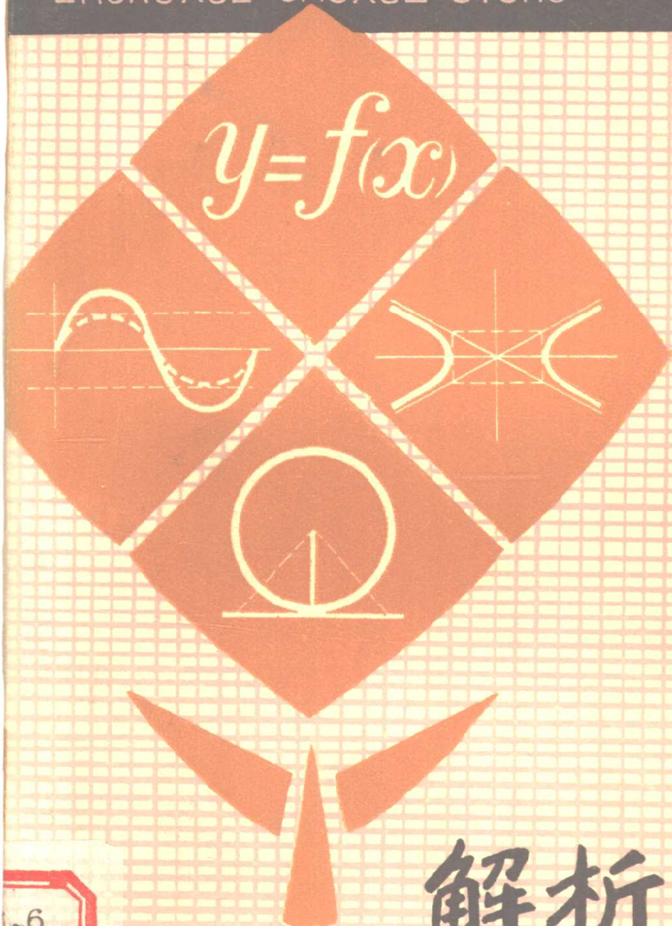
中学数学基础

ZHONGXUE SHUXUE JICHU



解析几何

钱文侠 胡显承 米道生
梁绍鸿 孟广烈 等编

人民教育出版社

中学数学基础

解析几何

钱文侠 胡显承 米道生
梁绍鸿 孟广烈 等编

人民教育出版社

内 容 提 要

这套《中学数学基础》目前包括《代数》(上、下册)、《几何》、《三角》、《解析几何》、《公式与数表》以及前五册的习题解答各一本，它们是在一九七五年出版的一套《初等数学》的基础上编写的。

《解析几何》分上、下两篇。上篇是平面解析几何，主要内容包括：平面直角坐标系、曲线与方程、直线、二次曲线、极坐标和参数方程；下篇是空间解析几何，主要内容包括：向量代数、空间平面和直线、空间曲面和曲线。

这套《中学数学基础》可供广大青年自学相当于中学程度的数学基础知识之用，也可供中小学教师阅读和参考。

中学数学基础

解 析 几 何

钱文侠 胡显承 米道生 梁绍鸿 孟广烈 等编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市新华印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 9 字数 180,000

1981 年 2 月第 1 版 1981 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—360,000

书号 7012·0124 定价 0.66 元

前　言

这套《中学数学基础》目前包括《代数》(上、下册)、《几何》、《三角》、《解析几何》、《公式和数表》以及前五册的习题解答各一本．这套书是在一九七五年出版的一套《初等数学》的基础上编写的．其中代数、几何、三角、解析几何是重新编写的；公式和数表只改正了原书中的错误．

为了更好地帮助广大青年自学相当于中学程度的基础数学知识，在重新编写这套书的过程中，特别注意以下问题：加强基本理论的内容；介绍一些常用的证明方法和计算方法；增加习题数量；注意习、例题的灵活性和综合性；同时引进一些近代数学的初步知识。

目　　录

上　篇

平面解析几何

引言……………………………………………………………………1

第一章　平面直角坐标系、曲线与方程

第一节　平面直角坐标系………2
　有向线段…………………………2
　平面直角坐标系………………6
　距离公式…………………………9
　定比分点…………………………11
　三角形的面积……………………16
第二节　曲线与方程…………20
　曲线与方程………………………20
　曲线的方程………………………21
　方程的图形………………………23
　两曲线的交点……………………28
小结…………………………………31
复习题………………………………31

第二章　直　　线

第一节　直线的方程…………34
　直线的斜率………………………34
　直线的方程………………………37
　直线的一般方程…………………41
第二节　直线基本问题………45
　两直线的交点……………………45
　两直线的夹角……………………47
　两直线平行、垂直的条件………50
　直线的法线式方程………………55
　点到直线的距离…………………57
　直线系……………………………60
小结…………………………………65
复习题………………………………66

第三章　二次曲线

第一节　圆………………………69
　圆的方程…………………………69
　三个条件定圆……………………72
第二节　椭圆……………………76

椭圆的方程……………………76
椭圆的性质……………………80
第三节　双曲线………………88
双曲线的方程…………………88
双曲线的性质…………………92
共轭双曲线……………………99
第四节　抛物线………………101
抛物线的方程…………………101
抛物线的性质…………………103
第五节　二次曲线的切线……109
曲线的切线……………………109
二次曲线的切线………………110
曲线的法线……………………116
第六节　一般二次方程………121
平移变换………………………121
利用平移化简方程……………124
旋转变换………………………130
利用旋转化简方程……………135
一般二次方程的讨论…………139
二次曲线系……………………144
小结……………………………148
复习题…………………………149

第四章　极坐标和参数方程

第一节　极坐标………………154
极坐标系………………………154
极坐标和直角坐标的互换……156
曲线的极坐标方程……………158
极坐标方程的图形……………162
螺线……………………………166
圆锥曲线的极坐标方程………170
第二节　参数方程……………175
参数方程………………………175
旋轮线和渐伸线………………181
小结……………………………187
复习题…………………………188

总结……………………………192

下　篇

空间解析几何

第五章　向量代数

第一节　空间直角坐标系……195
第二节　向量…………………199
向量的坐标表示………………199
模和方向余弦…………………200
向量的运算……………………202
定比分点………………………203
第三节　两向量的数量积……205
数量积的定义…………………205

数量积的性质……………………206
数量积的坐标表示……………208
第四节　两向量的向量积……210
向量积的定义…………………210
向量积的性质…………………212
向量积的坐标表示……………213
第五节　混合积………………216
复习题…………………………220

第六章　空间平面和直线

第一节　平面…………………224
平面的点法式方程……………224
平面的一般式方程……………226
第二节　平面基本问题………230
两平面的位置关系……………230
点到平面的距离………………232
第三节　直线…………………235
直线的方程……………………235
杂例……………………………239
第四节　三平面间的关系、平面束……243
三平面间的关系………………243
平面束…………………………247
复习题…………………………249

第七章　空间曲面和曲线

第一节　曲面与方程…………254
曲面与方程……………………254
球面……………………………255
柱面……………………………256
旋转曲面………………………257
锥面……………………………260
第二节　曲线与方程…………262
曲线的一般方程………………262
曲线的参数方程………………264
曲线在坐标面的投影…………265
第三节　二次曲面……………267
旋转二次曲面…………………267
一般二次曲面…………………269
复习题…………………………278

上　篇

平面解析几何

引　言

解析几何是数学的一个分支，产生于十七世纪初期．当时由于资本主义生产的发展，在促进自然科学和生产技术改进的过程中，相应地提出了许多数学问题．例如，在天文学上，凯普勒发现行星沿椭圆轨道绕太阳运行；在力学上，伽利略发现抛射体沿抛物线轨道运动；巴斯卡发现大气压力随高度的增加而递减的规律．所有这些问题，都需要对这些曲线进行研究和计算，从而导致了解析几何的产生和发展．

解析几何是在坐标系的基础上，用代数方法研究几何对象的一门数学．

平面解析几何研究的主要问题是：一、根据已知条件，求出曲线（包括直线）的方程；二、通过方程，研究曲线的性质，并作出曲线的图形．

解析几何是进一步学习数学、物理和其他一些学科的基础．

第一章　平面直角坐标系、曲线与方程

第一节　平面直角坐标系

有 向 线 段

在实际问题中，常要考虑直线和线段的方向．例如，物体的位移是既有大小又有方向的量，因此，在用线段表示位移时，不仅要指出线段的长度，还要指出线段的方向．

任一条直线 l，有两个相反的方向．如果指定其中一个作为正向，那么，相反的方向就是负向．直线 l 的正向常用箭头所指方向表示，如图 1-1．

图　1-1

图　1-2

规定了正向的直线，叫做**有向直线**．

任一条线段 AB，也有两个相反的方向．如果以 A 为起点，B 为终点，那么，由 A 到 B 是一个方向；如果以 B 为起点，A 为终点，那么，由 B 到 A 是和由 A 到 B 相反的方向，如图 1-2．

规定了起点和终点的线段，叫做**有向线段**．从起点到终点的方向，就是这条有向线段的方向．

以 A 为起点, B 为终点的有向线段，记作 AB; 以 B 为起点，A 为终点的有向线段，记作 BA. AB 和 BA 是两个不同的有向线段,因为它们的方向不同.

规定了度量单位的有向直线,叫做**轴**.现在来考察在轴上的有向线段.

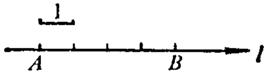


图 1-3

设有轴 l 和在轴上的一条有向线段 AB(如图 1-3). 要决定 AB 的方向是正是负，就看 AB 的方向和 l 的方向是否一致. 图中有向线段 AB 的方向与 l 的方向一致，所以是正的; 而 BA 的方向与 l 的方向相反,所以是负的.

规定了度量单位后,我们可以量得有向线段的长度,它是一个非负的数,记作 $|AB|$,显然

$$|AB|=|BA|.$$

有向线段 AB 的长度 $|AB|$,连同表示它的方向的正负号,叫做这条有向线段的**数量**，或者叫做有向线段的**值**. 如图 1-3 中, AB 的数量是 5, BA 的数量是 -5. 为了简便，我们把有向线段 AB 的数量仍记为 AB. 在轴 l 上有向线段 AB 和 BA 的数量间的关系是

$$AB=-BA.$$

设 A、B、C 是轴 l 上任意三点，则 AB、BC 和 AC 的数量间有下述关系成立:

$$\mathbf{AB+BC=AC}.$$

这个关系式不论 A、B、C 三点在轴上如何排列，都是成立的. 要证明这个关系式成立，必须证明它对于一切可能的排列情况都成立. 但总的来讲, A、B、C 在轴上的排列，可分为两类:

① AB 与 BC 的方向相同，② AB 与 BC 的方向相反．下面，仅就其中的两种情况(如图 1-4、图 1-5)进行证明，其它情况可类似证明．

图 1-4

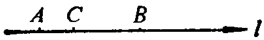


图 1-5

证：在图 1-4 中，

$$|AC|=|AB|+|BC|,$$

而 $$AC=|AC|,\ AB=|AB|,\ BC=|BC|,$$

$$\therefore \qquad AC=AB+BC.$$

在图 1-5 中，

$$|AC|=|AB|-|BC|,$$

而 $$AC=|AC|,\ AB=|AB|,\ BC=-|BC|,$$

$$\therefore \qquad AC=AB+BC.$$

这个关系式叫做沙尔公式．

特别地，当 A、C 重合时，公式化为

$$0=AB+BA,$$

即 $$AB=-BA.$$

沙尔公式可以推广，设 A、B、C、D、E、F 为轴上任意的点，则有

$$\boldsymbol{AB+BC+CD+DE+EF=AF}.$$

在代数中，我们已经知道数轴上的全体点和全体实数之间有一一对应关系．我们把和数轴上一点相对应的实数叫做这点的坐标．现在，我们用坐标来表示有向线段的值．

设 P_1、P_2 是 Ox 轴上任意两点，它们的坐标分别为 x_1、x_2，

那么，有向线段 P_1P_2 的值等于 x_2-x_1，即

$$P_1P_2=x_2-x_1.$$

图 1-6

证：根据沙尔公式，

$$OP_1+P_1P_2=OP_2,$$

$$\therefore \qquad P_1P_2=OP_2-OP_1=x_2-x_1.$$

由此可知，不论 P_1、P_2 两点在 Ox 轴上的位置如何，P_1P_2 总是等于 P_2 点的坐标减去 P_1 点的坐标.

显然，有向线段 P_1P_2 的长度，即 P_1、P_2 两点间的距离为

$$|P_1P_2|=|x_2-x_1|.$$

例 设 A、B、C、D 是同一条直线上的四个点，求证不论它们的位置如何，总有

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$

证：取这条直线为 Ox 轴，A 点为原点. 设 B、C、D 的坐标分别为 b、c、d，那么，

$$\begin{aligned}AB\cdot CD+BC\cdot AD&=b(d-c)+(c-b)d\\&=-bc+cd,\end{aligned}$$

$$AC\cdot BD=c(d-b)=cd-cb,$$

$$\therefore \qquad AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$

练　　习*

1. 如图，试求

(1) AB、BC、CD、DA 各等于什么？

---

* 每一节后有习题，每一章后有复习题. 一节中间安排的习题，叫练习.

(2) $AB+BC+CD=?$

$AB+BC+CD+DA=?$

（第 1 题）

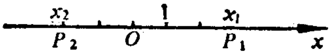
2. 如图，试求

(1) $x_1=?$

$x_2=?$

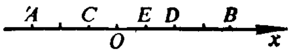
(2) $P_1P_2=?$

$P_2P_1=?$



（第 2 题）

3. 如图，x 轴上每一格等于一个单位长度，写出有向线段AB、BC、CD、DE、EA 的数量和长度.



（第 3 题）

4. 设P是 A、B、C 三点所在的直线上任意一点，求证不论它们位置如何，总有

$$PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB=0.$$

平面直角坐标系

在数轴上的点与实数建立了一一对应关系的基础上，我们再讲一种用数对来表示平面上点的位置的方法.

在平面上选定两条互相垂直的直线，指定它们的正方向，取定度量单位，并把两轴的交点作为原点．这样，就建立了一个**平面直角坐标系**.

通常，把水平放置的轴叫做**横轴**或 x 轴，由左向右为正向；铅直放置的轴叫**纵轴**或 y 轴，由下向上为正向；x 轴和 y 轴统称**坐标轴**．原点用字母O表示．如图 1-7.

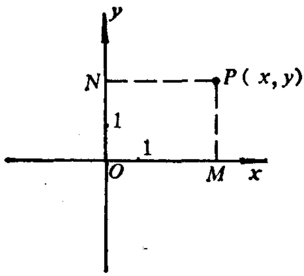


图 1-7

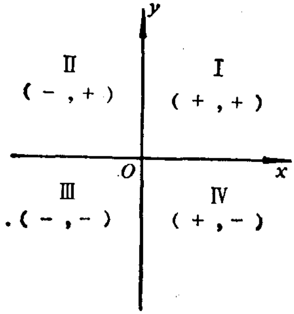


图 1-8

设P为平面上任意一点. 过P点向x轴作垂线, 得垂足M; 过P点向y轴作垂线, 得垂足N.

设M点在横轴上的坐标为x, N点在纵轴上的坐标为y. 则x称为P点的**横标**, y称为P点的**纵标**, 而数对(x, y)表示P点的**平面坐标**(图 1-7).

这样, 对于坐标平面上任意一点P, 我们有唯一的一对实数(x, y)和它对应, 反之, 对于任意一对实数(x, y), 在坐标平面上都可确定唯一的一点P. 因此, 坐标平面上的点P与实数对(x, y)就建立了一一对应关系.

两轴将平面分成四个部分. 这些部分叫做**象限**. 这四个象限的顺序规定如下(图 1-8):

在第 I 象限内, $x>0$, $y>0$;

在第 II 象限内, $x<0$, $y>0$;

在第 III 象限内, $x<0$, $y<0$;

在第 IV 象限内, $x>0$, $y<0$.

上述这种将坐标平面上的点的位置用有序实数对来表示的方法, 是十七世纪由法国数学家笛卡儿提出的, 因此, 直角

坐标系也称为笛卡儿直角坐标系.

通过平面直角坐标系，把平面上的点与实数对对应起来，进而有可能把平面上的曲线与含两个未知数的代数方程联系起来，解析几何正是从这一基本观念出发，用代数方法研究几何问题的.

例 1 设已知点 P 的坐标为 $(-2,\ 1)$，求关于 x 轴、y 轴和原点对称点的坐标.

解：如图 1-9，P 点关于 x 轴的对称点为 $P_1(-2,\ -1)$，关于 y 轴的对称点为 $P_2(2,\ 1)$，关于原点 O 的对称点为 $P_3(2,\ -1)$.

一般地，根据平面几何上点的轴对称与中心对称的定义，容易知道，(x,y) 与 $(x,-y)$ 关于 x 轴对称，(x,y) 与 $(-x,y)$ 关于 y 轴对称，(x,y) 与 $(-x,-y)$ 关于原点对称.

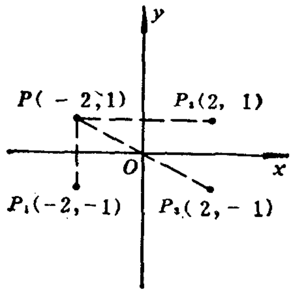


图 1-9

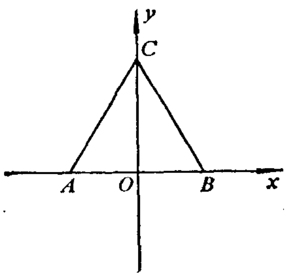


图 1-10

例 2 设有边长为 a 的等边三角形，取 AB 边所在直线为 x 轴，AB 边的中点作原点，求此三角形三个顶点的坐标.

解：设顶点 C 落在 y 轴的正方向上. 此时，顶点 A 的坐

标是$\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$，顶点$B$的坐标是$\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. 由于

$$OC=|OC|=|AC|\sin 60^\circ=a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以顶点C的坐标是$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，如图 1-10.

还有一种情况是顶点C落在y轴的负方向上，这时顶点C的坐标是$\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，其它不变.

距 离 公 式

在坐标平面上，已知任意两点$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，求此两点间的距离$|P_1P_2|$.

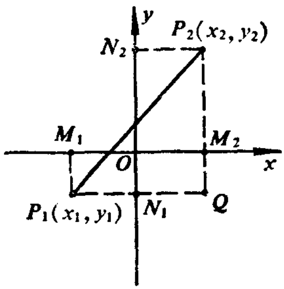


图 1-11

如图 1-11，过P_1、P_2分别向两轴作垂线P_1M_1、P_2M_2和P_1N_1、P_2N_2，设直线P_1N_1和P_2M_2相交于Q，在直角$\triangle P_1QP_2$中，

$$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|QP_2|^2.$$

$$\because \quad |P_1Q|=|M_1M_2|=|x_2-x_1|,$$

$$|QP_2|=|N_1N_2|=|y_2-y_1|,$$

$$\therefore \quad |P_1P_2|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2,$$

即
$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

这就是$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$两点间的**距离公式**.

特别地，平面上任一点$M(x, y)$到原点$O(0, 0)$的距离

$$r=|OM|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

例 1 冲制如图 1-12 所示的零件时，需要知道三孔中心的距离．已知三孔中心的坐标分别是 $A(-2,\ 4)$、$B(4,\ 0)$、$C(-5,0)$，求三孔中心的距离．

解： 根据距离公式，

$$|BA|=\sqrt{(-2-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{52}=7.21,$$

$$|AC|=\sqrt{[-5-(-2)]^2+(0-4)^2}=\sqrt{25}=5.$$

至于距离 $|CB|$，由图显然有

$$|CB|=4-(-5)=9.$$

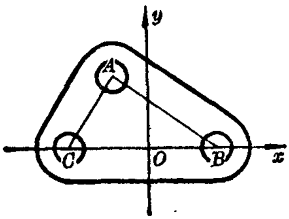


图 1-12

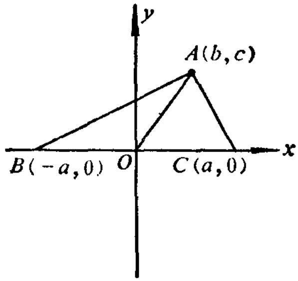


图 1-13

例 2 $\triangle ABC$ 中，AO 是 BC 边上的中线，求证

$$|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2).$$

证： 取 BC 所在直线作 x 轴，BC 中点 O 作原点，设三顶点坐标分别为 $A(b,\ c)$、$B(-a,\ 0)$、$C(a,\ 0)$，如图 1-13.

根据距离公式有：

$$|AB|^2=(-a-b)^2+(0-c)^2,$$

$$|AC|^2=(a-b)^2+(0-c)^2,$$

$$\therefore \quad |AB|^2+|AC|^2=2(a^2+b^2+c^2);$$