高等数学典型问题100类

李大华　胡适耕　林　益　编

华中理工大学出版社

高等数学典型问题

100类

李大华　胡适耕　[illegible]　编

华中理工大学出版社

内容简介

本书收集了高等数学（包括线性代数、复变函数与概率论等工程数学）的100类问题，依照问题之间的内在联系编排，系统地介绍了高等数学中的主要方法，且着重引导学生通过系统训练获得解决较复杂问题的能力。

本书可作为理工科大学生学习高等数学课程时的课外读物，或作为高年级大学生复习高等数学的参考书。

高等数学典型问题100类

李大华　胡适耕　林益　编

责任编辑：李立鹏

华中理工大学出版社出版发行

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印刷

787×1092 1/32　印张 11.375　字数 248 000

1987年7月第1版　1988年7月第　次印刷

印数 10 001—20 100

ISBN 7－5609－0052－6/O 8

定价 2.80元

内 容 简 介

本书收集了高等数学（包括线性代数、复变函数与概率论等工程数学）的100类问题，依照问题之间的内在联系编排，系统地介绍了高等数学中的主要方法，且着重引导学生通过系统训练获得解决较复杂问题的能力。

本书可作为理工科大学生学习高等数学课程时的课外读物，或作为高年级大学生复习高等数学的参考书。

高等数学典型问题100类

李大华　胡适耕　林　益　编

责任编辑　黎立鹏

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：11.375　字数：248,000

1987年7月第1版　1988年7月第2次印刷

印数：10 001—20 000

ISBN 7－5609－0052－6/O・8

定价：2.80元

前　言

希望跨入研究生门槛的大学生，今日所面对的高等数学复习资料已可谓汗牛充栋．但他们往往仍然感到缺乏可靠的引导．各式各样的试题解答常常不得要领，使人难以适从，而且多半篇幅过大，读者在非常有限的时间内很难获取必要的有效信息．考虑到这些情况，我们希望借助本书将读者的主要精力集中在最必需的那部分材料上，且依据尽可能合理的分类原则组织材料，从而对各类问题的解法提供切实有效的指南．就问题类型而言，本书归纳的100类问题以相当大的可靠性覆盖了读者可能遇到的问题．每个类型选择了10个例题，此外还不拘一格地插入了一些练习题．总共约1200个问题选自至1986年为止的历届研究生试题及各种中外文习题集．我们认为，这些问题已有足够的典型性与代表性，读者倘能完全掌握它们的解法，在行将到来的考验中就会胸有成竹．编写本书之前，我们对历届研究生高等数学试题作了一些统计分析，那些出现频率最大的问题无疑也是大学生数学训练中最不可缺少的部分，将它们放在本书的突出位置上，不只是为应考的大学生们提供可靠的指南，同时也将有益于低年级大学生的学习．本书中，我们并没有试图将现成的解答给予读者，通常只是提示方法的基本线索与使用特点，或者粗略地描划出解题过程，而将进一步的细节留给读者，唯其如此，才能使读者在自己动手的过程中掌握要领，触类旁通，这样所获得的能力才是真正属于他们自己的．

书中前置记号$\triangle$的问题表示它们特别常见；前置记号$\bullet$的问题表示它们遇到的机会较少或者较难，时间有限的读者可

以略过。部分研究生试题注明了出处与年份，但这类试题通常按本书语气作了改写。

本书初稿承魏尧生、罗媛芳、刘国钧同志仔细审阅，并提出了许多改进意见，我们谨致以深切谢意。

编者　1986.10 于武汉

目　录

第五章　重积分·曲线积分·曲面积分

第六章　场论·积分学的应用

第七章　级数

第八章　微分方程

第九章　线性代数·复变函数·概率

第十章　其它问题

第一章　极　　限

△1.1　化为标准型求极限

许多极限计算可归结为以下标准极限：

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e; \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a\quad (a>0); \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{r}-1}{x}=r; \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{5}$$

有两种方式利用(1)—(5)：(A)　将待求极限"凑"成标准形.如当$\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$时，

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to a}\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{g(x)[f(x)-1]}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)[f(x)-1]}. \tag{6}$$

(B)　从(2)—(5)得出无穷小的等价关系：若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，则当$x\to a$时，$\ln(1+f(x))\sim f(x)$，$a^{f(x)}-1\sim f(x)\ln a\,(a>0)$，$[1+f(x)]^{r}-1\sim rf(x)$，$\sin f(x)\sim f(x)$.

1.1.1　求 $l=\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

解 令 $y=\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4}$，则 $\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}=\frac{2y}{1-y^2}$，用(6)，

$$l=\lim_{y\to 1} y^{\frac{2y}{1-y^2}}=\lim_{y\to 1} e^{\frac{2y(y-1)}{1-y^2}}=e^{-1}.$$

1.1.2 求 $l=\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

解 令$y=\sqrt{x}$，依然用(6)：

$$l=\lim_{y\to 0}(\cos y)^{\frac{1}{y^2}}=\lim_{y\to 0} e^{\frac{\cos y-1}{y^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

1.1.3 求 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}$.

解 依然用(6)：令 $y_n=\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}$，

$$l=e^{\lim\limits_{n\to\infty}-ny_n}=e^{-x}.$$

1.1.4 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\int_{-\infty}^{c} xe^{2x}dx$，求 c。

解 依(6)算出 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=e^{2c}$。其次用分部积分法求得 $\int_{-\infty}^{c} xe^{2x}dx=\left(\frac{c}{2}-\frac{1}{4}\right)e^{2c}$，于是 $c=\frac{5}{2}$。

1.1.5 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，求 $l=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解 首先依(6)得出 $l=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}}$。由 L'Hospital 法得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{f''(0)}{2}=2$。L'Hospital 法可用之理由是：$f(0)=f'(0)=0$。

1.1.6 求 $l=\lim\limits_{x\to\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$。

解 稍加变换后可用(1)：

$$l=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}+\ln\frac{x+2}{x+1}\right]=0.$$

1.1.7 求 $l=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{a^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}$，$a>0$。

解 依 (3)，$a^{x^3}-1\sim x^3\ln a$；依 (5)，$y=x(1-\cos x)=2x\sin^2\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x^3}{2}$；$1-\cos\sqrt{y}\sim\dfrac{y}{2}\sim\dfrac{x^3}{4}$，于是$l=4\ln a$。

1.1.8 求 $l=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$。

解 直接归结到(4)：

$$l=\lim_{x\to\infty}3\cdot\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\frac{3}{x}}+\lim_{x\to\infty}2\cdot\frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{-\frac{2}{x}}$$

$$=3\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}=2.$$

或者用等价无穷小替换：

$$\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{x},\ \left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\sim-\frac{1}{x}.$$

1.1.9 求 $l=\lim\limits_{x\to\pi/6}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\mathrm{tg}3x$。

解 令 $t=\dfrac{\pi}{6}-x$，则依(5)有

$$l=\lim_{t\to0}\sin t\,\mathrm{ctg}3t=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{3t}{\sin3t}\cdot\frac{\cos3t}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

读者可类似地求$\lim\limits_{x\to1}(1-x)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5}{x^3\sin\frac{1}{x^2}}$.

1.1.10 求 $l=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^{3x-2}-x)\sin2(x-1)}{(x-1)^3}$

(西安交通大学1983)。

解 $x^{3x-2}-x=x[e^{3(x-1)\ln x}-1]$ （依(3)）

$$\sim 3x(x-1)\ln[1+(x-1)]\sim 3x(x-1)^2,$$

于是 $$l=\lim_{x\to 1}\frac{3x(1-x)^2\sin 2(x-1)}{(x-1)^3}=6.$$

注 本节的问题有些亦可用其它方法（如 L'Hospital 法则）解，读者不妨一试。

△1.2 用L' Hospital 方法求极限

L'Hospital 法则是解决 0 / 0 型与∞/∞型的不定式求极限问题的简便而有力的工具。对其他类型的不定式，可以先化到 0 / 0 或∞/∞型，然后再应用 L'Hospital 法则来确定。

1.2.1 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x e^{-t^2}dt}{1-e^{-x^2}}$ （浙江大学1984）。

解 $$原式=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{1-e^{-x^2}}\cdot\frac{\int_0^x e^{-t^2}dt}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-e^{-x^2}(-2x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}}{1}=1.$$

1.2.2 求$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin x^2dx}{\sqrt{x^3}}$ （哈尔滨工业大学1984）。

解 $$原式=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

读者试求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin(1+t^2)dt}{x^2}$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sec^2x-1)^3}{\int_{x^2}^0 \mathrm{tg}\,t^2dt}$。

1.2.3 已知$f(x)$在$x=12$的邻域内为可导函数，且$\lim\limits_{x\to 12}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 12}f'(x)=991$，求极限

$$\lim_{x\to 12}\frac{\int_{12}^{x}\left[t\int_{t}^{12}f(\theta)d\theta\right]dt}{(12-x)^3}$$ （西安交通大学1982）。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{x\int_x^{12}f(\theta)d\theta}{-3(12-x)^2}=\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\int_{12}^{x}f(\theta)d\theta+xf(x)}{-6(12-x)}$

$=\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{f(x)}{6}+\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{f(x)+xf'(x)}{6}=\dfrac{12\times 991}{6}=1982$。

1.2.4 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{1}\dfrac{\cos 2t}{4t^2}dt$ （东北工学院1981）。

解 当$0<t\leqslant\dfrac{1}{2}$时，$\dfrac{\cos 2t}{4t^2}>0$，$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos 2t}{4t^2}=+\infty$，

且$\dfrac{\cos 2t}{4t^2}>\dfrac{\cos 1}{4t}$，由$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{dt}{t}=+\infty$及比较判别法知，

$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\cos 2t}{4t^2}dt=+\infty$，从而$\int_0^1\dfrac{\cos 2t}{4t^2}dt=+\infty$，因此原式是$\infty/\infty$型的极限。由 L'Hospital 法则，

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(-\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{1-2\sin^2 t}{4t^2}dt\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1-2\sin^2\frac{1}{x}}{4\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{4}.$$

读者试求

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x\sqrt{t+\frac{1}{t}}\,dt}{x\sqrt{x}},\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}e^{-x^2}\int_0^x t^2e^{t^2}dt.$$

1.2.5 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}\right]$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2\sqrt{x}}\lim_{x\to 1}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdots\lim_{x\to 1}\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}=\frac{1}{n!}.$$

1.2.6 求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{m(1-x^n)-n(1-x^m)}{(1-x^m)(1-x^n)}$，相继用两次

L' Hospital 法则得：原式 $=\dfrac{m-n}{2}$.

读者试求 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

1.2.7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}[\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}]$.

解 令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $x\to\infty$ 时 $t\to 0$，

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\left(\sqrt{\dfrac{1}{t}+1}+\sqrt{\dfrac{1}{t}-1}-2\sqrt{\dfrac{1}{t}}\right)$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(1-t\right)^{-\frac{1}{2}}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{4}\left(1+t\right)^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}\left(1-t\right)^{-\frac{3}{2}}}{2}=-\frac{1}{4}.$$

1.2.8 求 $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$ （西安交通大学1986）.

解 用取对数的办法化为∞/∞型：令