但是成就最为突出的是十七世纪的英国数学家牛顿(Newton)和德国数学家莱布尼兹(Leibniz)【注】。他们两人都各自独立推导出了本书第六章将要讲到的微积分基本定理，与之有关的公式又称牛顿—莱布尼兹公式。

由于牛顿和莱布尼兹的结果具有一般性、普遍性，所以后人常把他们的著作的出现，看作是微积分的诞生。其实，在他们之前，有很多人在一些特殊的场合下研究了微积分，有过一些重要成果。这些人当中，有伽利略(Galileo)，托里拆利(Torricelli)，费尔玛(Fermat)，詹姆斯·格利葛利(James Gre-

【注】 牛顿和莱布尼兹的知识都很渊博，他们不仅仅是数学家。例如牛顿，他还是经典力学的创始人。

gory), 特别还有牛顿的老师巴罗 (Borrow)。在巴罗的著作中已有了求曲线的切线和面积问题之间的关系的结论, 而这正是微分与积分的关系定理在几何方面这一特殊场合下的表现。在巴罗的著作中还有关于微分和积分的许多计算方法和定理。牛顿深受他老师的影响, 同时还深受另一位著名的英国数学家瓦里斯 (Wallis) 的影响。

从以上简单介绍的这段历史, 我们可以看出以下两个事实:

首先, 为什么在同一时期内会有如此众多的人在研究同一种类的问题呢? 这决不是巧合, 而确实是社会实际需要的推动, 不单纯是由某些人的兴趣爱好所决定的。

第二, 牛顿和莱布尼兹虽然做出了卓越的贡献, 但这也和他们善于向前人学习, 善于总结前人的经验和成果是分不开的。因此, 微积分的发现不仅仅是个别人的灵感的结果。

同学们还可以从上述历史事实进一步得出什么结论来呢? 这些历史事实对我们今天的学习与劳动有什么启示呢? 这些都是值得思考的。

随着十七世纪微积分的诞生, 数学科学在十八世纪已蓬蓬勃勃地发展起来, 建立了许多崭新的数学门类。但是, 即使到了这个时候, 微积分的理论还是不很完善的。

一直到了上个世纪, 经过法国数学家柯西 (Cauchy), 捷克数学家波尔察诺 (Bolzano) 和德国数学家维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 等人的工作, 建立起一套极限理论, 这样才使微积分有了较为严谨的理论基础。我们这本书中的一些讲法就与这些人的理论有关, 然而并未完全严格地按照他们的理论来叙述。建

立在严谨的理论基础上的微积分今后在高一级学校的数学专业还会学到。

对于微积分基础的奠定工作，不仅在柯西、波尔察诺等人之后有德国数学家戴德金 (Dedekind) 和康托 (Cantor) 等继续作出贡献，而且一直到本世纪仍有人注意这一基础工作。本世纪六十年代，美国数学家鲁宾逊 (Robinson) 创立了非标准分析，当然也包括所谓非标准微积分。他利用现代数学在数理逻辑方面所取得的成就为微积分提供了一个新的理论基础，引起了人们的广泛注意。

在微积分的发展史上，曾经有过不少的争论，特别是关于微积分理论的基础问题，这些争论有时是很激烈的。但是总的来说，这些争论是有利于微积分的发展的。

微积分诞生已经整整三个世纪了。三个世纪以来，无数的数学工作者进行了艰巨的劳动，使微积分的理论逐步发展和完善起来，成为了人类共同的宝贵财富，在人类的科学史上写下了光辉的篇章。

§ 1.2 微积分研究的对象是什么？

现在，我们举一些具体的例子来说明微积分所要讨论的内容。

若问一根绳子有多长，我们马上就会将它拉直之后再用直尺去量，它的长度就可知道了。

但是，若问一根弯曲的钢管的长(以管心线的长为准)是多少，那就不是马上用直尺量得出来的了。

不要说很复杂的曲线，就拿一条简单的抛物线 $y = 2x^2$ 来说吧，这条抛物线从点 $(-2, 8)$ 到点 $(2, 8)$ 这一段有多长就不太容易回答。

至于说人造卫星绕地球一周要走多远，这样的问题靠直尺去量来得到答案似乎是不可能的。

再比如，大家都知道圆的面积怎样算，但椭圆的面积呢？椭圆绕其轴旋转一周就可得一椭球，这椭球的体积又是多大呢？表面积多大？抛物线 $y = 2x^2$ 与直线 $y = 2$ 围成的面积多大？等等。

微积分这门数学学科就可以解决以上的问题。而这还只是些几何问题。微积分还可以解决相当广泛的问题。例如，闸门插入水中会受到多大的压力；一个物体要具有多大的运动速度才能摆脱地球的引力而飞向宇宙；一辆行驶中的车子刹车之后还能走多远；……，等等。这许多问题都离不开微积分。这还只是一类物理问题。天文，生物，化学等方面都还有许多问题需要借助于微积分才能解决。

上述的一些几何问题有个共同的特点，就是有关图形都涉及到弯曲的曲线；上述的一些物理问题也有个共同特点，那就是所涉及的物理量，如力，速度等都是变动的量。例如，闸门在水的较深处和较浅处所受压力是不同的；物体在离地球较远处和较近处所受引力的大小是不同的；车子刹车后的速度也是逐渐由快变慢，最后变为零的。微积分正是研究具有这样一些特点的数量的科学，也就是说，微积分是研究变量的。大家已学过函数概念，函数涉及两个变量，即自变量和因变量（或主变

量和从变量),微积分就着重研究函数。

在代数与三角中不是也讨论过函数吗?微积分中讨论函数与代数、三角中讨论函数有什么差别呢?主要差别在于,代数、三角中是以初等函数(最基本的是幂函数、指数函数、对数函数,三角函数、反三角函数)为研究对象的,并讨论这些函数的取值情况以及它们之间的四则运算关系等。而微积分研究的对象就不只是初等函数了;最主要的是讨论函数的变化规律,函数的变化率如何?函数值的“积累”情况如何?这样,微积分中主要涉及的运算也就是在代数、三角中未曾见过的微分运算,积分运算。不过,在中学阶段所学的微积分,主要对象仍只涉及初等函数,而对一般函数的连续性、可微性、可积性等理论问题却并不予以深入讨论。这也是中学微积分对于中学生来说不会感到有很大困难的原因之一。

现在,我们只要明确这一点,微积分讨论的主要对象是函数,并且顾名思义,微积分就是微分和积分,这就是说,微积分是讨论函数的微分、积分的。

§ 1.3 为什么要学微积分?

我们为什么要学微积分呢?因为微积分用处非常广泛,不仅每个工程师,就是每个技术员都应懂得微积分,不久的将来,微积分就会成为普及的知识,至于说到进一步学习的需要,那么不仅学物理、化学的需要微积分,学生物,学地理的要用到微积分;学天文、学农、学医的要用到微积分,甚至社会科学也要用上微积分了。

可能有人还会问：为什么以前中学不学微积分，现在中学一定要学微积分呢？这首先是因为时代发展了，科学技术发展了，人类积累的知识越来越多。人们常称现在我们正处于一个“知识爆炸”的时代，面对这种情况，教育的作用显得更加重要了。教育的职能之一就在于使学生尽可能在最短的时间内学到最多的、最有益的知识。因此必须使学生在有限的时间内学到最必须的、最有用的知识。二百年以前，懂得微积分的人是很少的，而今天却要求一个高中学生也懂得一些微积分知识，这的确标志着社会的大发展。在现代科学技术发达较早的英国，十七世纪之初，数学还不是学校的一门课程。而在今天，面貌已大大改观，一个中学生要学的数学内容越来越多了。

高度发达的社会生产总是与先进的科学技术和文化教育事业分不开的。我们祖国要实现社会主义的四个现代化，当然急需提高教育质量，特别是提高中学教育质量，在中学开设微积分就是为了适应这一需要。

中学学了微积分，如果中学毕业后马上走向生产建设岗位，那就能更好地适应社会的需要；如果中学毕业后进入高一级学校继续学习，就可以缩短大学学习的实际进程，使得在大学学习期间有更多的精力用于学习其它急需掌握的现代科学知识。总之，要在中学阶段就开始学习微积分已势在必行。

§ 1.4 如何学好微积分？

学习中讲究学习方法始终是重要的。学习方法对头，就可以化难为易，事半功倍，提高效率，也可提高学习的兴趣。反

之，就会事倍功半。那么，在微积分的学习中应当注意些什么呢？

首先，学习微积分要注重对概念的理解。微积分涉及的概念比中学三角、代数中的概念要深一些，需要多花一点功夫才能掌握好。这主要是因为微积分研究的对象和方法与三角、代数都很不相同，这里研究的是变化，运动。对于极限概念，微分概念和积分概念等一些最重要的基本概念要特别注重，看怎样理解才是正确的，怎样理解是不正确的；看看这些概念是从一些什么具体问题中抽象出来的；还要特别检查自己对这些概念的抽象描述是否准确的掌握了。除了仔细听老师讲课外，还要认真看书，结合书本和老师的讲解进行思考；不要一听完课，把书本扔在一边就做习题，而习题一完成就算万事大吉了。我们不妨事先告诉同学们：你们接触到的第一个稍难的概念可能就是极限概念。掌握好这一概念的确需要费一番功夫。否则就可能理解得很肤浅，甚至似是而非。学过微积分之后，对于什么是极限，什么是微分，什么是积分等问题能准确无误地作出回答，就算对概念基本掌握好了。

对于做好习题的重要性，可能许多同学都有所认识。难道还会有谁学数学而不做习题吗？的确，一般都不会不做练习的。问题在于是不是人人都充分认识到了做习题的重要意义，从而自觉地认真地完成作业，通过做习题这一途径来提高学习效果。

认真做好练习，对于学好微积分当然也是不可缺少的有效方法。中学微积分涉及三种主要运算：极限运算，微分运算，

积分运算。要理解基本概念，要熟练地进行运算，没有足够的训练，不做相当数量的习题，那是不行的。

习题中，有一类是可以依照范例来进行解答的，这一类主要是帮助同学们初步熟悉基本公式和基本概念，有一类是综合性较强或有一定灵活性的，这一类主要训练同学们的解题技巧和综合运用能力；有一类是属于论证方面的，主要是培养同学们的逻辑思维能力；还有一类是实际应用方面的，以培养我们把理论运用于实际的能力。当然也还有一些别的类型的习题。明确了这一点，就能心中有数，有目的地解题。与此相反的是盲目地解题，表现在解一个题时得出答案后就了事。如果目的明确，自觉性就会较强，这样，在做完习题之后大凡都回头来思索一下，这个题的解法是否具有一般性，还有没有其它解法，诸解法中何种解法最为巧妙等；做完证明题后就会思考一下这个命题的逆命题是否成立，这个命题还可作什么推广，假设是否还可减弱，结论可否加强。当然，对于那些特别简单的题也不一定非如此不可，但是对那些自己好不容易才做出的题则一定要回过头来思索一番，这是一个巩固和提高的过程，对学习大有好处。经过一个阶段的学习和训练之后，要将做过的习题进行比较，加以归类总结，看解决这些问题应用了哪些基本的思维方法，哪些习题是用同一方法解出来的，它们有什么共同点？哪些问题又用了不同的方法与技巧，它们有什么不同的特点？这样，往往做少量的题便可掌握一大类习题的解法，收到举一反三、触类旁通的效果。

做习题要有一定的数量，好比打乒乓球，推挡、提拉、接