



结构力学

辅导

概念 · 方法 · 题解

赵更新 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

结构力学辅导

—— 概念·方法·题解

赵更新 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书依据高等学校土木工程专业结构力学教材及高等学校工科本科“结构力学课程教学基本要求”编写而成。全书共分 11 章, 内容包括: 平面体系的几何组成分析、静定结构的内力和位移计算、超静定结构的内力和位移计算、影响线、结构的动力计算、结构的稳定计算及结构的极限荷载。每章都对所涉及的基本概念、基本原理和分析计算方法进行了归纳整理, 特别是对重点和难点内容作出了比一般教材更为详细、更为深入的阐述和讨论, 并以典型题目为例, 说明解题的思路、方法和技巧。每章都提供了大量的习题, 题型包括是非判断、填空、选择、分析计算等, 并逐题给出了较为详细的分析解答, 以帮助读者掌握结构力学的基本原理和方法, 提高分析能力和计算能力。

本书是土木工程专业本科学生学习结构力学的辅助读物, 其中前 8 章也适用于专科生阅读。本书还可供有关专业成人教育函授生、自学考试学生使用。

图书在版编目 (CIP) 数据

结构力学辅导: 概念·方法·题解/赵更新编著. —北京: 中国水利水电出版社, 2001. 9

ISBN 7-5084-0804-7

I. 结… II. 赵… III. 结构力学-高等学校-教学参考资料 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 061794 号

书 名	结构力学辅导——概念·方法·题解
作 者	赵更新 编著
出版、发行	中国水利水电出版社 (北京市三里河路 6 号 100044) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sale@waterpub.com.cn 电话: (010) 63202266 (总机)、68331835 (发行部)
经 售	全国各地新华书店
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	水利电力出版社印刷厂
规 格	787×1092 毫米 16 开本 18.75 印张 439 千字
版 次	2001 年 10 月第一版 2001 年 10 月北京第一次印刷
印 数	0001—4100 册
定 价	32.00 元

凡购买我社图书, 如有缺页、倒页、脱页的, 本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

结构力学是土木工程专业学生的重要专业基础课，具有较强的理论性、系统性和实用性。掌握结构力学的基本概念、原理和分析计算方法，对于后续课程的学习以及解决工程实际问题都是十分重要的。

本书的目的是帮助学生深入理解结构力学的基本概念和基本原理，弄懂难点，掌握结构力学的分析计算方法，明确解题思路，了解课程内容之间的内在联系，以使學生能够全面深入地掌握结构力学课程的知识，提高分析问题与解题计算能力。

本书依据原国家教委颁发的高等学校工科“结构力学课程教学基本要求（多学时）”和高等学校土木工程专业结构力学教材，以编者多年来在重庆建筑大学从事结构力学课程的教学实践和教学研究为基础编写而成。全书分为绪论、平面体系的几何组成分析、静定结构的内力计算、虚功原理和结构的位移计算、力法、位移法、力矩分配法、影响线、结构的动力计算、结构的稳定计算和结构的极限荷载等 11 章。每章都对所涉及的基本概念、基本原理、分析计算方法进行了归纳整理，特别是对重点和难点内容，作出了比一般教材更为详细、更为深入的阐述和讨论，并以典型题目为例，说明解题的思路、方法和技巧。每章都提供了大量的习题，题型包括是非判断、填空、选择、分析计算等。习题都是精心设计和挑选的，多有灵活性和典型性，主要从基本概念、基本原理和基本方法的灵活应用方面对学生进行全面训练，而解题的数值计算工作量尽可能减小，以便学生可以花较少的时间，而取得较大的收获。习题的难度一般与“结构力学试题库”中试题的难度相当，小部分习题的难度达到了重点院校硕士研究生入学考试试题的水平要求。所有习题在书中均给出了较为详细的分析解答，对填空、选择、是非判断题，不仅给出了答案，而且对其中的理由大都作了扼要解释或分析提示。这些内容有利于学生加深理解、巩固所学知识，开阔思路，有利于培养学生的分析能力和提高解题技巧。

在编写过程中，编者还力图使本书能体现重庆建筑大学结构力学教研室多年来在教学中的基本经验。例如，众多的结构力学教师都一致认为静定梁和静定平面刚架内力图（特别是弯矩图）的绘制，是学好结构力学的基础，一定要熟练掌握。这不仅是为了解决这两类静定结构的内力计算，而且也在学习静定结构的位移计算以及超静定结构的内力和位移计算打下基础。为此，本书在习题中给出了 100 多道速绘静定梁和刚架弯矩图的习题，以期抓住关键，突出重点，打好基础。如果学生能认真独立做完这些习题（这些习题的数值计算工作量都很小），对整个结构力学课程的学习将会取得事半功倍、熟能生巧的效果。

本书在编写过程中，广泛吸收了国内优秀结构力学教材和教学辅导书籍的优点，引用了部分观点、例题和习题。编者在此谨向这些文献的作者们致以衷心的感谢。

在本书的编写和出版过程中，得到了重庆建筑大学建工学院领导的大力支持，还得到了结构力学教研室老师们的帮助；助理工程师赵俊刚、蒋宁红为本书精心绘制了全部插图。在此，编者向他们一并致谢。

限于编者的水平和经验,加上有些例题和习题是新的尝试,书中可能存在不妥和疏漏,诚恳地希望读者提出批评和指正。同时编者认为,在结构力学课程的课堂讲授学时数大幅度减少的情况下,给学生提供这样一本辅导书是必要的。编者期望本书能为提高土木工程专业大学生的自学能力、结构分析与计算能力作出贡献。

编 者

2000.12

目 录

前 言	
第一章 绪论	1
§ 1-1 结构力学的研究对象和任务	1
§ 1-2 杆系结构的计算简图	1
§ 1-3 结构分析的三个基本条件	3
§ 1-4 叠加原理	4
§ 1-5 结构力学课程的特点和学习方法	5
第二章 平面体系的几何组成分析	7
§ 2-1 几何组成分析的基本概念	7
§ 2-2 平面体系的计算自由度	8
§ 2-3 几何不变体系的组成规则	10
§ 2-4 几何组成分析的方法和举例	12
习题	14
习题解答	17
第三章 静定结构的内力计算	18
§ 3-1 概述	18
§ 3-2 多跨静定梁	21
§ 3-3 静定平面刚架	23
§ 3-4 三铰拱	27
§ 3-5 静定平面桁架	30
§ 3-6 静定组合结构	33
§ 3-7 静定结构小结	35
习题	36
习题解答	52
第四章 虚功原理和结构的位移计算	68
§ 4-1 虚功原理	68
§ 4-2 单位荷载法及位移计算的一般公式	70
§ 4-3 静定结构在各种外因作用下的位移计算	71
§ 4-4 图乘法	75
§ 4-5 具有弹性支座的静定结构位移计算	78
§ 4-6 线弹性结构的互等定理	79
习题	81
习题解答	85

第五章 力法	91
§ 5-1 超静定结构概述	91
§ 5-2 力法的基本概念和典型方程	92
§ 5-3 力法基本结构的合理选择	94
§ 5-4 力法算例	96
§ 5-5 半结构法	100
§ 5-6 超静定结构的位移计算	104
§ 5-7 力法计算结果的校核	106
习题	108
习题解答	114
第六章 位移法	123
§ 6-1 等截面直杆的转角位移方程	123
§ 6-2 位移法基本未知量数目的确定	124
§ 6-3 位移法的基本结构和典型方程	126
§ 6-4 位移法算例	127
§ 6-5 剪力分配法	133
习题	135
习题解答	142
第七章 力矩分配法	154
§ 7-1 力矩分配法的基本概念和基本原理	154
§ 7-2 力矩分配法算例	155
§ 7-3 无剪力分配法	159
习题	161
习题解答	165
第八章 影响线	174
§ 8-1 作影响线的基本方法	174
§ 8-2 静定结构的影响线	177
§ 8-3 影响线的应用	182
习题	185
习题解答	189
第九章 结构的动力计算	196
§ 9-1 结构动力计算的特点和自由度	196
§ 9-2 结构振动运动方程的建立	197
§ 9-3 单自由度体系的自由振动	201
§ 9-4 单自由度体系的强迫振动	207
§ 9-5 多自由度体系的自由振动	215
§ 9-6 多自由度体系的无阻尼强迫振动	223
§ 9-7 能量法计算自振频率	227

习题	228
习题解答	234
第十章 结构的稳定计算.....	245
§ 10-1 基本概念	245
§ 10-2 用静力法求临界荷载	246
§ 10-3 用能量法求临界荷载	251
§ 10-4 简化为具有弹性支承的单根压杆的稳定问题	257
习题	260
习题解答	263
第十一章 结构的极限荷载.....	272
§ 11-1 概述	272
§ 11-2 梁的极限荷载	273
§ 11-3 平面刚架的极限荷载	277
习题	280
习题解答	282
主要参考文献	289

第一章 绪 论

§ 1-1 结构力学的研究对象和任务

房屋、桥梁中用来支承荷载的骨架部分称为结构。结构按照其几何特征可分为杆系结构、板壳结构和实体结构三大类。结构力学的研究对象是杆系结构。

杆系结构是由若干根杆件按照一定的方式连接而成的体系。杆件的几何特征是它的长度远大于其截面的宽度和高度。材料力学研究单个杆件的强度、刚度和稳定问题，结构力学将在此基础上研究杆系结构的组成规律、合理形式及在外因（荷载、支座位移、温度变化等）作用下的强度、刚度和稳定性的计算原理和计算方法。无论对强度、刚度和稳定性的任何一个方面进行分析，都要涉及结构的内力和变形。因此，计算杆系结构在外因作用下的内力和位移，就成为结构力学学习的主要内容。通常把结构的内力和位移计算称为结构分析。

§ 1-2 杆系结构的计算简图

结构的计算简图是将实际结构简化，使它成为既能反映原结构的主要受力和变形特征，又便于结构分析的计算模型。在结构分析中，结构的计算简图就是实际结构的代表，一切计算都是按计算简图进行的。因此，计算简图的选取是十分重要的，它直接影响到结构设计工作的质量。实际结构的简化不仅与力学分析有关，也与其构造处理有关。在选定计算简图之后，在结构设计时应采取适当的构造措施，使所设计的结构符合计算简图的要求。

将实际结构简化为计算简图，既需要理论知识，又需要实践经验，是一个较为复杂的问题。在本课程的后续各章中及混凝土结构等专业课程中，还将详细说明从各种实际结构到计算简图的简化过程。在结构力学教材的绪论中，对结构计算简图的选取作了初步的介绍，读者应着重注意以下几点。

一、杆件的简化

通常当杆件的长度大于其横截面宽度或高度的 5 倍以上时，尽管杆件的形状、材料、荷载及支承情况可能各不相同，但由实验分析得知，它们在外因作用下发生变形后，截面保持为一平面并仍垂直于杆件的轴线，故对杆件可采用平截面假定。在计算简图中可以用杆件的轴线来代替杆件，而将各杆轴线所形成的几何轮廓代替原结构。杆件轴线上的点表示杆件截面的位置，各截面的内力（弯矩、剪力、轴力）可用结构力学的方法求得。实际结构中杆件上任一点的应力可由该点所在截面的内力按材料力学方法计算。

二、结点的简化

杆件与杆件的连接处称为结点。根据连接处的实际构造情况，在计算简图中分别简化为铰结点、刚结点和组合结点三种理想化的情况。

(1) 铰结点。如图 1-1 中的结点 A。其特征是汇交于结点的各杆杆端不能相对移动，但可以绕结点自由转动。铰结点能承受和传递集中力，但不能承受和传递力矩。通常将焊接、螺栓或榫头连接简化为铰接。

(2) 刚结点。如图 1-1 中的结点 B。其特征是汇交于结点的各杆杆端既不能相对移动，也不能相对转动（当结点转动时，各杆之间的夹角保持不变）。刚结点既能承受和传递集中力，也能承受和传递力矩。通常将现浇钢筋混凝土框架的梁、柱连接简化为刚结点。

(3) 组合结点。如图 1-1 中的结点 C。其特点是在同一个结点上的某些杆件之间为刚结而另一些杆件之间则为铰结的结点。

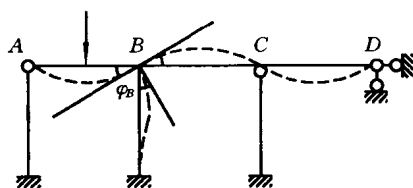


图 1-1

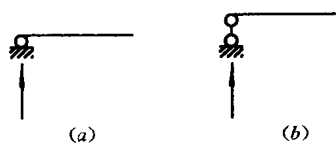


图 1-2

三、支座的简化

把结构与地基或其他支承物连接的装置称为支座。其作用是限制结构沿一个或几个方向的运动，并因此产生相应的反作用力。在平面结构的计算简图中，根据支座的构造和所起的作用不同，一般简化为以下几种类型：

(1) 活动铰支座。如图 1-2 所示。结构力学中普遍采用图 (b)，即用一根链杆表示。它只能限制结构沿某一个方向的移动，支座反力的方向垂直于支承面。

(2) 固定铰支座。如图 1-3 所示。它能限制结构沿两个方向的移动，相应地产生两个反力。请读者注意图 1-2 (a) 与图 1-3 (c) 的区别：在图 1-2 (a) 中，支承面与杆件是平行的。

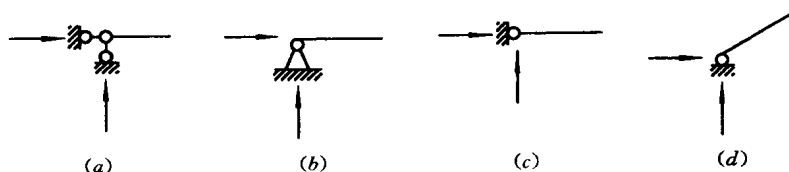


图 1-3

(3) 固定支座。如图 1-4 所示。它不允许结构在支座处发生任何移动或转动，可能产生三个反力。

(4) 定向支座（滑动支座）。通常用两根平行链杆表示，如图 1-5 所示。它限制结构在支座处的转动和垂直于支承面方向的移动，可产生两个反力，其中一个反力偶。

(5) 弹性支座。上述四种支座本身是不变形的，总称为刚性支座。在荷载作用时本身会产生弹性变形的支座称为弹性支座，有伸缩弹性支座和旋转弹性支座两种，如图 1-6 所示。弹性支座的刚度为常量，支座反力的大小与支座本身弹性变形的大小成正比。因此，弹性支座既允许结构在该处发生某种位移，又对该位移有一定的约束作用。

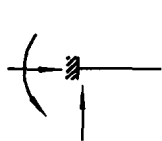


图 1-4

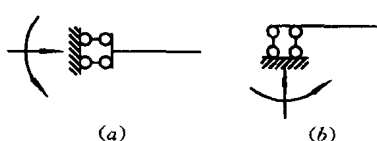


图 1-5

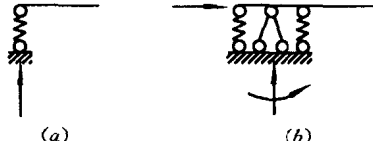


图 1-6

§ 1-3 结构分析的三个基本条件

结构分析通常要涉及三个基本条件，即力系平衡条件、变形协调条件（几何条件）及力与变形的关系（物理条件）。

一、力系平衡条件

工程结构在荷载作用下，通常处于静止的平衡状态。这时，结构的整体或一部分（某一结点、杆件或任一隔离体）都应满足力系的平衡条件。在这个平衡力系中，可能包括荷载、支座反力和截面内力。

在动力问题中，结构不处于静平衡状态。但根据达朗贝尔原理，把相应的质量和加速度相乘再带上负号（惯性力），作为静力荷载加在结构上，就可以同样地应用力系平衡条件。

二、变形协调条件

结构在荷载作用下会产生形状和尺寸的改变（变形）。这些改变与结构本身的尺寸相比是很微小的。结构在变形之前是连续整体，在变形之后必须仍然保持其连续性和整体性，不能出现重叠或脱开的现象。这就是所谓变形协调条件（或变形连续条件），是解决结构力学问题的几何条件。它实际上包含两方面的要求：一方面，在结构的内部要求变形几何相容。例如，刚架中的每一杆件变形后，各点发生位移，但各杆仍是连续的，中间不出现断裂或重叠；在刚结点处各杆之间的夹角变形前后应保持不变，在铰结点处各杆之间可以相对转动但不能相对移动。另一方面，结构发生变形后在支座处要求满足位移约束条件（或称为边界条件）。例如，在铰支座处只能产生转动而不能产生线位移，固定支座处不能产生任何位移等。

在结构分析中，往往对变形的几何相容关系作某些限制（如微小变形等），使几何关系得到简化。

三、力与变形的关系

结构的受力和产生的变形两者之间保持一定的关系，这种关系与结构材料本身的力学性能及变形形式密切相关，通常称为物理条件。它是通过结构的力学实验和计算建立起来的。例如，材料力学中介绍的虎克定律，就是线性弹性材料的轴向应力与轴向应变之间的物理关系（或称本构关系）。同样，剪应力与剪应变、弯曲应力与弯曲变形之间也都存在相应的物理关系。材料的物理关系可能是线性的，也可能是非线性的。

结构力学中所讨论的问题大部分是采用线性物理关系，即所谓线性变形结构，其物理关系常写成荷载与相应位移之间的关系式。当结构上某处有荷载 P 作用，则与 P 相应的位移为 Δ 。在线性关系范围内，外力 P 与位移 Δ 成正比：

$$P = k\Delta \quad (1-1)$$

式中 k ——结构的刚度系数，物理常数，表示产生单位位移 ($\Delta=1$) 所需要施加的外力 [图 1-7 (a)]。

上述物理关系也可以写成另一种形式：

$$\Delta = \frac{1}{k} \times P = \delta P \quad (1-2)$$

式中 δ ——结构的柔度系数，物理常数，表示单位力 ($P=1$) 所产生的位移 [图 1-7 (b)]。

刚度系数和柔度系数互为倒数，它们的乘积为 1。

$$k\delta = 1 \quad (1-3)$$

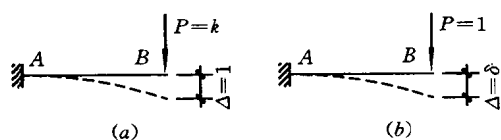


图 1-7

在静定结构的内力计算中，只需使用力系的平衡条件即可求得解答。在超静定结构的静力分析中，通常只提到力系平衡和变形协调两个条件，这是因为在结构的位移计算和超静定结构的内力计算中已经包含了物理条件。在结

构的动力计算和稳定计算中，结构的边界条件（包括力的边界条件和位移边界条件）有突出的作用。

§ 1-4 叠 加 原 理

在结构分析中，将经常用到叠加原理。它是小变形线性弹性结构计算中带有普遍性的原理。其内容是：结构受若干个荷载作用产生的内力或位移等于各个荷载单独作用所得结果的总和。

应用叠加原理可以使结构计算简化。虽然对于实际结构而言，叠加原理是近似的，但只要满足一定的条件，所得结果是足够精确的。这些条件如下。

一、几何线性条件

当结构的变形与结构本身原来的尺寸相比极为微小时，称为小变形结构。在小变形结构计算中，变形所带来的荷载位置变化及杆件尺寸变化的影响可以不考虑，因而允许用变形前的原来尺寸进行计算，这就满足了叠加的几何条件。

图 1-8 所示简支梁受 m 和 P 两个荷载作用，在一般情况下， $\Delta l \ll l$ ，在应用平衡条件时可略去 Δl 的影响。例如，在用 $\sum M_A = 0$ 求支反力 R_B 的计算中，不用 $(l - \Delta l)$ ，仍用原来的 l 得

$$R_B = \frac{m}{l} + \frac{P}{2}$$

由上式可见， m 和 P 共同作用所产生的反力 R_B 等于 m 与 P 分别单独作用所产生反力的线性叠加。这个结果对一般工程问题是足够精确的。同样，计算此梁的内力也可以应用叠加原理。

由于静定结构的反力和内力只需平衡方程即可确定，所以计算静定结构的反力和内力，只需结构满足几何线性条件（小变形结构）就可以应用叠加原理。

二、物理线性条件

结构材料的受力与变形的物理关系若为线性弹性关系，即服从虎克定律，则在物理上提供了线性叠加的条件。

由于静定结构的位移计算和超静定结构的内力和位移计算都要涉及与变形有关的物理条件，所以计算这些量值时，既要结构满足几何线性条件，又要材料服从虎克定律，才可以应用叠加原理。能够应用叠加原理的结构称为线性结构。结构力学讨论的内容，大都属于线性结构的计算。结构的稳定计算和极限荷载计算等内容属于非线性问题，不能应用叠加原理。

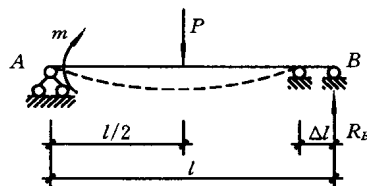


图 1-8

§ 1-5 结构力学课程的特点和学习方法

结构力学是土木工程专业一门重要的专业基础课。在学习结构力学的过程中，经常要用到高等数学、理论力学和材料力学等先修课程的知识，应当根据情况进行必要的复习。结构力学又为工程结构、施工等专业课提供分析计算方法。在工程结构设计和施工中，需要应用结构力学的原理和方法对结构的受力性能和变形特点进行分析，对各种工程问题作出判断和处理。全面、系统地掌握结构力学课程的知识，是一名土木工程师必须具备的重要条件。

结构力学是一门系统性很强的课程，内容的安排由浅入深、由易到难。学生应循序渐进、步步为营、扎实掌握。任何一本比较完整的结构力学教材，都可以划分为这样几大部分：结构的几何组成分析，静定结构的内力计算，静定结构的位移计算，超静定结构的计算（力法、位移法、渐近法），几个专题（影响线、动力问题、稳定问题及结构的极限荷载）。而且这几部分内容在各本教材中的排列顺序也是相同的。这是因为前面的内容是后面内容的基础，相互间关系密切。只有在掌握静定结构内力分析的基础上，才能进行静定结构的位移计算；而静定结构的位移计算又是计算超静定结构的力法的必备条件；在位移法中要使用力法的成果，而位移法又是渐近法的理论基础；结构的静力分析是结构动力分析和稳定计算的基础。因此，必须切实掌握前面的基础知识，才能学好后面的内容。

听课是学习结构力学的重要环节。听课时不应只是被动地听讲和抄笔记，而应在听课时进行积极的思考，体会教师分析问题的思路 and 重点，从中找到规律性的内容。例如，当教师讲授一种新的计算方法时，学生应当注意新方法的出发点是什么，它与旧方法相比有什么特点，其计算步骤和计算公式包含了哪些物理概念，在推导建立这一方法时遇到了什么困难或问题，是怎样解决或处理的。如果教师连续讲了几个例题，就应当思考体会这些例题反映了哪些共同性的规律，每一个例题又有什么特殊性。这样，不仅能够较好地理解所学的内容，而且能够逐渐提高自己分析问题和解决问题的能力。

每一门课程的内容都有主次之分，基本和非基本之分，重点和非重点之分，学习时对不同的内容也有不同的要求。课程的重点在讲课中会体现出来，复习时要进一步明确每章每节内容的重点是什么。如果在整个学习过程中抓不住重点，忽略了基本的东西，花费很大的功夫也是学不好的。

结构力学中的计算原理和方法多有明确的物理概念，学习时，要注意从物理概念上去理解，才能抓住问题的实质。对计算过程中的每一个步骤、每一个公式都应了解其物理意义。只着眼于记住解题的步骤和具体公式的做法，显然是一种错误的学习方法。课程中要将这些计算方法用于分析各种不同类型的结构，这时，应当在理解方法实质的基础上，注意它在不同情况下应用的特点。这样，既容易学会对各种结构的分析，又能通过这些应用来加深对方法的理解。

学习结构力学的另一个重要环节是做习题。在学习过程中必须要做相当数量的习题。做习题是对原理和方法的应用，通过做题可以加深对原理和方法的理解。做题时，应当在复习的基础上回顾原理的基本概念，按照其思路对习题进行分析，弄清楚这些概念在习题中是怎样应用的。如果碰到了困难，发生了错误，要自己试着用原理、概念来分析，以求解决问题。做习题的过程对学生的分析能力、表达能力、运算能力和校核能力都可以得到训练和提高，学习过程中应当充分重视做题这一环节。

结构力学中的各种计算方法之间多有联系，学习时应该注意进行对比。对多种结构型式进行对比，例如静定结构中的梁、刚架、拱、桁架、组合结构的组成、内力等方面的共同点和区别；静定结构和超静定结构在不同外因（荷载、支座位移、温度变化）作用下的内力、变形、计算方法等方面的异同。对两种方法进行对比，例如力法和位移法、静力法和机动法。对两类问题进行对比，例如静力分析问题和动力分析问题。对比可以帮助我们理解问题的特点和本质，加深对事物的认识。

结构力学是一门实用性很强的应用学科，在结构力学中学习的原理和方法都将应用于实际工程结构的设计和施工。但在结构力学教材中出现的不是实际工程结构，而是经过简化的抽象的计算简图。在学习过程中要注意理论联系实际，对从实际结构到计算简图及由计算简图得到的计算结果又应用于实际结构的全过程应予以充分注意，逐步提高分析和解决实际问题的能力。

电子计算机的广泛使用，使结构分析进入了一个崭新的时代。过去靠“手算”无法解决的许多大型、复杂结构的计算问题，现在已经成为“电算”中的常规问题。但是，“电算”并不排斥结构力学的基本理论，而是需要更加重视基本理论。首先，在工程的初步设计阶段，构思和选择结构总体方案时，结构工程师必须对各种基本结构体系的力学概念清楚，定性准确，并借助简单快捷的概念性近似计算，才能很快选择出受力明确、性能良好的方案。同时，这也是施工图设计阶段判断计算机计算成果是否可靠的主要依据。即使你所使用的结构分析程序是完全正确的，但由于使用者对该程序的假设前提及规定的了解和结构边界条件理解的出入，或输入数据的粗心错误等原因，都可能造成输出结果的不正确。有的明显错误凭概念直觉就能发现，但有的错误需要用概念性近似手算来校核才能发现。计算机固然先进，但对其计算结果必须慎重校核，否则可能酿成大错，后果不堪设想。因此在结构力学课程中，我们一方面要学习与“电算”有关的知识，同时又要更加重视基本概念、基本理论和基本方法的学习，而决不能降低这方面的要求。

结构力学并不是一门很难学的课程，只要抱着认真的态度，对自己严格要求，以顽强的毅力克服学习中遇到的困难，不断总结、不断改进自己的学习方法，一定能够学好这门课程。

第二章 平面体系的几何组成分析

杆件体系是由若干杆件及地基用链杆、铰或刚结点连接而成的。本章对平面杆系的几何组成进行分析,以解决怎样组成的杆系才能承受荷载这个基本问题。同时,由于结构的组成方式与它的受力性能有内在联系,因此,很多结构可根据几何组成分析来选择恰当的计算方法和改善结构的受力性能。

§ 2-1 几何组成分析的基本概念

1. 几何不变体系和几何可变体系

体系受到任意荷载作用后,若不考虑材料的应变,能够保持其几何形状和位置不变的,称为几何不变体系;而可发生几何形状或位置改变的,称为几何可变体系。

这里应当注意两点:第一,是任意荷载作用。因为有些几何可变体系在某种特殊荷载作用下也能维持其形状和位置不变。第二,是不考虑材料的应变。即在几何组成分析时,体系中的每一根杆件或几何不变的某个部分都可看作是一个刚体。平面内的刚体称为刚片。地基也可看成刚片。

为能承受荷载,工程结构必须是几何不变体系。结构承受荷载后都会产生一定的变形,这种由于材料应变引起的结构形状或位置的改变量,一般是很微小的,不影响结构的正常使用。因此,在几何组成分析中不考虑材料应变的影响。而几何可变体系的形状或位置的改变,是指体系由于缺少足够的约束或杆件布置不合理所引起的很大的刚性移动。

2. 体系的自由度和约束

当体系运动时,用来确定其位置所需要的独立几何参数(独立坐标)的个数,称为该体系的自由度。

平面内的一个点具有两个自由度,一个刚片具有三个自由度。

限制体系运动的装置称为约束(或联系)。在体系中加入约束将减少体系的自由度,能减少一个自由度的装置称为一个约束。常见的约束有链杆、铰和刚结。

链杆是两端用铰与别的刚片相连的刚性杆。一根链杆是一个约束。

仅连接两个刚片的铰称为单铰。一个单铰是两个约束,也相当于两根链杆。

连接三个或三个以上刚片的铰称为复铰。连接 n 个刚片的复铰相当于 $(n-1)$ 个单铰,是 $2(n-1)$ 个约束。

一个单刚结(仅连接两个刚片)是三个约束。连接 n 个刚片的复刚结是 $3(n-1)$ 个约束。

3. 虚铰(瞬铰)

两个刚片用不交于一点而是延长线交于一点的两根链杆相连接(图 2-1),若两刚片发生运动,将围绕两链杆延长线交点 A 作相对转动,此时,交点 A 如同一个铰,称为虚铰。

虚铰不同于实铰，如图 2-1，当刚片 I 不动，刚片 II 绕 A 点发生微小转动后，虚铰位置移到了 A' 处。但当研究指定位置处的运动时，虚铰与实铰的约束作用相同。

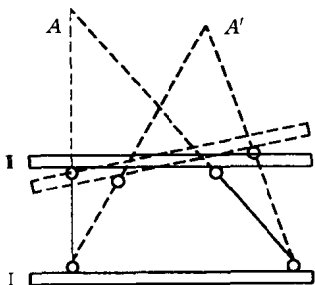


图 2-1

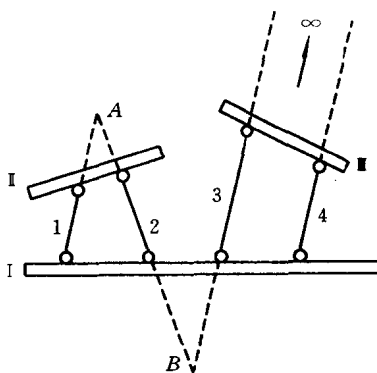


图 2-2

应当注意，必须是连接相同两个刚片的两根链杆才能形成虚铰。在图 2-2 中，链杆 1、2 的延长线交点 A 为虚铰，而链杆 2、3 的延长线交点 B 不能形成虚铰。

当连接相同两个刚片的两根链杆平时（图 2-2 中的链杆 3、4），则认为虚铰位置在沿链杆方向的无穷远处。

4. 必要约束和多余约束

必要约束是使体系几何不变必须有的约束，是保证体系不发生刚性运动的约束。必要约束在数量上要满足保证体系几何不变的最少个数，而且约束的布置要恰当。

若去掉某个约束后，体系仍保持几何不变，则该约束为多余约束。

5. 瞬变体系

在某一瞬时可以产生微小运动，然后就不能继续运动的体系，称为瞬变体系。瞬变体系是由于约束布置不合理而能发生瞬时运动的体系。在很小的荷载作用下，瞬变体系会产生很大的内力，不能用作工程结构。

§ 2-2 平面体系的计算自由度

一、刚片体系的计算自由度 W

式 (2-1) 以刚片（不包括地基）作为运动主体（以地基为参照物），而以连接刚片的刚结点、铰结点及支座链杆作为约束，来计算整个刚片系的自由度：

$$W = 3m - 3g - 2h - r \quad (2-1)$$

式中 m ——刚片数（每个刚片内部应无多余约束）；

g ——单刚结点个数；

h ——单铰结点个数；

r ——支座链杆数（固定支座计为三根支杆）。

在具体计算中当难以确定 m 、 g 、 h 、 r 的数目时，如能联想到公式的出发点，明确约束

是两刚片（计入 m 的）之间的连接，问题就容易解决了。

【例 2-1】 试求图 2-3 所示体系的计算自由度 W 。

解：确定刚片数最简单的方法是把每个结点之间的杆件（支杆除外）作为一个刚片，则 $m=9$ 。

结点 E 和 G 是组合结点，计算单刚结点数时，可暂不考虑铰结杆的存在；而在计算单铰结点数时，则把刚结各杆看作一个刚片。因此，复刚结点 B 、 E 各相当于 2 个单刚结点，结点 C 、 D 、 G 都是单刚结点，故 $g=7$ 。

结点 E 和 G 各有一个单铰结点，故 $h=2$ 。支座结点 A 、 F 、 H 、 I 处的支座链杆 $r=8$ 。由式 (2-1) 计算得

$$W = 3 \times 9 - 3 \times 7 - 2 \times 2 - 8 = -6$$

若把 $ABCDEF$ 、 EGI 、 GH 各作为一个刚片，则 $m=3$ 、 $h=2$ 、 $r=8$ 。又考虑到刚片 $ABCDEF$ 内部有 3 个多余约束，相当于一个单刚结点，故 $g=1$ 。代入式 (2-1) 得

$$W = 3 \times 3 - 3 \times 1 - 2 \times 2 - 8 = -6$$

两种算法得到的 W 值相同。由此可见，用公式 (2-1) 求某一刚片系的计算自由度时，刚片的取法不是唯一的， m 不同，其 g 、 h 也会相应随之改变。

应当注意， m 是指内部没有多余约束的刚片数。如果遇到内部有多余约束的刚片，则应把多余约束计入 g 、 h 或 r 中去。

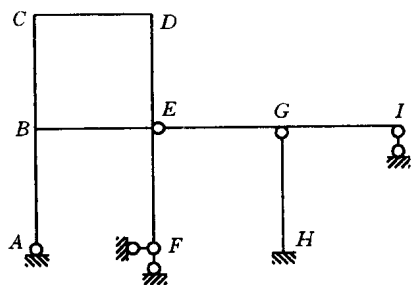


图 2-3

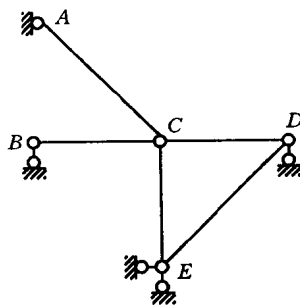


图 2-4

二、铰结链杆体系的计算自由度 W

式 (2-2) 是以铰结点作为运动主体，而以连接这些结点的链杆及支座链杆作为约束，来计算链杆系的自由度：

$$W = 2j - b - r \quad (2-2)$$

式中 j ——链杆系的结点数；

b ——体系本身的链杆数；

r ——支座链杆数。

由此出发点可知，式 (2-2) 中的 j 不是单铰个数。支座铰结点应计入 j （即体系本身链杆的端点都应算作结点）。

【例 2-2】 试求图 2-4 所示链杆系的计算自由度 W 。

解：结点为 A 、 B 、 C 、 D 、 E ，即 $j=5$ ，而 $b=5$ 。