战同胜 主编

实用数值算法

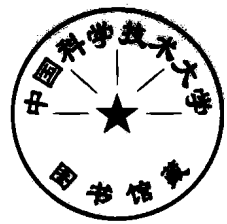
大连理工大学出版社

2

电子计算机应用数学

实用数值算法

主　编　战同胜
副主编　郭照隆　宋广仁
　　纪青君　丁　瑞



大连理工大学出版社

(辽)新登字 16 号

内容简介

本书是电子计算机的工具书，同时又是学习对数学模型进行离散化、算法化和程序化的一本简要参考书。全书选编了 63 个常用数值算法，内容较新且实用。每个算法都对数学方法作了简述，按结构优化思想编制了通用算法，给出数值例题和少量练习题，每个练习题都有答案。这些算法包括了现代数值计算的基本内容，具体请参看本书目录。

本书面向上机计算需要编制算法与程序设计的广大读者，适用于大学生、研究生、大中专教师、科研人员、工程技术人员和计算工作者，也适用于从事计算机应用和软件开发人员的使用。

实 用 数 值 算 法

Shiyong Shuzhi Suanfa

战同胜 主编

大连理工大学出版社出版发行 （邮政编码：116024）

大连理工大学印刷厂印刷

开本：787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张：8.125 字数：172 千字

1992 年 1 月第 1 版 1992 年 1 月第 1 次印刷

印数：0001—1500 册

责任编辑：王佳玉 封面设计：羊 戈

责任校对：杜祖诚

ISBN 7-5611-0531-2/TP · 33 定价：4.50 元

序　言

当前，随着计算机应用的深入，数值算法普遍受到关注。由于计算科学和计算技术的飞快发展，使计算机型号和计算机语言多种多样，这就为编制计算程序带来许多困难；就是给出现成程序语言汇编，也适应不了实际中灵活多变的科学与工程出现的计算。鉴于这种情况，本书编写了通用优化数值算法。把数值计算中经常遇到的典型的数学问题，进行离散化和算法化——用接近于语句形式编制成实用性较强的算法，指出上机计算的目的、输入和输出内容以及编程序的基本步骤等，为读者编程电算提供清晰思路和良好基础。这些算法通用性很强，它们适用于任何机型和语言，不管读者掌握哪种计算机语言（BASIC、FORTRAN、COBOL、PASCAL 和 PL/1，$ALGOL_{68}$等），在算法的指导下，都能比较容易地编制出具体计算机程序来。为使非数学专业人员能较好理解算法的基本原理，看清算法的结构，了解算法的优缺点、适用范围和局限性，本书在每个算法之前对其数学方法都进行了通俗易懂的简述和评述。

有高质量的算法，才能编制出高质量的程序，才能降低软件成本，从整体上提高经济效益。高质量算法应具有结构优化、容易阅读和理解。本书提供的算法都是在这种思想指导下选编的。它们都具有书写简练，清晰易懂；结构紧凑，运算时间少；内存压缩到合理的范围；尽量做到收敛速度快、精度高和

计算稳定等特点。这些算法在方法上具有通用性；内容上具有现代性；结构上具有优化性；书写上具有易读性；使用上具有方便性。

本书由战同胜主编、主审和统一定稿；参加编写的有郭照隆、宋广仁、纪青君和丁瑞同志。

编　者

1991 年 10 月于大连

目　录

第一章　插值算法

§1.1　Lagrange 插值算法

（一）数学方法简述

设给定数据点 (x_i, f_i)，$i=0, 1, \cdots, n$，求不超过 n 次插值多项式 $p_n(x)$，使之满足插值条件

$$p_n(x_i) = f(x_i) = f_i, \quad i = 0,1,\cdots,n$$

按下面构造性方法，作出 Lagrange 插值多项式：

作基函数

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

则 $L_i(x)$ 是一个不超过 n 次多项式，且满足

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad i,j = 0,1,\cdots,n$$

以此基函数作多项式

$$p_n(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \cdots + L_n(x)f_n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} L_i(x)f_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (1.1)$$

多项式（1.1）就是所求的 Lagrange 插值多项式。

方法评述：Lagrange 插值多项式简单、直观、对称。在构造上它是一个二重循环：内循环对 j 累积求基函数 $L_i(x)$，外循环对 i 累加求插值结果；它极容易上机实现求函数 $f(x)$ 在某点的近似值，应用很广。它的缺点是：每当增加一个节点时，计算过的函数 $L_i(x)$全部作废，还得重新计算，在这一点上它不如 Newton 插值。

（二）通用算法

Lagrange 插值算法

目的：对数据表 (x_i, f_i)，$i=1, \cdots, n$，其中 $x_1<x_2<\cdots<x_n$，以及给定插值点 t，构造 Lagrange 插值多项式 $p(x)$，求出 t 对应的函数值 $p(t)$。

输入：整数 n，数据表 (x_i, f_i)，$i=1, \cdots, n$，插值点 t.

输出：$p(t)$ 的值 F_t.

计算步骤：

1. 对 $i=1, \cdots, n-1$ 做 2.
   2. 如果 $x_i \geqslant x_{i+1}$ 那么
      输出数据不合要求的信息。
      过程终。
3. 对 $i=1, \cdots, n$ 做 4. ～8.
   4. 置 $A=1.0$；$F_t=0.0$
   5. 对 $j=1, \cdots, n$ 做 6. ～7.
      6. 如果 $j \neq i$ 做 7.
         7. 置 $A=A \cdot \dfrac{(t-x_j)}{(x_i-x_j)}$

8. 置 $F_t=F_t+A\cdot f_i$

9. 输出 t 对应的函数值 F_t.

过程终。

（三）数值例题

给定数值表

x_i	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x_i)$	0.9798652	0.9177710	0.8080348	0.6386093	0.3843735

试构造 1 次、2 次、3 次和 4 次 Lagrange 插值多项式求 $f(0.5)$ 的值。

解 输入 $n=2$，$n=3$，$n=4$，$n=5$；数值表中使用的值 x_i 和 $f(x_i)$（见下表）；插值点 $t=0.5$，打印的数值结果，见下表。

使用的点	次　数	逼近值
0.4，0.6	1	0.8629029
0.4，0.6，0.2	2	0.8688582
0.4，0.6，0.2，0.8	3	0.8696111
所有点	4	0.8693047

（四）练习题

1. 构造 1 次、2 次、3 次和 4 次的 Lagrange 插值多项式求 $f(0.2)$ 的近似值。给定的数据点为

$f(0.1)=1.2314028$，　$f(0.3)=1.9121188$，

$f(0.4) = 2.3855409$，　$f(0.5) = 2.9682818$，

$f(0.6) = 3.6801196$

2. 使用下列数据点构造 4 次 Lagrange 插值多项式求 $f(1.25)$ 的近似值。

$f(1.0) = 1.00000$，　$f(1.1) = 1.23368$，

$f(1.2) = 1.55271$，　$f(1.3) = 1.99372$，

$f(1.4) = 2.61170$

并同 $f(x) = e^{x^2-1}$ 比较。

§1.2　Neille 迭代插值算法

（一）数学方法简述

设 f 是定义在 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数，$m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是 k 个不同的整数，且对每个 i，$0 \leqslant m_i \leqslant n$，记 $p_{m_1,m_2,\cdots,m_k}$ 表示 f 在 k 个点 $x_{m_1}, x_{m_2}, \cdots, x_{m_k}$ 上的次数不超过 k 的 Lagrange 插值多项式。

Neville 插值多项式记为 $Q_{i,j}, i \geqslant j$，它表示在 $j+1$ 个节点 $x_{i-j}, x_{i-j+1}\cdots, x_{i-1}, x_i$ 上的 j 次插值多项式，计算公式为

$$Q_{i,j}(x) = \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1}(x) - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}(x)}{x_i - x_{i-j}} \tag{1.2}$$

其中

$$Q_{i,j-1} = p_{i-j+1,\cdots i-1,i} \text{ 和 } Q_{i-1,j-1} = p_{i-j,i-j+1,\cdots,i-1}$$

$$Q_{i,j} = p_{i-j,i-j+1,\cdots,i-1,i}$$

$j=1, 2, 3, \cdots$和 $i=j, j+1, \cdots$，且 $Q_{i,0} = f(x_i)$.

Neville 算法的计算流程见下表

x_0	$Q_{0,0}$					
x_1	$Q_{1,0}$	$Q_{1,1}$				
x_2	$Q_{2,0}$	$Q_{2,1}$	$Q_{2,2}$			
x_3	$Q_{3,0}$	$Q_{3,1}$	$Q_{3,2}$	$Q_{3,3}$		
x_4	$Q_{4,0}$	$Q_{4,1}$	$Q_{4,2}$	$Q_{4,3}$	$Q_{4,4}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

当$|Q_{i,i}-Q_{i-1,i-1}|<\varepsilon$（给定的精度）停止计算。

方法评述：Neville 插值比 Lagrange 插值更为实用。从 Neville 插值的计算流程表来看，每增加一个节点，计算只增加一行。因此，如精度不满足要求再增加一个节点时，前面的所有计算完全有效。这个方法也适用于电算，程序比较简单。

（二）通用算法

Neville 插值算法

目的：对数据表 (x_i, f_i)，$i=1, \cdots, n$，其中 $x_1<x_2<\cdots<x_n$，用 Neville 方法求插值点 t 处的函数值。

输入：整数 n；数据表 (x_i, f_i) $i=1, \cdots, n$，容许误差 TOL，插值点 t.

输出：t 对应的函数值 f_t 或方法失败信息。

计算步骤：

1. 对 $i=1, \cdots, n-1$ 做 2.
   2. 如果$x_i \geqslant x_{i+1}$那么
      输出数据不合要求的信息，
      过程终。
3. 对 $j=2, \cdots, n$ 做 4. ～7.
   4. 置 $j_1=j-1$
   5. 对 $i=n, n-1, \cdots, j$

置 $Q_i=\dfrac{(t-x_{i-j_1})\cdot f_i-(t-x_i)\cdot f_{i-1}}{x_i-x_{i-j_1}}$

6. 如果 $|Q_i-f_i|<$TOL 那么

置 $f_i=Q_i$

输出 f_i；过程终。

7. 对 $i=j,\cdots,n$，置 $f_i=Q_i$

8. 置 $f_i=Q_n$

输出未达到精度要求的信息。

过程终。

（三）数值例题

给定数据：$f(1.0)=1.00000$，　$f(1.1)=1.23368$，

$f(1.2)=1.55271$，　$f(1.3)=1.99372$，

$f(1.4)=2.61170$

使用 Neville 插值算法求 $f(1.25)$ 的近似值。

解　输入 $n=5$；数据 x_i 和 $f(x_i)$；TOL$=10^{-5}$；$t=1.25$.

由 Neville 插值算法打印 $f(1.25)$ 的近似值为 1.75496. ■

（四）练习题

1. 给定数据

$f(-0.3)=-0.20431$，　$f(-0.1)=-0.08993$，

$f(0.1)=0.11007$，　$f(0.3)=0.39569$，

$f(0.5)=0.79845$

试用 Neville 算法求 $f(0)$ 的近似值。

2. 使用 Neville 算法求 $f(-0.78)$ 的近似值：

已知函数 $f(x)=x^2e^x\cos x$，利用节点 $x_0=-1.0$，$x_1=-0.9$，$x_2=-0.8$，$x_3=-0.7$，$x_4=-0.6$.

§1.3 Newton 插值均差公式算法

(一) 数学方法简述

设给定数据点$(x_i,f_i),i=0,1,\cdots,n$，求不超过 n 次插值多项式 $p_n(x)$，使之满足插值条件

$$p_n(x_i)=f(x_i)=f_i,\quad i=0,1,\cdots,n$$

按下面构造性方法作出插值多项式：

首先构造 Newton 均差表：

x_i	$f(x_i)$	一阶均差	二阶均差
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
		$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$ $\cdots$
		$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	
x_3	$f[x_3]$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$		

其次以上表中底下划横线的均差为系数作出 Newton 插值均差公式为

$$\begin{aligned}p_n(x)=&f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)\\&+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots\\&+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots\\&(x-x_{n-1}),\end{aligned}$$

或

$$p_n(x)=f[x_0]+\sum_{k=1}^{n}f[x_0,\cdots,x_k](x-x_0)\cdots(x-x_{k-1}) \tag{1.3}$$

方法评述：Newton 插值公式 (1.3)，不但方法简单、容易排程电算，而且也克服了 Lagrange 插值多项式的缺点，即当增加一个节点时，Newton 插值均差公式也只相应地增加一项，即

$$\begin{aligned}
p_0(x)&=f(x_0)\\
p_1(x)&=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)\\
&=p_0(x)+f[x_0,x_1](x-x_0)\\
&\vdots\\
p_n(x)&=p_{n-1}(x)+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned}$$

从而显出 Newton 插值均差公式的优越性。

(二) 通用算法

Newton 插值均差公式算法

目的：对数据$(x_i,f(x_i)),i=0,1,\cdots,n$，求插值多项式(1.3)的均差系数。

输入：正整数 n；数 $x_0,x_1,\cdots,x_n$；值 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$ 作为零阶均差，记为 $p_{0,0},p_{1,0},\cdots,p_{n,0}$.

输出：数 $p_{0,0}$，$p_{1,1}$，…，$p_{n,n}$，其中

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}p_{i,i}\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_i)$$

计算步骤：

1. 对 $i=1$，2，…，n

   对 $j=1$，2，…，i

   置 $p_{i,j}=\dfrac{p_{i,j-1}-p_{i-1,j-1}}{x_i-x_{i-j}}$

2. 输出 $(p_{0,0}$，$p_{1,1}$，…，$p_{n,n})$；($p_{i,i}$是 $f[x_0,x_1,\cdots,x_i]$)