高等学校教材

高等数学

（基础部分）

下　　册

西安交通大学高等数学教研室編

人　民　教　育　出　版　社

高等学校教材

高等数学

(基础部分)

下册

西安交通大学高等数学教研室编

人民教育出版社

本书是以西安交通大学高等数学教研室1959年編写的高等数学讲义为基础，根据1962年5月审訂的高等工业学校本科五年制各类专业适用的“高等数学（基础部分）教学大綱（試行草案）”改編而成的．

全书分上、下两册出版．下册內容为：空間解析几何（包括矢量代数初步）、多元函数微积分学、微分方程、无穷級数．

参加本书編写和定稿工作的有陆庆乐（主編）、赵孟养、邵济煦、馬知恩等同志．本书由侯希忠、王元吉同志初审后，又經高等工业学校高等数学課程教材編审委员会复审．

本书可作为高等工业学校“高等数学”課程的試用教科书．

高　等　数　学

（基础部分）

下　册

西安交通大学高等数学教研室編

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号K13010·1163　开本 850×1168 $^{1}/_{32}$　印张 $8^{13}/_{16}$

字数 245,000　印数 0,001—13,000　定价（5）半 0.85

1964年12月第1版　1964年12月北京第1次印刷

下册目录

第三篇　空間解析几何

第四篇 多元函数的微积分学

第五篇 微分方程

第六篇 无穷級数

第三篇　空間解析几何

第十三章　空間直角坐标

在第一篇中我們已經闡釋了怎样在平面內用代数的方法来解决几何問題，但这种方法的使用并不局限于平面．現在就让我們把它运用到空間．这样的推广不仅是自然的，而且是必要的，因为在三度空間也有許多几何問題需要我們去解决．

另一方面，在本书中，空間解析几何的主要用途在于給二元函数提供有用的几何解釋，正像平面解析几何跟一元函数的关系一样．这說明了为什么我們把这一篇插在一元函数微积分学与多元函数微积分学之間．

13-1　空間投影定理． 在平面解析几何中，我們已經定义并且討論了有向直綫、有向綫段及数軸（見 1-2 与 1-3 节）．但一条有向直綫可以坐落在空間的任何位置．所以在那里所得到的一切結果都依旧在空間解析几何中有效．

要把投影定理推广到空間，让我們先明确規定什么是空間任意两条有向直綫的夹角．两直綫如果相交，必在同一平面內；我們就把两有向直綫正向之間不大于π的正角作为两直綫的**夹角**．如果两直綫不相交，可取空間任意一点 A，并过 A 作两条有向直綫，分别跟已知直綫平行而且同向；我們就把这两条相交于 A 的直綫的夹角作为已知两直綫的夹角．

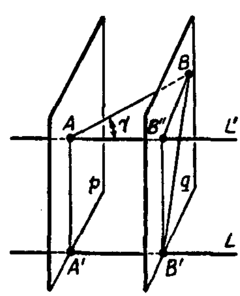

图　13.1

設在空間已給有向綫段 AB 及另一条有向直綫 L. 由 AB 的两端分别作 L 的垂直平面 p 与 q, 跟 L 相交于 A' 与 B' (图 13.1). 这样, 与有向綫段 $A'B'$ 相对应的实数称为 AB 在 L 上的**投影**.

在空間我們也有两条投影定理.

定理一　有向綫段 AB 在 L 上的投影是

$$\boxed{A'B' = AB\cos\gamma,} \tag{1}$$

其中 γ 是 AB 所在的有向直綫与 L 的夹角.

［证］　过 A 作与 L 平行且同向的有向直綫 L', 与平面 q 相交于 B'' (图 13.1). 于是 AB 与 AB'' 在同一平面內. 所以根据 1-4 节的定理一,

$$AB'' = AB\cos\gamma.$$

但 AB'' 与 $A'B'$ 是夹在平行平面 p 与 q 之間的两条同向的平行綫段, 因此相等, 即 $AB'' = A'B'$. 代入上式, 即得欲证的(1)式.

如果把有向折綫及其投影的定义 (1-4 节) 都推广到空間折綫 $AA_1A_2\cdots A_{n-1}B$, 我們立即有

定理二　空間有向折綫 $AA_1A_2\cdots A_{n-1}B$ 在 L 上的投影就等于有向綫段 AB 在 L 上的投影.

这定理的证明跟 1-4 节定理二完全一样, 并且我們也可以从这定理推知如果有向折綫是閉合的, 那末它在任何有向直綫上的投影等于零.

但在空間我們还可以考虑其他的投影关系. 設已給一个平面 K 及一条直綫 L. 如果 L 不跟 K 垂直, 过 L 可作 K 的垂直平面, 与 K 相交于另一条直綫 L'. 这样所得到的直綫 L' 称为 L 在 K 上的投影直綫. 如果 L 跟 K 垂直, 那末 L 在 K 上的投影就只是一点, 即 L 与 K 的交点. 如果 L 是有向的, 那末 L' 也有确定的方向.

13-2　空間直角坐标系. 为了把坐标法推广到空間, 让我們在空

間作三条互相垂直相交的数軸OX, OY及OZ,它們有相同的长度单位,而它們的交点O就是**坐标原点**(图13.2). OX叫做**横軸**或**x軸**,通常取自后至前的方向作为正向;OY叫做**纵軸**或**y軸**,通常取自左至右的方向作为正向;OZ叫做**竪軸**或**z軸**,通常取自下至上的方向作为正向. OX, OY与OZ統称为坐标軸. 三个坐标軸两两决定互相垂直的三个平面XOY, YOZ, ZOX,称为**坐标平面**,而这三个平面把空間分为八个部分,称为**卦限**. 各个卦限可以逐一編号,以資区别,特别是在XOY平面之上、YOZ平面之前、ZOX平面之右的卦限通常称为**第一卦限**.

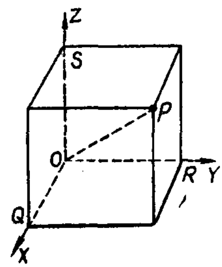

图 13.2

設P是空間的任意一点,让我們来考虑有向綫段OP(图13.2). 它在三軸上的投影,即分别与有向綫段OQ, OR及OS相对应的实数称为P点的**坐标**,分别記作x, y及z:

$$OQ=x,\quad OR=y,\quad OS=z,$$

并且合写在一个括号里,如(x, y, z). 第一个数x叫作P点的**横坐标**或**x坐标**;第二个数y叫作P点的**纵坐标**或**y坐标**;第三个数z叫作P点的**竪坐标**或**z坐标**. 所以对应于空間的每一点P,必有一組确定的坐标(x, y, z).

反之,已知一組实数x, y与z,我們可以在x軸上作$OQ=x$,在y軸上作$OR=y$,在z軸上作$OS=z$,然后通过Q, R与S分别作x軸,y軸与z軸的垂直平面. 这三个垂直平面的交点P便是具有坐标(x, y, z)的点(图13.2). 所以对应于一組实数(x, y, z),必有空間的一个确定点P.

这样,空間的点的集合就与一組三个有序的实数的集合构成一一对应的关系. 这就是使空間的点与实数相結合的一种坐标法,使用这种坐标法时所取定的三条互相垂直相交的数軸,构成一个**空間直角坐**

标系或空間直角笛卡儿坐标系.

如果在图 13.2 中把 x 軸与 y 軸对調，即令 x 軸的正向朝右，y 軸的正向朝前，那末我們将得到另一种空間直角坐标系 (图 13.3). 我們把图 13.2 的坐标系称为**右手系**，因为如果我們用右手的拇指表示 x 軸的正向，食指表示 y 軸的正向，那末中指就是 z 軸的正向了(图 13.4). 同样，图 13.3 的坐标系須用左手来表示，因而称为**左手系**. 在本书中始終采用右手系.

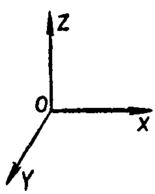

图　13.3

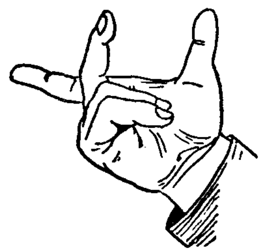

图　13.4

13-3　空間的距离及分点公式. 正像在平面内一样，我們現在就可以利用空間直角坐标来計算空間两点 $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之間的距离 s 以及把綫段 P_1P_2 分成定比的分点.

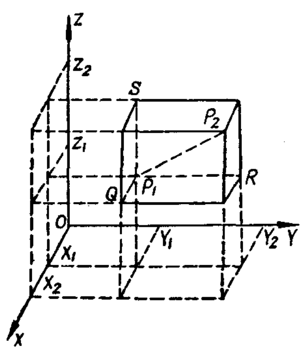

图　13.5

两点間的距离　以綫段 P_1P_2 为对角綫，作长方体，这长方体的六个面两两平行于坐标面. 由图 13.5 可知

$$(P_1P_2)^2=(P_1Q)^2+(P_1R)^2+(P_1S)^2,$$

但根据 1-3 节公式 (5)，我們有 $P_1Q==X_1X_2=x_2-x_1$, $\quad P_1R=Y_1Y_2=y_2-y_1$, $P_1S=Z_1Z_2=z_2-z_1$. 所以

$$\boxed{s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.} \tag{2}$$

定比分点　設在連接 P_1 与 P_2 两点的直綫上另有一点 $P(x, y, z)$，使得有向綫段 P_1P 与 PP_2 所对应的实数之比为 λ，但 $\lambda \neq -1$①：

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda.$$

把直綫 P_1P_2 投影到坐标平面 XOY 及 ZOX（图 13.6），那末

$$P_1'P'=\lambda P'P_2' \text{ 及 } P_1''P''=\lambda P''P_2''.$$

在 XOY 平面內，P_1'，P_2'，P' 的坐标依次为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x, y)，所以根据平面內綫段的定比分点公式，得

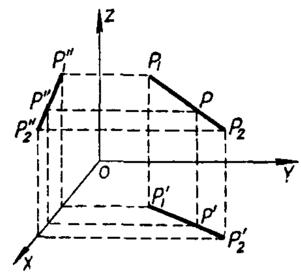

图　13.6

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.} \tag{3_1}$$

同理，在 ZOX 平面內考虑，得

$$\boxed{z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.} \tag{3_2}$$

特别是当 P 是 P_1P_2 的中点时，我們有

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.} \tag{4}$$

13-4　方向余弦与方向数. 設已給一条空間有向直綫 L. 让我們来闡釋确定 L 方向的方法. 我們知道，L 与三条坐标軸 OX, OY, OZ 之間有确定的夹角，設依次为 α, β, γ；那末这三个角便称为 L 的**方向角**，它們的余弦，即 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$，称为 L 的**方向余弦**.

根据关于两条有向直綫夹角的規定，α, β, γ 的值限在 0 与 π 之間. 因此，如果知道了 L 的方向余弦，它的方向角也就被唯一地确定. 所以

① 詳見解析几何簡明教程，叶菲莫夫著，胥长辰譯，32 頁．人民教育出版社出版.

我們完全可以用方向余弦来确定 L 的方向.

从方向余弦的定义可知，如果把一条有向直綫的方向反过来，那末方向余弦都要改变正負号.

例. 設在 ZOX 平面內，有与 z 軸成 30° 角的有向直綫，求它的方向余弦.

[解] 这样的有向直綫有 L_1 及 L_2 两条(图 13.7)，它們的方向角分別是

$$\alpha_1=60^\circ,\ \beta_1=90^\circ,\ \gamma_1=30^\circ;$$

$$\alpha_2=120^\circ,\ \beta_2=90^\circ,\ \gamma_2=30^\circ.$$

所以 L_1 的方向余弦是

$$\frac{1}{2},\quad 0,\quad \frac{\sqrt{3}}{2};$$

L_2 的是

$$-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

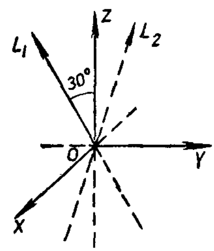

图 13.7

从上面的例子，发現有向直綫 L_1 或 L_2 的方向余弦的平方和都等于1. 在一般情形也有

定理一 一条有向直綫的方向余弦的平方和总等于1:

$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.}$$

[证] 設有向直綫 L 的方向角为 α, β, γ. 过 O 作 OP 与 L 平行且同向. 于是 OP 的方向角也是 α, β, γ(图 13.8). 令 $OP=\rho$，根据投影定理一(13-1 节)，即得

$$x=\rho\cos\alpha,\quad y=\rho\cos\beta,\quad z=\rho\cos\gamma,$$

或 $$\cos\alpha=\frac{x}{\rho},\quad \cos\beta=\frac{y}{\rho},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\rho}.$$

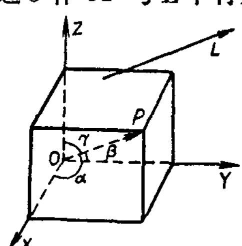

图 13.8

因此，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{x^2+y^2+z^2}{\rho^2}.$$

但 $\rho^2=x^2+y^2+z^2$. 于是定理得证.

定理二 連接两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的有向綫段 P_1P_2 有方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{s},\quad \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{s},\quad \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{s},\tag{5}$$

其中 $s=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

［证］ 由图 13.5, 根据投影定理得

$$X_1X_2=|P_1P_2|\cos\alpha,\quad Y_1Y_2=|P_1P_2|\cos\beta,$$
$$Z_1Z_2=|P_1P_2|\cos\gamma.$$

但
$$X_1X_2=x_2-x_1,\quad Y_1Y_2=y_2-y_1,\quad Z_1Z_2=z_2-z_1;$$
$$|P_1P_2|=s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

所以

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{s},\quad \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{s},\quad \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{s}.$$

例. 設有向綫段 P_1P_2 的长度为 2, 它与 x 軸与 y 軸的夹角依次为 60° 与 45°. 如果 P_1 的坐标是 $(1,0,3)$, 求 P_2 的坐标.

［解］ 首先, 让我們来定出 P_1P_2 的方向. 設 P_1P_2 的方向角为 α,β,γ. 于是 $\alpha=60^\circ,\beta=45^\circ$. 根据定理一,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1,$$

从而有 $\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$, 即 $\gamma=60^\circ$ 或 120°. 所以这样的有向綫段有两条.

設 P_2 的坐标为 (x,y,z), 那末根据定理二, 有

$$\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2},\quad \frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{y-0}{2},\quad \frac{1}{2}=\frac{z-3}{2}$$

或
$$\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2},\quad \frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{y-0}{2},\quad -\frac{1}{2}=\frac{z-3}{2}.$$

所以 P_2 的坐标为$(2,\sqrt{2},4)$或$(2,\sqrt{2},2)$.

与某一条有向直綫的方向余弦成比例的三个数称为这直綫的**方向向数**.

如果 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是某一条有向直綫的方向余弦，那末 $A=k\cos\alpha$, $B=k\cos\beta$, $C=k\cos\gamma$, 其中 $k\neq 0$, 就是这一条直綫的方向数.

反之，已知一条直綫的方向数，就可以求出方向余弦. 事实上，

$$A^2+B^2+C^2=k^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=k^2,$$

即

$$k=\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

于是得

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

这里的正負号就表示直綫的正向尙未确定.

从以上的討論可知，由方向余弦可以完全确定有向直綫的方向；而由方向数只能規定有向直綫的方位，而不能确定它的方向.

第十四章　矢量代数初步

我們已經知道坐标法是解析几何的基础，而坐标法的成功則有賴于有向綫段(1-2节)．有向綫段的重要性由此可見，但这是从解析几何的理論本身来說．更重要的是有向綫段还可以用来表示旣有大小又有方向的量，这种量就是在自然科学中，特别是物理学中，所常用的矢量[①]．所以在这一章中我們要专門闡释矢量概念及其各种运算法則，而且在下一章中就可以看到矢量的应用大大地便利了某些空間解析几何問題的解决．

14-1　矢量概念． 在中学物理里我們已經知道物理量有两种：一种是只具有大小的量，叫做**标量**，如时間、溫度、功、能等等；一种是不仅具有大小而且还有方向的量，叫做**矢量**，如速度、加速度、力、电場强度等等．在中学物理里我們也已經知道一切矢量都可以用带箭头的一定长短的綫段来表示．这样的綫段正就是我們在以前所說的有向綫段．

因为在許多几何学与物理学的問題中所遇見的矢量常常与起点无关，所以我們把方向相同而长度相等的矢量都看作是相等的．这也就是說，我們可以把一个矢量的起点放在空間的任意一点．如果一个矢量的起点与終点分别記作 A 与 B，那末这一个矢量便記作 $\overrightarrow{AB}$（就是在表示綫段的字母上再加一个箭号）．但往往为簡便起見，只用一个字母，加上箭号，如 $\vec{a}$，而在书本中則通常都用粗体字母而省去箭号，如 $\boldsymbol{a}$．

矢量的长度称为矢量的**模**或**絕对値**，記作 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$．模等于 1 的矢量称为**单位矢量**．模等于零的矢量称为**零矢量**，記作 $\vec{0}$ 或 $\boldsymbol{0}$．零矢

---

① 矢量又称为向量．

量的方向不定.

14-2 矢量的加减法. 在中学物理里讲力学的时候，我們已經知道有所謂力的平行四边形法則. 設 $\boldsymbol{P}_1$ 与 $\boldsymbol{P}_2$ 是作用于一物体而互成角度的两个力，那末它們的合力$\boldsymbol{R}$就是以 $\boldsymbol{P}_1$ 与 $\boldsymbol{P}_2$ 为邻边所作出的平行四边形的对角綫矢量 (图 14.1). 根据平行四边形的性质，我們也可以这样作出$\boldsymbol{R}$: 把$\boldsymbol{P}_2$的起点移至$\boldsymbol{P}_1$的終点，于是由$\boldsymbol{P}_1$的起点到$\boldsymbol{P}_2$的終点的矢量便是$\boldsymbol{R}$(图 14.2).

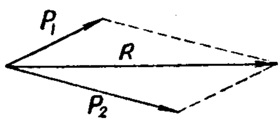

图 14.1

图 14.2

就在这个基础上产生了所謂**矢量的加法**.

定义 两个矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，記作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，就是，当$\boldsymbol{b}$的起点已移至$\boldsymbol{a}$的終点时，由$\boldsymbol{a}$的起点到$\boldsymbol{b}$的終点的矢量.

根据这个定义，可知矢量的加法满足交换律与結合律 (見图 14.3, 14.4)①:

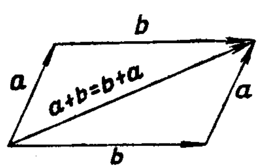

图 14.3

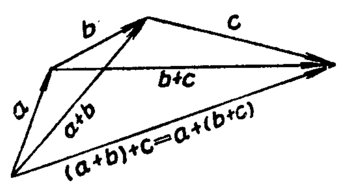

图 14.4

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}. \tag{2}$$

定义 两个矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差，記作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，就是另一个与$\boldsymbol{b}$相加后就变为$\boldsymbol{a}$的矢量. 如果把$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的起点放在一起，那末$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$就是由$\boldsymbol{b}$

① 注意在图 14.4 中，a, b, c 三个矢量不一定在同一个平面內.