高等学校试用教材

非线性泛函分析及其应用

赵义纯 编著

高等教育出版社

高等学校试用教材

非线性泛函分析及其应用

赵义纯 编著

高等教育出版社

内容提要

本书经高等工业学校应用数学专业教材委员会1986年5月杭州会议审定为教材. 内容包括Banach空间中的微分学和抽象函数的积分、Banach压缩原理的重要推广——Caristi不动点定理和非扩展算子、拓扑度理论和方法、变分方法、单调算子理论以及集值映射的不动点理论. 书中讲述了上述理论在非线性常微分方程、积分方程、拟线性椭圆型偏微分方程变动边值问题和凸规划上的应用.

本书可供高等理工科院校应用数学专业、数学专业和计算数学专业的学生作为教材，也可供数学研究生、大学教师和科技人员参考.

高等学校试用教材

非线性泛函分析及其应用

赵义纯 编著

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.875 字数 230 000

1989年3月第1版 1989年3月第1次印刷

印数 0 001— 2 000

ISBN7-04-002015-7/O·728

定价 2.65 元

序

近二十年来非线性泛函分析获得蓬勃发展. 现在有越来越多的理工科院校为应用数学专业本科生和研究生开出这门课程. 本书是在原编油印讲义《非线性泛函分析及其应用》的基础上修改而成的，经高等工业学校应用数学专业教材委员会1986年杭州会议审定为教材. 近几年国内外已经出版了几本非线性泛函分析专著，其中尤以自1985年以来相继出版的E. Zeidler著《Nonlinear Functional Analysis and Its Applications》四卷英译本的内容最为浩繁，可谓囊括这一领域各个方面的成果. 本书与这些专著有很大不同. 实际上，它是在作者八年来为数学系研究生和本科生讲授同名课程所用的讲稿基础上逐步形成的. 为适合本科生的需要，去掉了过细和过于专门的材料，突出了这门课程的基本理论. 同时尽可能多地选了一些应用在非线性常微分方程、非线性积分方程、非线性偏微分方程、数值分析和最优化问题上的实例.

第一章介绍Banach空间中的微分学、抽象函数的Riemann积分和隐函数定理. 其中微分理论，作为本门课程的最基础的知识写得较充实. 第二章先介绍Caristi不动点定理，它是Banach压缩映射原理的一个最有价值的推广，在变分学、最优化、控制论、数学规划和微分方程等领域有着广泛应用. 然后介绍非扩展算子不动点理论，它是处理非线性发展方程的有力工具. 第三章详细介绍了拓扑度理论，及一些著名的不动点定理，并通过各种应用使学生掌握度理论方法. 第四章先讲述梯度映射和它的势泛函表达式，这部分是无穷维空间的场论. 然后讲述泛函的极值以及弱

下半连续性在保证泛函达到极小值的重要作用. 最后介绍变分方法在非线性积分方程的应用. 第五章先从在微分方程、积分方程、凸规划、数值分析和非光滑分析等领域很有用的次微分理论讲起，然后介绍一类重要的非紧映射——单调映射的基本理论，其中包括正规对偶映射和强制极大单调映射必满射等基本结果. 第六章简略介绍一下集值映射的不动点理论和 Von Neumann 极小极大定理.

本书不涉及线性拓扑空间知识. 书中已详述了所用到的拓扑知识. 读者只需具有线性泛函分析入门知识便可学习本书. 书中少量标有*号的章节以及小字排印的内容可不讲授. 为便于学习，第二章 §7 和 §8 就线性赋范空间的情形讲述了凸集分离定理和弱拓扑等概念和结果. 除第一章是共同需要的基础知识外，其余各章很少相互涉及，授课教师可根据学时多少和要求，自行取舍章节，灵活使用. 60 学时可讲完本书大部分内容.

应用数学教材编委会将这本书稿定为教材之列，在国内是一个新的尝试. 哈尔滨工业大学吴从炘教授在百忙中仔细审阅了书稿，提出许多宝贵意见，增强了本书的适用性. 胡志国、杨光红、梁岳和宋叔尼同志也对本书提出不少改进意见并抄写书稿，在此一并向他们表示衷心感谢. 由于作者学术水平和教学经验的限制，书中错误和不当之处在所难免，恳切希望专家、授课教师和读者给予指正

编　　者

目　录

第一章　Banach 空间中的微分学

早在泛函分析诞生之前，在变分学中就已经考虑了非线性泛函和它的变分。非线性泛函分析是无穷维拓扑空间(或无穷维流形)上的非线性分析，它所研究的对象是作用在无穷维空间中的非线性算子．因此，非线性泛函分析中的一些概念、方法和结果常常受到有限维空间的分析学和线性泛函分析的启迪．像古典分析那样，算子的有界性、连续性、微分和积分等分析概念是首先要碰到的，本章在 Banach 空间中讨论这些概念．

§1　非线性算子的有界性和连续性

设 X,Y 均为距离空间，T 是从 X 到 Y 的算子．我们用 $\mathscr{D}(T)$ 表示 T 的定义域，记作 $T:\ \mathscr{D}(T)\subset X\to Y$．记号 $T:\Omega\subset X\to Y$ 表示 $\Omega=\mathscr{D}(T)$．特别地，$T:X\to Y$ 系指 $\mathscr{D}(T)=X$

定义1·1　设 X,Y 是距离空间，称算子 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$ 是有界的，是指 T 映 $\mathscr{D}(T)$ 内任一有界集为 Y 中的有界集．

定义1·2　设 X、Y、T 同定义1·1，$x_0\in\mathscr{D}(T)$．称 T 在 x_0 处连续，是指对于任意点列 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$，当 $x_n\to x_0$ 时，有 $Tx_n\to Tx_0$．

若 T 在 $\mathscr{D}(T)$ 的每一点皆连续，则称 T 是连续算子．

不难验证，如此定义的连续性概念与用邻域来定义是等价的．

由定义可以看出，连续的概念依赖于极限的概念．我们知道，在无穷维赋范空间中，有多种极限的概念，从而可以定义多种连续的概念．极限概念有强有弱，决定了连续性概念有强有弱．在研

究具体问题时，许多算子往往不具有较强的连续性，因而有必要研究各种较弱的连续性. 在本节最后，我们将介绍几种其它的连续性概念.

定义1·3 设 X、Y、T 同定义 1·1，称 T 在 $\mathscr{D}(T)$ 上是一致连续的，是指对于任意指定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 x'、$x''\in\mathscr{D}(T)$ 且 $\rho(x',x'')<\delta$ 时，有 $\rho_1(Tx',Tx'')<\varepsilon$，其中 ρ、ρ_1 分别表示 X,Y 的距离.

下面来考虑算子的连续性与有界性的关系.

例1 设 X 是 n 维欧氏空间 E^n，$Y=E^1$. f: $\Omega\subset X\to Y$ 连续. 众所周知，若 Ω 是有界闭集，则 f 在 Ω 上有界. 自然要问，当 X 为无穷维赋范空间时，上述结论是否仍然成立呢？下面的例子说明结论不一定成立.

例2 取 $X=l^2$，$Y=E^1$，f: $X\to Y$，其中 $x=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in X$，

$$f(x)=\sum_{|\eta_m|\geq 1}(|\eta_m|-1)m.$$

实际上对于固定的 x，$f(x)$ 仅对有限项求和，下面证明 f 在 X 上连续.

设 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subset X$，$x_n=(\eta_1^{(n)},\eta_2^{(n)},\cdots)$，$x_n\to x_0\,(n\to\infty)$，则 $f(x_n)$

$$=\sum_{|\eta_m^{(n)}|\geq 1}(|\eta_m^{(n)}|-1)\,m,\quad f(x_0)=\sum_{|\eta_m^{(0)}|\geq 1}(|\eta_m^{(0)}|-1)m.$$

因为 $x_n\to x_0$，而 l^2 中按范数收敛蕴涵一致依坐标收敛，又因 $f(x_0)$ 仅对有限项求和，因而 $f(x_n)\to f(x_0)\,(n\to\infty)$，即 f 在 X 上连续. 然而，f 不是有界算子. 事实上，任取 $\varepsilon_0>0$，令 $\eta_m^{(n)}=(1+\varepsilon_0)\cdot\delta_{mn}$，$x_n=(\eta_1^{(n)},\eta_2^{(n)},\cdots)$，其中

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1, & \text{当 } m=n\\ 0, & \text{当 } m\neq n\end{cases}$$

那么 $\{x_n\}\subset\bar{B}(\theta,\ 1+\varepsilon_0)$，其中 $\bar{B}(\theta,1+\varepsilon_0)=\{x\in X\,|\,\|x\|\leqslant 1+$

$\varepsilon_0\}$，而 $f(x_n)=n\varepsilon_0\to\infty\,(n\to\infty)$，故 f 无界.

由于 $\bar{B}(\theta,1+\varepsilon_0)$ 是有界闭集，可见有界闭集上的连续算子不一定有界.

本书用 $B(x_0,r)$ 和 $\bar{B}(x_0,r)$ 分别表示以 x_0 为心，r 为半径的开球和闭球.

命题1·1 设 X、Y 皆为线性赋范空间，$T:\bar{B}(x_0,r)\subset X\to Y$ 一致连续，则 T 为有界算子.

证明 由假设知，存在 $\delta>0$，当 $x',x''\in\bar{B}(x_0,r)$ 且 $\|x'-x''\|<\delta$ 时，有 $\|Tx'-Tx''\|<1$. 本书用 $\mathscr{N}$ 表示全体自然数的集合. 取 $n_0\in\mathscr{N}$，使得 $\dfrac{r}{n_0}<\delta$. 设 $x\in\bar{B}(x_0,r)$，令 $x_i=x_0+\dfrac{i}{n_0}(x-x_0)$ $(i=0,1,\cdots,n_0)$，则根据

$$\|x_{i+1}-x_i\|=\frac{1}{n_0}\|x-x_0\|\leqslant\frac{r}{n_0}<\delta$$

有 $\qquad \|Tx_{i+1}-Tx_i\|<1 \quad (i=0,1,\cdots,n_0-1)$

故有

$$\begin{aligned}\|Tx\|&\leqslant\|Tx-Tx_0\|+\|Tx_0\|\\&\leqslant\sum_{i=0}^{n_0-1}\|Tx_{i+1}-Tx_i\|+\|Tx_0\|\\&\leqslant n_0+\|Tx_0\|\end{aligned}$$

即 T 为有界算子.

证毕

值得注意的是，在命题 1·1中若将闭球 $\bar{B}(x_0,r)$ 换成有界闭集，则结论不真. 但从命题 1·1 的证明中易看出对有界凸集结论仍然成立.

由命题 1·1和例 2 我们可以看出，无穷维空间中有界闭集上的连续算子不一定是一致连续的.

例 3 Caratheodory 映射.

设 $\Omega\subset E^n$ 是 Lebesgue 可测集，$f(s,u)$ 是定义在 $s\in\Omega$, $|u|<\infty$ 上的函数，称 $f(s,u)$ 满足 Caratheodory 条件，是指

c_1) 对几乎所有的 $s\in\Omega$, $f(s,u)$ 对 u 连续.

c_2) 对任意固定的 u, $f(s,u)$ 对 s 是可测的.

适合 Caratheodory 条件的函数，称为 Caratheodory 函数.

设 $x(s)$ 是一实函数 $(s\in\Omega)$. 定义 $(Fx)(s)=f(s,x(s))$. 这个算子 F 为一非线性算子，它将 Ω 上的实函数映成 Ω 上的实函数. 称此算子为 Caratheodory 映射或 Nemyskii 算子.

我们来证明，F 映 Ω 上 (L) 可测函数为 Ω 上 (L) 可测函数. 实际上，不失一般性，可设对所有 $s\in\Omega$, $f(s,u)$ 对 u 连续. 设 $x(s)$ 是可测函数. 取简单函数列 $\{x_n(s)\}$ 满足 $x(s)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(s)$. 于是，对每一 $s\in\Omega$, $f(s,x(s))=\lim\limits_{n\to\infty}f(s,x_n(s))$. 下面来证明每个 $f(s,x_n(s))$ 都是可测函数，从而也就证明了 $f(s,x(s))$ 是可测的. 设 $x_n(s)=\sum\limits_{j=1}^{n}c_j\chi_{\Omega_j}(s)$，其中 c_j 是常数，χ_{Ω_j} 是 Ω_j 的特征函数，Ω_j 两两不交，$\bigcup\limits_{j=1}^{n}\Omega_j=\Omega$. 由此得 $f(s,x_n(s))=\sum\limits_{j=1}^{n}f(s,c_j)\chi_{\Omega_j}(s)$. 因为每一个被加项都是可测的，所以 $f(s,x_n(s))$ 可测.

现在我们来考虑 Caratheodory 映射的有界性与连续性. 我们关心的是它在空间 $L^p(\Omega)$ $(p\geqslant 1)$ 上的性质.

引理 1·1 (Nemyskii V. V., 1934) 设 $m\Omega<\infty$，则 Caratheodory 映射 F 映依测度收敛列 $\{x_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ 为依测度收敛列 $\{f(s,x_n(s))\}_{n=1}^{\infty}$.

证明 设 $x_n(s)$ 依测度收敛于 $x_0(s)$. 我们欲证：对于任意指定的 $\varepsilon>0$ 及 $\delta>0$，存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$m(\Omega_n)=m\{s\in\Omega\,\big|\,|f(s,x_n(s))-f(s,x_0(s))|<\varepsilon\}$$

$$>m(\Omega)-\delta$$

对于上述的 $e>0$，令

$$G_k=\{s\in\Omega \mid \text{对于任意的 } u,\ |x_0(s)-u|<\frac{1}{k}\Rightarrow$$
$$|f(s,x_0(s))-f(s,u)|<\varepsilon\}$$

其中"⇒"表示蕴涵关系. 则 $G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_k\subset G_{k+1}\subset\cdots$. 记 $E=\Omega\setminus\bigcup_k G_k$. 若 $s\in E$，则 $s\overline{\in}G_k\ (k=1,2,\cdots)$，即存在$u_k$，虽然$|x_0(s)-u_k|<\frac{1}{k}$，但$|f(s,x_0(s))-f(s,u_k)|\geqslant\varepsilon\ (k=1,2,\cdots)$. 这正表明 $f(s,\cdot)$在 $u=x_0(s)$ 处不连续. 据 $c_1)$ $m(E)=0$. 从而 $m(\Omega)=m\left(\bigcup_k G_k\right)=\lim\limits_{k\to\infty}m(G_k)$. 由此得出对于给定的$\delta>0$，存在$K_0\in\mathcal{N}$，有

$$m(G_{K_0})>m(\Omega)-\frac{\delta}{2} \tag{1·1}$$

令 $F_n=\left\{s\in\Omega\,\middle|\,|x_n(s)-x_0(s)|<\frac{1}{K_0}\right\}$. 因为$x_n(s)$依测度收敛于 $x_0(s)$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}m(F_n)=m(\Omega)$. 故存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，

$$m(F_n)>m(\Omega)-\frac{\delta}{2} \tag{1·2}$$

根据 F_n与 G_{k_0}的定义，$F_n\cap G_{k_0}\subset\Omega_n$. 所以 $m(\Omega_n)\geqslant m(F_n\cap G_{k_0})$，综合(1·1)、(1·2)式知，$n\geqslant N$ 时，$m(\Omega_n)>m(\Omega)-\delta$.

证毕

定理 1·1 (Vainberg M. M., 1951) 若$m(\Omega)<\infty$，$p_1,p_2\geqslant1$ 且 Caratheodory 函数满足

$$|f(s,u)|\leqslant a(s)+b|u|^{\frac{p_1}{p_2}}\quad(s\in\Omega,\ |u|<\infty) \tag{1·3}$$

其中 $a(s)\in L^{p_2}(\Omega)$，$b=\text{const.}>0$，则 $F: L^{p_1}(\Omega)\to L^{p_2}(\Omega)$ 连续.

证明 设 $u=x(s)\in L^{p_1}(\Omega)$，则 $a(s)+b|x(s)|^{\frac{p_1}{p_2}}\in L^{p_2}(\Omega)$.
据(1·3)，$|f(s,x(s))|\leqslant a(s)+b|x(s)|^{\frac{p_1}{p_2}}$，故 $f(s,x(s))\in L^{p_2}(\Omega)$，即 $F: L^{p_1}(\Omega)\to L^{p_2}(\Omega)$.

设 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subset L^{p_1}(\Omega)$，$x_n\to x_0(n\to\infty)$，则 $x_n(s)$ 依测度收敛于 $x_0(s)$. 依引理 1·1，$f(s,x_n(s))$ 依测度收敛于 $f(s,x_0(s))$. 此时，$|f(s,x_n(s))-f(s,x_0(s))|^{p_2}$ 依测度收敛于 0.

若能证明 $|f(s,x_n(s))-f(s,x_0(s))|^{p_2}$ 的积分具有等度绝对连续性，则据 Vitali 定理(见参考文献[4])，有 $\int_\Omega|f(s,x_n(s))-f(s,x_0(s))|^{p_2}ds\to 0$，即 F 在 x_0 处连续. 首先注意到

$$\begin{aligned}&|f(s,x_n(s))-f(s,x_0(s))|^{p_2}\\ &\leqslant 2^{p_2}(|f(s,x_n(s))|^{p_2}+|f(s,x_0(s))|^{p_2})\\ &\leqslant 4^{p_2}(2|a(s)|^{p_2}+b^{p_2}|x_n(s)|^{p_1}+b^{p_2}|x_0(s)|^{p_1})\end{aligned}$$

$$|x_n(s)|^{p_1}\leqslant 2^{p_1}|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}+2^{p_1}|x_0(s)|^{p_1}$$

由以上两式知，只需证明 $|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}$ 的积分具有等度绝对连续性即可.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由 $\int_\Omega|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}ds\to 0$ 知，存在 N，当 $n>N$ 时，$\int_\Omega|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}ds<\varepsilon$. 此时，对于任一可测集 $A\subset\Omega$，$\int_A|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}ds<\varepsilon(n>N)$. 由 $|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}$ 的积分绝对连续性，对于上述的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对于任意可测集 $A\subset\Omega$，当 $m(A)<\delta$ 时，有 $\int_A|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}ds<\varepsilon$ $(n=1,\cdots,N)$. 故当 $m(A)<\delta$ 时，有 $\int_A|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}ds<\varepsilon(n=1,2,\cdots)$，即 $|x_n(s)-x_0(s)|^{p_1}$ 的积分具有等度绝对连续性.

证毕

定理中的条件(1·3)表示$f(s,u)$关于u的增长条件. 如果$p_1=p_2=2$,称为不超过线性增长条件. 它不仅保证了F把$L^{p_1}(\Omega)$映到$L^{p_2}(\Omega)$,而且也保证了F的连续性.

定理1·2 (Krasnoselskii M.A. 1951) 若F: $L^{p_1}(\Omega)\to L^{p_2}(\Omega)$连续,则$F$有界.

证明 不妨设$F(\theta)=\theta$, 否则, 考虑$f_1(s,u)=f(s,u)-f(s,0)$, 此时$f_1(s,u)$亦是Caratheodory映射且F_1: $L^{p_1}(\Omega)\to L^{p_2}(\Omega)$及$F_1(\theta)=\theta$.

因为F在原点连续,所以F在原点附近有界,即存在$r>0$,当$\|x(s)\|_{p_1}<r$时,$\|f(s,x(s))\|_{p_2}\leqslant 1$.

设$x\in L^{p_1}(\Omega)$,则存在$n_0(x)$: $n_0r^{p_1}\leqslant\|x(s)\|_{p_1}^{p_1}<(n_0+1)r^{p_1}$,即

$$n_0r^{p_1}\leqslant\int_\Omega|x(s)|^{p_1}ds<(n_0+1)r^{p_1}\tag{1·4}$$

由Lebesgue测度的连续性,可分割Ω: $\Omega=\bigcup\limits_{k=1}^{n_0+1}\Omega_k$, 使得$\Omega_k$两两不交且$\int_{\Omega_k}|x(s)|^{p_1}ds<r^{p_1}$ $(k=1,2,\cdots,n_0+1)$. 作

$$x_k(s)=\begin{cases}x(s), & s\in\Omega_k\\ 0, & s\in\Omega\setminus\Omega_k\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots,n_0+1)$$

有$\|x_k(s)\|_{p_1}<r$, 从而$\int_\Omega|f(s,x_k(s))|^{p_2}ds=\int_{\Omega_k}|f(s,x(s))|^{p_2}ds<1$. 故

$$\int_\Omega|f(s,x(s))|^{p_2}ds\leqslant\sum_{k=1}^{n_0+1}\int_{\Omega_k}|f(s,x(s))|^{p_2}ds<n_0+1\tag{1·5}$$

综合(1·4),(1·5)两式,有

$$\|Fx\|_{p_2}<(n_0+1)^{\frac{1}{p_2}}\leqslant(r^{-p_1}\|x(s)\|_{p_1}^{p_1}+1)^{\frac{1}{p_2}}$$

即 $F: L^{p_1}\to L^{p_2}$有界.

证毕

关于 Caratheodory 映射还有更好的结果：若 F: $L^{p_1}\to L^{p_2}$ $(p_1, p_2\geqslant 1)$，则有 $|f(s,u)|\leqslant a(s)+b|u|^{\frac{p_1}{p_2}}$，其中 $a(s)$、b 同定理 1·1. 另外，还可以去掉定理 1·1 关于 $m\Omega<\infty$ 的限制. 这里我们就不去证明这些结论了(详见参考文献[31]中第一章). 这样，根据定理1·1与定理1·2，我们就可以得出这样的结论：若$F: L^{p_1}(\Omega)\to L^{p_2}(\Omega)$，则 F 连续且有界.

前面例 2 说明作用在无穷维空间有界闭集上的非线性算子，它的连续性并不保证其有界性，其根源在于空间是"无穷维"的. 但是，对作用在无穷维空间的一些具体算子，连续性通常是苛刻的要求，它们常常只具有某些很弱的连续性. 因此有必要给出一些较弱的连续性概念. 今后我们用记号"$\rightharpoonup$"和"$\xrightarrow{*}$"分别表示点列的弱收敛和弱*收敛.

定义1·4 设 X、Y 皆为线性赋范空间，T: $\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$，$x_0\in\mathscr{D}(T)$.

(i) 称T在 x_0处次连续，是指对于任意点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{D}(T)$，当 $x_n\to x_0$时，有 $Tx_n\rightharpoonup Tx_0$;

(ii) 称T在 x_0处弱连续，是指对于任意点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{D}(T)$，当 $x_n\rightharpoonup x_0$时，有 $Tx_n\rightharpoonup Tx_0$;

(iii) 称T在 x_0处强连续，是指对于任意点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{D}(T)$，当 $x_n\rightharpoonup x_0$时，有 $Tx_n\to Tx_0$;

(iv) 假设Y是X的共轭空间X^*. 称T在 x_0处半连续，是指对于任意的 $h\in X$，当 $t_n>0(n\in\mathscr{N})$，$t_n\to 0$ 且 $x_0+t_nh\in\mathscr{D}(T)$时，就有 $T(x_0+t_nh)\xrightarrow{*} Tx_0$.

如果算子T在一集合的每一点都具有某种连续性，则说T在该集合上具有这种连续性.