

高等数学 典型问题

100 类

李大华 胡适耕 林 益 编

华中理工大学出版社

高等数学典型问题

100类

李大华 胡道耕 符正编

华中理工大学出版社

内 容 简 介

本书收集了高等数学(包括线性代数、复变函数与概率论等工程数学)的100类问题,依照问题之间的内在联系编排,系统地介绍了高等数学中的主要方法,且着重引导学生通过系统训练获得解决较复杂问题的能力。

本书可作为理工科大学学生学习高等数学课程时的课外读物,或作为高年级大学生复习高等数学的参考书。

高等数学典型问题100类

李大华 胡适耕 林 益 编

责任编辑 李立鹏

华中理工大学出版社出版

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印刷

787×1092 1/32 印张 31.375 字数 248 000

1987年7月第1版 1988年7月第1次印刷

印数 10 401 20 100

ISBN 7-5609-0052-6/O 8

定价 2.80元

内 容 简 介

本书收集了高等数学(包括线性代数、复变函数与概率论等工程数学)的100类问题,依照问题之间的内在联系编排,系统地介绍了高等数学中的主要方法,且着重引导学生通过系统训练获得解决较复杂问题的能力。

本书可作为理工科大学学生学习高等数学课程时的课外读物,或作为高年级大学生复习高等数学的参考书。

高等数学典型问题100类

李大华 胡适耕 林 益 编

责任编辑 李立鹏

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 11.375 字数: 248,000

1987年7月第1版 1988年7月第2次印刷

印数: 10 001—20 000

ISBN 7-5609-0052-6/O·8

定价: 2.80元

前 言

希望跨入研究生门槛的大学生，今日所面对的高等数学复习资料已可谓汗牛充栋，但他们往往仍然感到缺乏可靠的引导，各式各样的试题解答常常不得要领，使人难以适从，而且多半篇幅过大，读者在非常有限的时间内很难获取必要的有效信息。考虑到这些情况，我们希望借助本书将读者的主要精力集中在最必需的那部分材料上，且依据尽可能合理的分类原则组织材料，从而对各类问题的解法提供切实有效的指南。就问题类型而言，本书归纳的100类问题以相当大的可靠性覆盖了读者可能遇到的问题。每个类型选择了10个例题，此外还不拘一格地插入了一些练习题。总共约1200个问题选自至1986年为止的历届研究生试题及各种中外文习题集。我们认为，这些问题已有足够的典型性与代表性，读者倘能完全掌握它们的解法，在行将到来的考验中就会胸有成竹。编写本书之前，我们对历届研究生高等数学试题作了一些统计分析，那些出现频率最大的问题无疑也是大学生数学训练中最不可缺少的部分，将它们放在本书的突出位置上，不只是为应考的大学生们提供可靠的指南，同时也将有益于低年级大学生的学习。本书中，我们并没有试图将现成的解答给予读者，通常只是提示方法的基本线索与使用特点，或者粗略地描划出解题过程，而将进一步的细节留给读者，唯其如此，才能使读者在自己动手的过程中掌握要领，触类旁通，这样所获得的能力才是真正属于他们自己的。

书中前置记号△的问题表示它们特别常见；前置记号●的问题表示它们遇到的机会较少或者较难，时间有限的读者可

以略过。部分研究生试题注明了出处与年份，但这类试题通常按本书语气作了改写。

本书初稿承魏尧生、罗媛芳、刘国钧同志仔细审阅，并提出了许多改进意见，我们谨致以深切谢意。

编者 1986.10 于武汉

目 录

前 言

第一章 极限

- Δ 1.1 化为标准型求极限.....(1)
- Δ 1.2 用L'Hospital 方法求极限.....(4)
- 1.3 Taylor公式用于求极限.....(8)
- 1.4 递归定义叙列之极限.....(11)
- *1.5 用极限定义与收敛判别准则求极限.....(14)
- 1.6 用积分定义求极限.....(17)
- 1.7 用级数判定叙列之收敛性.....(20)
- 1.8 连乘积叙列之极限.....(23)
- 1.9 用积分表示的叙列之极限.....(26)
- 1.10 与导数有关的极限.....(30)

第二章 微分法

- 2.1 关于函数连续性与可微性的讨论.....(34)
- 2.2 幂指数式与连乘积的求导.....(37)
- Δ 2.3 偏导数与全微分的计算.....(39)
- Δ 2.4 隐函数之微分法.....(44)
- 2.5 方程组确定的隐函数之微分法.....(48)
- 2.6 用参数给定的函数之微分法.....(52)
- *2.7 求 n 阶导数.....(55)

△2.8	验证给定函数满足某微分方程.....	(59)
2.9	齐次函数.....	(62)
2.10	变量代换问题.....	(65)

第三章 中值定理·微分学的应用

△3.1	中值问题.....	(69)
3.2	Taylor 公式.....	(72)
3.3	函数的单调性与凸凹性.....	(76)
3.4	函数的极值.....	(79)
△3.5	几何中的极值问题.....	(84)
3.6	关于极值的其它应用题.....	(88)
△3.7	不等式.....	(92)
3.8	方程的根.....	(95)
3.9	切线切面问题.....	(98)
*3.10	速率问题.....	(102)

第四章 不定积分与定积分

4.1	有理函数的积分.....	(107)
4.2	含根式的函数的积分.....	(110)
4.3	三角函数的积分.....	(114)
△4.4	应用分部积分法的问题.....	(118)
4.5	递推公式.....	(121)
4.6	Euler 积分.....	(125)
△4.7	关于积分等式的证明题.....	(129)
4.8	利用函数特性简化定积分计算.....	(133)
4.9	关于积分不等式的证明题.....	(136)
4.10	分段计算的积分.....	(141)

第五章 重积分·曲线积分·曲面积分

5.1	二重积分	(146)
5.2	三重积分	(150)
5.3	用重积分计算逐次积分	(154)
5.4	第一型曲线积分与曲面积分	(157)
Δ 5.5	第二型曲线积分	(161)
Δ 5.6	积分与路径无关的条件	(165)
Δ 5.7	第二型曲面积分	(169)
5.8	曲面积分的其它问题	(174)
5.9	关于积分等式与不等式的证明题	(177)
*5.10	用积分定义的函数	(181)

第六章 场论·积分学的应用

6.1	梯度旋度与散度	(186)
*6.2	有势场	(189)
6.3	平面区域的面积	(191)
Δ 6.4	空间区域的体积	(194)
Δ 6.5	弧长与曲面面积	(198)
6.6	质量·重心与转动惯量	(201)
6.7	引力·能量	(204)
6.8	功·流量	(207)
*6.9	其它物理应用	(210)
*6.10	用积分证明不等式与估值	(214)

第七章 级数

7.1	用比较法决定级数敛散性	(219)
-----	-------------	-------

△7.2	与级数 $\sum \frac{1}{n^p}$ 比较决定敛散性	(222)
7.3	比值法·交错级数	(225)
7.4	求级数收敛域	(229)
△7.5	求幂级数展开式	(232)
△7.6	求 Fourier 展开式	(236)
*7.7	一致收敛·和函数的连续性与可微性	(241)
△7.8	级数求和	(244)
7.9	积分号下取微分与积分	(248)
7.10	级数用于求定积分与近似计算	(251)

第八章 微分方程

8.1	经适当代换可分离变量的方程	(255)
△8.2	一阶线性方程	(258)
8.3	全微分方程	(261)
8.4	降阶法解二阶方程	(265)
△8.5	常系数线性方程	(268)
8.6	常系数线性方程组	(271)
8.7	二阶线性方程与 Euler 方程	(274)
△8.8	用积分给出的方程	(277)
△8.9	几何应用	(280)
△8.10	物理应用	(283)

第九章 线性代数·复变函数·概率

9.1	矩阵运算	(288)
△9.2	线性方程组	(291)
9.3	线性相关性	(295)

9.4	特征值与特征向量.....	(298)
△9.5	对称矩阵与二次型.....	(300)
9.6	解析函数的C-R条件.....	(304)
△9.7	留数计算.....	(307)
*9.8	保角变换.....	(310)
9.9	全概率公式与 Bayes 公式.....	(313)
9.10	分布函数·数学期望与方差.....	(317)

第十章 其它问题

*10.1	行列式.....	(321)
*10.2	矢量计算.....	(324)
*10.3	空间中直线与平面的位置.....	(327)
10.4	与函数概念有关的问题.....	(329)
10.5	求解某些函数方程.....	(332)
10.6	复数用于微积分计算与级数求和.....	(335)
10.7	用微分方程求级数和与积分.....	(339)
*10.8	分部积分与 Abel 替换解证明题	(342)
*10.9	解微分方程的某些特殊方法.....	(346)
10.10	杂题	(350)

第一章 极 限

△1.1 化为标准型求极限

许多极限计算可归结为以下标准极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0); \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r; \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (5)$$

有两种方式利用(1)—(5): (A) 将待求极限“凑”成标准形. 如当 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \{ [1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x)-1}} \}^{g(x)[f(x)-1]} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)[f(x)-1]}. \end{aligned} \quad (6)$$

(B) 从(2)—(5)得出无穷小的等价关系: 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, 则当 $x \rightarrow a$ 时, $\ln(1+f(x)) \sim f(x)$, $a^{f(x)} - 1 \sim f(x) \ln a (a > 0)$, $[1+f(x)]^r - 1 \sim r f(x)$, $\sin f(x) \sim f(x)$.

1.1.1 求 $l = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$

解 令 $y = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$, 则 $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \frac{2y}{1-y^2}$, 用(6),

$$l = \lim_{y \rightarrow 1} y^{\frac{2y}{1-y^2}} = \lim_{y \rightarrow 1} e^{\frac{2y(y-1)}{1-y^2}} = e^{-1}.$$

1.1.2 求 $l = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[n]{\cos \sqrt{x}}$.

解 令 $y = \sqrt{x}$, 依然用(6):

$$l = \lim_{y \rightarrow 0} (\cos y)^{\frac{1}{y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{\frac{\cos y - 1}{y^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

1.1.3 求 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}$.

解 依然用(6): 令 $y_n = \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2}$,

$$l = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -n y_n} = e^{-x}.$$

1.1.4 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \int_{-\infty}^c x e^{2x} dx$, 求 c .

解 依(6)算出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = e^{2c}$. 其次用分部积分法求得 $\int_{-\infty}^c x e^{2x} dx = \left(\frac{c}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{2c}$, 于是 $c = \frac{5}{2}$.

1.1.5 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f''(0) = 4$, 求 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解 首先依(6)得出 $l = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}}$. 由 L'Hospital 法得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2} = 2$. L'Hospital 法可用之理由是: $f(0) = f'(0) = 0$.

1.1.6 求 $l = \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2) \ln(x+2) - 2(x+1) \ln(x+1) + x \ln x]$.

解 稍加变换后可用(1):

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{x+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x + \ln \frac{x+2}{x+1} \right] = 0.$$

1.1.7 求 $l = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^{x^2} - 1}{1 - \cos \sqrt{x(1 - \cos x)}}, a > 0.$

解 依(3), $a^{x^2} - 1 \sim x^2 \ln a$; 依(5), $y = x(1 - \cos x) = 2x \sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^3}{2}$; $1 - \cos \sqrt{y} \sim \frac{y}{2} \sim \frac{x^3}{4}$, 于是 $l = 4 \ln a$.

1.1.8 求 $l = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}).$

解 直接归结到(4):

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\frac{3}{x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{-\frac{2}{x}} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2. \end{aligned}$$

或者用等价无穷小替换:

$$\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{x}, \quad \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim -\frac{1}{x}.$$

1.1.9 求 $l = \lim_{x \rightarrow \pi/6} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \operatorname{tg} 3x.$

解 令 $t = \frac{\pi}{6} - x$, 则依(5)有

$$l = \lim_{t \rightarrow 0} \sin t \operatorname{tg} 3t = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \cdot \frac{3t}{\sin 3t} \cdot \frac{\cos 3t}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

读者可类似地求 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}}.$

1.1.10 求 $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{3x-2} - x) \sin 2(x-1)}{(x-1)^3}$

(西安交通大学1983).

解 $x^{3x-2} - x = x[e^{3(x-1)\ln x} - 1]$ (依(3))

$$\sim 3x(x-1)\ln[1+(x-1)] \sim 3x(x-1)^2, \quad |$$

于是
$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x(1-x)^2 \sin 2(x-1)}{(x-1)^3} = 6.$$

注 本节的问题有些亦可用其它方法(如 L'Hospital 法则)解, 读者不妨一试.

△1.2 用 L' Hospital 方法求极限

L' Hospital 法则是解决 $0/0$ 型与 ∞/∞ 型的不定式求极限问题的简便而有力的工具. 对其他类型的不定式, 可以先化到 $0/0$ 或 ∞/∞ 型, 然后再应用 L' Hospital 法则来确定.

1.2.1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x e^{-t^2} dt}{1 - e^{-x^2}}$ (浙江大学1984).

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2}{1 - e^{-x^2}} \cdot \frac{\int_0^x e^{-t^2} dt}{x} \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-e^{-x^2}(-2x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2}}{1} = 1.$

1.2.2 求 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin x^2 dx}{\sqrt{x^3}}$ (哈尔滨工业大学1984).

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2} \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}.$

读者试求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin(1+t^2) dt}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sec^2 x - 1)^3}{\int_x^0 \operatorname{tg} t^2 dt}.$

1.2.3 已知 $f(x)$ 在 $x=12$ 的邻域内为可导函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 12} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 12} f'(x) = 991$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 12} \frac{\int_{12}^x \left[t \int_{12}^t f(\theta) d\theta \right] dt}{(12-x)^3} \quad (\text{西安交通大学1982}).$$

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \lim_{x \rightarrow 12} \frac{x \int_{12}^x f(\theta) d\theta}{-3(12-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 12} \frac{\int_{12}^x f(\theta) d\theta + x f(x)}{-6(12-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 12} \frac{f(x)}{6} + \lim_{x \rightarrow 12} \frac{f(x) + x f'(x)}{6} = \frac{12 \times 991}{6} = 1982. \end{aligned}$$

1.2.4 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt$ (东北工学院1981).

解 当 $0 < t \leq \frac{1}{2}$ 时, $\frac{\cos 2t}{4t^2} > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t}{4t^2} = +\infty$,
且 $\frac{\cos 2t}{4t^2} > \frac{\cos 1}{4t}$, 由 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t} = +\infty$ 及比较判别法知,
 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt = +\infty$, 从而 $\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt = +\infty$, 因此原式是 ∞/∞
型的极限. 由 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(- \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1 - 2\sin^2 t}{4t^2} dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[- \frac{1 - 2\sin^2 \frac{1}{x}}{4 \left(\frac{1}{x} \right)^2} \cdot \left(- \frac{1}{x^2} \right) \right] = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

读者试求

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x \sqrt{t + \frac{1}{t}} dt}{x \sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} e^{-x} \int_0^x t^2 e^{t^2} dt.$$

1.2.5 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x} \cdots \frac{1 - \sqrt[n]{x}}{1-x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdots \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n!}.$$

$$1.2.6 \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right).$$

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m(1-x^n) - n(1-x^m)}{(1-x^m)(1-x^n)}, \text{相继用两次}$$

$$\text{L'Hospital 法则得: 原式} = \frac{m-n}{2}.$$

$$\text{读者试求} \lim_{x \rightarrow 0} \text{ctgx} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

$$1.2.7 \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} [\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}].$$

$$\text{解 令 } t = \frac{1}{x}, \text{ 则 } x \rightarrow \infty \text{ 时 } t \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \left(\sqrt{\frac{1}{t}+1} + \sqrt{\frac{1}{t}-1} - 2\sqrt{\frac{1}{t}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} - 2}{t^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}(1+t)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}(1-t)^{-\frac{3}{2}}}{2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$1.2.8 \quad \text{求} \lim_{x \rightarrow +0} (\text{tg} x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (\text{西安交通大学1986}).$$

解 用取对数的办法化为 ∞/∞ 型: 令