

材料力學問題詳解

(1985年SI版)

J. M. 蓋爾 S. P. 鐵木辛哥 原著
李廣濟 韓光遠 譯著

曉園出版社
世界圖書出版公司

材料力学问题详解

J. M. 蓋爾 S. P. 鐵木辛哥 原著
李廣濟 韓光遠 譯著

· *

曉園出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

· *

1994 年 4 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1994 年 4 月第一次印刷 印张: 27.5

印数: 0001—800 字数: 66 万字

ISBN 7—5062—1761—9/TB·14

定价: 26.90 元 (W_{9311/16})

世界图书出版公司通过中华版权代理公司

购得重印权, 限国内发行。

前 言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，晚園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。晚園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

材料力學問題詳解

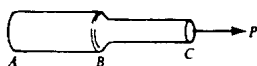
(1985年SI版)

目 錄

第一章	張力、壓力和剪力	1
第二章	軸向荷重元件	33
第三章	扭 轉	129
第四章	剪力和彎矩	191
第五章	樑內之應力	231
第六章	應力、應變分析	325
第七章	樑之撓度	421
第八章	靜不定樑	533
第九章	不對稱彎曲	607
第十章	非彈性彎曲	673
第十一章	立 柱	727
第十二章	能量法	791

第一章 張力、壓力和剪力

- 1.2-1 桿 ABC 有兩種不同截面積，且承受一軸向力 $P = 425 \text{ kN}$ （見圖），桿之兩種截面均為圓形， AB 及 BC 之直徑分別為 100 mm 及 65 mm ，試求桿上每一部份的正應力 σ_{ab} 及 σ_{bc} 。

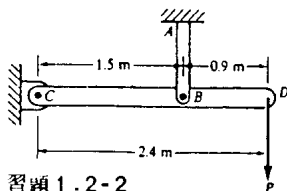


習題 1.2-1

解 $\sigma = P / A$

$$\sigma_{ab} = \frac{425}{\frac{\pi}{4} \cdot 100^2} = 54.11 \text{ MPa} \quad \sigma_{bc} = \frac{425}{\frac{\pi}{4} \cdot 65^2} = 128.08 \text{ MPa}$$

- 1.2-2 一垂直桿 CBD 之長為 2.4 m ，承受一如圖所示的負荷，垂直元件 AB 之截面積為 550 mm^2 ，試求負荷 P 之大小，以使 AB 元件中的正應力等於 40 MPa 。



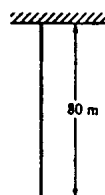
習題 1.2-2

解 $F = \sigma_{ab} \cdot A = 40 \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right) \cdot 550 \text{ mm}^2 = 2.2 \times 10^4 \text{ N}$

$$P \times 2.4 = F \times 1.5 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1.5 F}{2.4} = 13750 \text{ N}$$

- 1.2-3 一長 80 m 的鋁線靠本身重量自由垂懸（見圖），假如鋁之比重 $\gamma = 26.6 \text{ kN/m}^3$ ，試求線中的最大正應力 $\sigma_{\max}$ 。

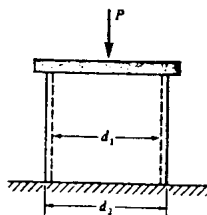
2 材料力學問題詳解



習題 1.2-3

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{r \cdot A \cdot l}{A} = r l = 26.6 \times 80 \text{ kN/m}^2 \\ &= 2.128 \text{ MPa} \end{aligned}$$

1.2-4 內徑 $d_1 = 100 \text{ mm}$ 及外徑 $d_2 = 115 \text{ mm}$ 之空心管被一軸向力 $P = 245 \text{ kN}$ (見圖) 壓縮, 求管中之平均壓應力 σ_c 。



習題 1.2-4

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) = \frac{\pi}{4} (115^2 - 100^2) = 2,532.91 \text{ mm}^2 \\ \sigma_c &= \frac{P}{A} = \frac{245}{2,532.91} = 96.73 \text{ MPa} \end{aligned}$$

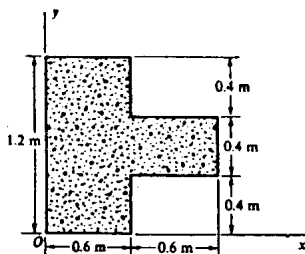
1.2-5 一建築物的兩層柱 ABC 是以空心、方盒形截面材料做成(見圖), 其外尺寸為 $200 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$, 壁厚為 16 mm , 柱頂端之屋頂負荷為 $P_1 = 356 \text{ kN}$, 而在半高處的地板負荷為 $P_2 = 445 \text{ kN}$, 由這些負荷求出此柱兩部份中的壓應力 σ_{c1} 及 σ_{c2} 。

$$\text{解 } A = 200^2 - (200 - 16 \times 2)^2 = 11,776 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{cs} = \frac{P_1}{A} = \frac{356}{11,776} = 30.23 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cs} = \frac{P_1 + P_2}{A} = \frac{356 + 445}{11,776} = 68.02 \text{ MPa}$$

- 1.2-6 圖示為一混凝土基座之截面，(a)若一集中力作用在某點會造成均佈正應力，求此點座標 $\bar{x}$ 及 $\bar{y}$ 。(b)若此集中力為 20 MN，求其造成的壓應力 σ_c 大小。



習題 1.2-6

$$\text{解 } A = 1.2 \times 0.6 + 0.6 \times 0.4 = 0.96 \text{ m}^2$$

$$(a) \quad \bar{x} = \frac{1}{A} (1.2 \times 0.6 \times 0.3 + 0.6 \times 0.4 \times 0.9) = 0.45 \text{ m}$$

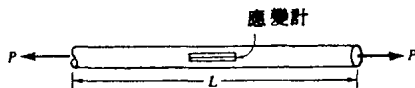
$$\bar{y} = \frac{1}{A} (1.2 \times 0.6 \times 0.6 + 0.6 \times 0.4 \times 0.6) = 0.6 \text{ m}$$

$$(b) \quad \sigma_c = \frac{P}{A} = \frac{20 \text{ MN}}{0.96 \text{ m}^2} = 20.8 \text{ MPa}$$

- 1.2-7 用以加預應力於一混凝土樑的高強度鋼線，長度為 24 m，且被拉長 75 mm，求線中的拉應變。

$$\text{解 } \epsilon = \frac{75}{24 \times 1,000} = 3.125 \times 10^{-3}$$

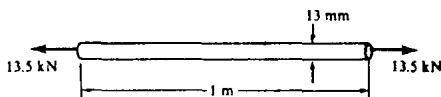
- 1.2-8 長 $L = 1.5 \text{ m}$ 之圓棒承受拉張力如圖，在棒上裝一應變規量出其正應變 $\epsilon = 2 \times 10^{-3}$ ，則在此負荷下全棒之拉伸量為何？



習題 1.2-8

解 $\delta = \epsilon \cdot L = 2 \times 10^{-3} \times 1.5 = 3 \text{ mm}$

- 1.2-9 1 m 長，13 mm 直徑的鋼棒承受拉力 13.5 kN (見圖)，當力加上時，棒之長度增長 0.5 mm，求棒中之正應力及應變。



習題 1.2-9

解 $\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0.5}{1 \times 10^3} = 5 \times 10^{-4}$

$$\sigma = P/A = 13.5 \text{ kN} / \frac{\pi}{4} (13 \text{ mm})^2 = 102 \text{ MPa}$$

- 1.2-10 一支架及纜索組合 ABC (見圖) 支持一垂直力 $P = 15 \text{ kN}$ ，纜索之有效截面積為 120 mm^2 ，支架的面積為 250 mm^2 ，(a) 求纜索及支架中的正應力 σ_{AB} 及 σ_{BC} ，並指出何為拉力，何為壓力。(b) 若纜索伸長 1.3 mm，則應變為何？(c) 若支架縮短 0.62 mm，則應變為何？

解 因繩和棒以 hinge 相連於 A、B、C 點上，故只承受軸向力

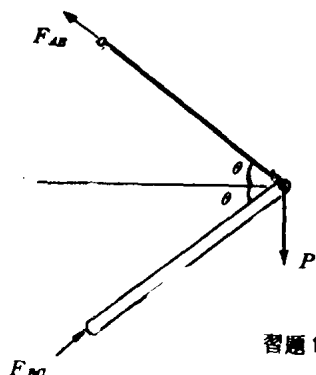
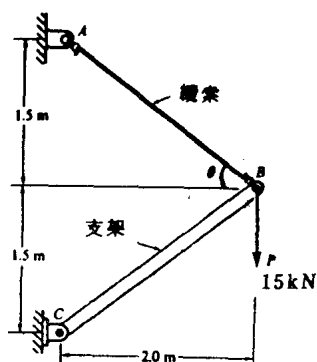
(a) $F_{AB} = F_{BC} = F$ $\sin \theta = \frac{1.5}{\sqrt{1.5^2 + 2^2}} = 0.6$

$$(F_{AB} + F_{BC}) \sin \theta = P$$

$$F = \frac{P}{2 \sin \theta} = \frac{15}{2 \times 0.6} = 12.5 \text{ kN}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{F}{A} = \frac{12.5 \text{ kN}}{120 \text{ mm}^2} = 104 \text{ MPa} \quad (\text{張力})$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F}{A} = \frac{12.5 \text{ kN}}{250 \text{ mm}^2} = 50 \text{ MPa} \quad (\text{壓力})$$



習題 1.2-10

$$(b) \quad \epsilon_{AB} = \frac{\delta}{L} = \frac{1.3 \times 10^{-3}}{\sqrt{1.5^2 + 2^2}} = \frac{1.3 \times 10^{-3}}{2.5} = 5.2 \times 10^{-4}$$

$$(c) \quad \epsilon_{BC} = \frac{\delta}{L} = \frac{0.62 \times 10^{-3}}{2.5} = 2.48 \times 10^{-4}$$

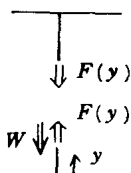
1.2-11 比重 γ 的長索以本身重量自由懸垂，試導出索中拉應力 σ ，公式，使其為由低端算起之距離 y 的函數。



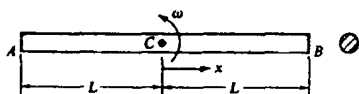
習題 1.2-11

圖 $W = F(y) = \gamma \cdot A \cdot y$

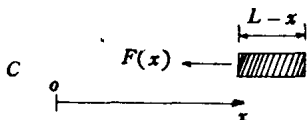
$$\sigma = \frac{F}{A} = \gamma y$$



1.2-12 總長 $2L$ 的圓桿 ACB 以中點 C 繞著一軸旋轉，其角速度 ω 固定 (rps)，桿之比重為 γ ，試以與 C 點距離 x 的函數形式，導出桿上拉應力 σ_x 的公式，並求出最大拉應力為何？



習題 1.2-12



$$F(x) = \int_x^L \left(\frac{\gamma A}{g} dx \right) x \omega^2 = \frac{\gamma A \omega^2}{g} \int_x^L x dx = \frac{\gamma A \omega^2}{2g} (L^2 - x^2)$$

$$\sigma_x = \frac{F(x)}{A} = \frac{\gamma \omega^2}{2g} (L^2 - x^2)$$

$$x = 0, \quad \sigma_{\max} = \frac{\gamma \omega^2 L^2}{2g}$$

- 1.3-1 一長纜線依其自身重量垂直下垂，若纜之材料為(a)降伏應力為 248 MPa 的鋼。(b)降伏應力為 124 MPa 的鋁，試求不斷裂時纜之最大長度如何？（注意：鋼之單位質量為 7.85 t/m³，鋁為 2.75 t/m³）。

解 $\sigma_{\max} = \gamma L$ (由習題 1.2-11)

$$(a) \quad \gamma L_{\max} = \sigma, \quad \Rightarrow \quad L_{\max} = \frac{248 \times 10^6 \text{ N/m}^2}{7.85 \times 10^3 \times 9.8 \text{ N/m}^3} = 3,223.71 \text{ m}$$

$$(b) \quad L_{\max} = \frac{124 \times 10^6 \text{ N/m}^2}{2.75 \times 10^3 \times 9.8 \text{ N/m}^3} = 4,601.11 \text{ m}$$

- 1.3-2 利用直徑 13mm 及量規長 50mm 之標準試片試驗三種不同材料 A、B、C，在試片均斷裂後，量規記號間的距離為 54、63 及 71mm，其直徑則分別為 12.3、10.1 及 6.4 mm（斷裂截面上），試求每一試片之拉伸率及面積縮減率，並將之分為脆性或延性材料。

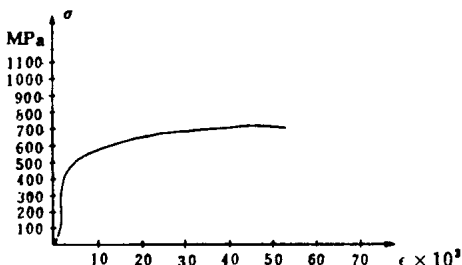
解

	A	B	C
面積縮減率 = $\frac{A_0 - A_f}{A_0} \times 100\%$	$\frac{13^2 - 12.3^2}{13^2}$ = 10.5 %	$\frac{13^2 - 10.1^2}{13^2}$ = 40 %	$\frac{13^2 - 6.4^2}{13^2}$ = 75.8 %
增長率 = $\frac{L_f - L_0}{L_0} \times 100\%$	$\frac{54 - 50}{50}$ = 8 %	$\frac{63 - 50}{50}$ = 26 %	$\frac{71 - 50}{50}$ = 42 %
	脆 性	延 性	延 性

1.3-3 表中所列之數據乃由一高強度鋼的拉力試驗得來，試片直徑為13mm，量規長為50mm，破壞時量規記號間的總伸長量為10.7 mm，而最小直徑為9.4mm，繪出此鋼之正應力、應變圖，並求出比例極限、偏移0.1%之降伏應力、極限應力、50 mm 中的拉伸率及面積縮減率。

習題 1.3-3 之拉力試驗數據

荷 重 (kN)	伸 長 量 (mm)
5	0.005
10	0.015
30	0.048
50	0.084
60	0.102
64.5	0.109
67	0.119
68	0.137
69	0.160
70	0.229
72	0.300
76	0.424
84	0.668
92	0.965
100	1.288
112	2.814
127	斷 裂



$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 13^2}{4} = 132.73 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{p1} = \frac{64.5}{132.73} \times 1,000 = 486 \text{ MPa}$$

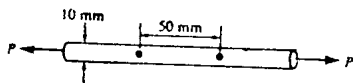
$$\sigma_y = \frac{69}{132.73} \times 1,000 = 520 \text{ MPa}$$

$$\sigma_u = \frac{127}{132.73} \times 1,000 = 957 \text{ MPa}$$

$$\text{伸長率} = \frac{10.7}{50} \times 100\% = 21.4\%$$

$$\text{面積縮減率} = \frac{132.73 - \frac{\pi}{4} \times 9.4^2}{132.73} \times 100\% = 47.7\%$$

- 1.5-1 一拉力試驗以一青銅試片試驗，試片直徑為 10 mm，量規長為 50 mm（見圖），若施加一力 $P = 25 \text{ kN}$ ，可發現量規記號間距離增加 0.152 mm，求青銅之彈性模數。



習題 1.5-1

$$\epsilon = \frac{0.152}{50} = 0.00304$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{25 \text{ kN}}{\frac{\pi}{4} (10)^2 \text{ mm}^2} = 318.3 \text{ MPa}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = 1.047 \times 10^5 \text{ MPa} = 105 \text{ GPa}$$

1.5-2 在一圓截面直徑為 25mm 的鋼桿 ($E = 205 \text{ GPa}$) 中, 要產生軸向應變 $\epsilon = 0.0007$ 所需的拉力 P 為何?

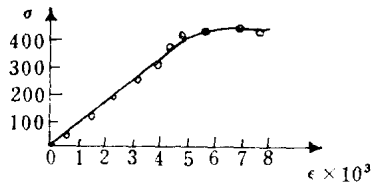
$$\begin{aligned} \text{解 } P &= \sigma A = E \epsilon A = 205 \times 10^9 \times 7 \times 10^{-4} \times \frac{\pi}{4} \cdot (25 \times 10^{-3})^2 \\ &= 70,440 \text{ N} = 70.5 \text{ kN} \end{aligned}$$

1.5-3 表格中的數據是由對一鋁合金試片做拉力試驗而得的, 繪出數據, 並求此合金之彈性模數 E 及比例極限 σ_{pl} 。

習題 1.5-3 之應力應變數據

應 力 (MPa)	應 變
55	0.0006
117	0.0015
186	0.0024
241	0.0032
296	0.0040
345	0.0046
400	0.0052
427	0.0058
441	0.0062
448	0.0065
461	0.0073
469	0.0081

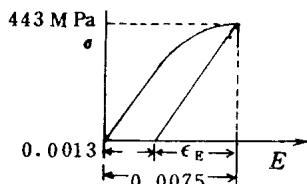
解



$$E = \frac{400}{0.0052} = 76.9 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{pl} = 400 \text{ MPa}$$

- 1.5-4 一鋁合金試樣被用來作拉力試驗，負荷一直加到應變為 0.0075 時，材料中的應力則為 443 MPa，然後卸除負荷，可發現一永久應變 0.0013，求此材料之彈性模數 E 。（提示：見圖 1-6 b）。



解 $\epsilon_E = 0.0075 - 0.0013 = 0.0062$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_E} = \frac{443}{0.0062} \text{ MPa} = 71.5 \text{ GPa}$$

- 1.5-5 一支鋁桿及一支鋼桿，均承受拉力而使得在桿中產生正應力 $\sigma = 165$ MPa，在鋼及鋁桿中的側向應變 ϵ_r 及 ϵ_s 分別為何？若 $E = 73$ GPa， $\nu = 0.33$ （鋁）及 $E = 205$ GPa， $\nu = 0.30$ （鋼）。

解 對鋁桿：

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{165 \times 10^6}{73 \times 10^9} = 2.26 \times 10^{-3}$$

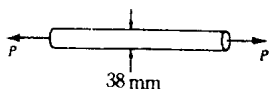
$$\epsilon_s = \nu \epsilon = 0.33 \times 2.26 \times 10^{-3} = 7.46 \times 10^{-4}$$

對鋼桿：

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{165 \times 10^6}{205 \times 10^9} = 0.805 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_s = \nu \epsilon = 0.3 \times 0.805 \times 10^{-3} = 2.4 \times 10^{-4}$$

- 1.5-6 一圓桿直徑為 38 mm，受一力 P 拉伸（見圖），直徑的變化為 0.08 mm，假設 $E = 2.8$ GPa 及 $\nu = 0.4$ ，求桿中的軸向力 P 。



習題 1.5-6

解 側向應變 $\epsilon_r = \frac{0.08}{38} = 2.105 \times 10^{-3}$

$$\text{軸向應變} \quad \epsilon = \frac{\epsilon_t}{\nu} = \frac{2.105 \times 10^{-3}}{0.4} = 5.263 \times 10^{-3}$$

$$P = \sigma A = E \epsilon A$$

$$\begin{aligned} &= 2.8 \times 10^9 \times 5.263 \times 10^{-3} \times \frac{\pi}{4} \times (38 \times 10^{-3})^2 \\ &= 16,713.27 \text{ N} = 16.7 \text{ kN} \end{aligned}$$

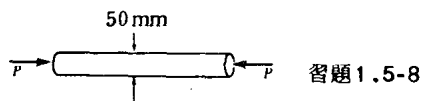
1.5-7 一壓力元件由外徑 90 mm 且截面積為 1580 mm² 之鋼管 ($E = 200$ GPa, $\nu = 0.30$) 製成, 多大的軸向力會使外徑增加 0.0094 mm?

$$\text{解 軸向應變} \quad \epsilon = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{0.0094}{90} = 3.481 \times 10^{-4}$$

$$P = E \epsilon \cdot A$$

$$\begin{aligned} &= 200 \times 10^9 \times 3.481 \times 10^{-4} \times 1580 \times 10^{-6} \\ &= 110 \text{ kN (壓力)} \end{aligned}$$

1.5-8 一高強度鋼桿 ($E = 200$ GPa, $\nu = 0.3$) 受一軸向力壓縮 (見圖), 若無受軸向力時, 則桿之直徑為 50 mm, 為保持某一裕度, 桿之直徑不可超過 50.02 mm, 求最大允許負荷 P 。



$$\text{解 最大軸向應變} \quad \epsilon_{\max} = \left(\frac{50.02 - 50}{50} \right) \times \frac{1}{\nu} = \frac{4 \times 10^{-4}}{0.3}$$

$$= 1.33 \times 10^{-3}$$

$$\therefore P_{\max} = E \epsilon_{\max} A$$

$$= 200 \times 10^9 \times 1.33 \times 10^{-3} \times \frac{\pi}{4}$$

$$\times (50 \times 10^{-3})^2$$

$$= 524 \text{ kN}$$

1.5-9 在試驗一受壓的混凝土圓柱時 (見圖), 初直徑 150 mm 增加了 0.01 mm, 初長度 300 mm 減少了 0.17 mm, 負荷為壓力 $P = 230$ kN, 試求彈性模數 E 及包生比 ν 。

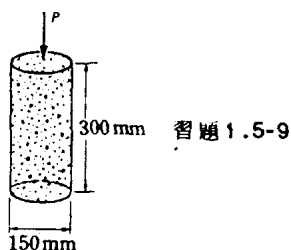


圖 側向應變 $\epsilon_r = \frac{0.01}{150} = 6.67 \times 10^{-4}$

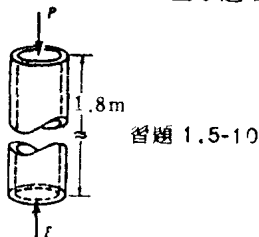
軸向應變 $\epsilon_s = \frac{0.17}{300} = 5.67 \times 10^{-4}$

$$\nu = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_s} = 0.1176$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_s} = \frac{P}{\epsilon_s \cdot A} = \frac{230 \times 10^3}{5.67 \times 10^{-4} \times \frac{\pi}{4} \times (150 \times 10^{-3})^2}$$

$$= 22.95 \text{ GPa}$$

- 1.5-10 長 1.8m，外徑 $d = 116\text{mm}$ ，壁厚 $t = 8\text{mm}$ 之鋼管受一軸向壓力 $P = 180 \text{ kN}$ （見圖），假設 $E = 200 \text{ GPa}$ 及 $\nu = 0.3$ ，求(a)管之縮短量 δ ，(b)外徑之增量 Δd ，及(c)壁厚之增量 Δt 。



解 內徑 $d_i = d - 2t = 116 - 8 \times 2 = 100 \text{ mm}$

$$A = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{4} (116^2 - 100^2) = 2,714 \text{ mm}^2$$

(a) $\epsilon = \frac{P}{EA} = \frac{180 \times 10^3}{200 \times 10^9 \times 2,714 \times 10^{-6}} = 3.316 \times 10^{-4}$

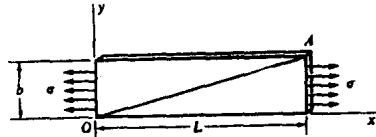
$$\delta = \epsilon L = 3.316 \times 10^{-4} \times 1.8 = 5.97 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$(b) \quad \epsilon_l = \nu \epsilon = 0.3 \times 3.316 \times 10^{-4} = 9.95 \times 10^{-5}$$

$$\Delta d = \epsilon_l \cdot d = 116 \times 9.95 \times 10^{-5} = 1.154 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

$$(c) \quad \Delta t = t \epsilon_l = 8 \times 9.95 \times 10^{-5} = 7.96 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

1.5-11 長 L 及寬 b 的金屬板承受一兩端上施加的均勻拉應力 σ （見圖），在加負荷之前，對角線 OA 之斜率為 b/L ，當應力 σ 施加其上時的斜率為何？

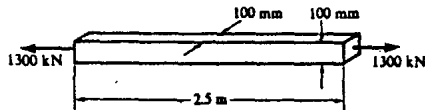


習題 1.5-11

$$\text{解} \quad \Delta L = \frac{\sigma}{E} \cdot L \text{ (增加量)} \quad , \quad \Delta b = \frac{\nu \sigma}{E} \cdot b \text{ (減少量)}$$

$$\text{新斜率} = \frac{b - \Delta b}{L + \Delta L} = \left(\frac{1 - \frac{\nu \sigma}{E}}{1 + \frac{\sigma}{E}} \right) \cdot \frac{b}{L}$$

1.5-12 長 2.5 m，正方截面每邊長 100 mm 之鋼桿承受一軸向拉力 1300 kN（見圖），假設 $E = 200 \text{ GPa}$ ， $\nu = 0.3$ ，求(a)桿之伸長量(b)截面尺寸之變化，及(c)體積之變化。



習題 1.5-12

$$\text{解} \quad \epsilon = \frac{P}{AE} = \frac{1300 \times 10^3}{100^2 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^9} = 6.5 \times 10^{-4}$$

$$(a) \quad \delta = \epsilon \cdot L = 6.5 \times 10^{-4} \times 2.5 \times 10^3 = 1.625 \text{ mm}$$

(b) 截面邊長減少量

$$\Delta = (\nu \cdot \epsilon) \times 100 = 0.3 \times 6.5 \times 10^{-4} \times 100 = 0.0195 \text{ mm}$$