四维画法几何学

[美] C. E. S. 林德格伦
S. M. 斯拉比 著
谢申鑑 译
周积义 校

清华大学出版社

四维画法几何学

C.E.S. 林德格伦
S.M. 斯拉比 著

谢申鑑 译
周积义 校

清华大学出版社

1981

四维画法几何学

C.E.S. 林德格伦
S.M. 斯拉比 著
谢申鉴 译
周积义 校

☆

清 华 大 学 出 版 社 出 版
（北京 海淀 清华园）
武汉地院北京研究生部印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

☆

开本：787×1092 1/32 印张：5 1/4 字数：122 千字
1981年12月第1版 1981年12月第一次印刷
印数 1—20000 册

统一书号：15235·30 定价：0.70元

译 者 的 话

林德格伦和斯拉比合著的《四维画法几何学》（C.Ernesto S.Lindgren, Steve M. Slaby. "Four—dimensional Descriptive Geometry". McGraw—Hill. Inc. 1968）是他们多年来在这方面的研究成果的反映。本书全面地、系统地叙述了四维空间的基本概念和四维空间里的各种几何元素的图示、图解方法，为读者在画法几何学方面打开了一个新的领域。

四维画法几何的方法可以被广泛地应用在各种科学、技术领域，例如：金属学中四元合金系统的表示，物理化学及地质学中晶体结构的表示，近代物理中相对论的描述，流线型曲面的图解设计，数学中多重积分、复变函数及线性规划的图解解决等等。

本书可作为高等工业院校及中等技术学校中画法几何及工程制图教师的参考书；也可供上述与多维几何有连系的科学工作者、工程师、技术员和大学生的参考。

目　　录

说　　明

这本专著中的大部分成果必须归功于林德格伦先生。他对几何的热情和信任，以及几何在科学和技术中占有的重要位置是非常鼓舞人心的。

斯蒂夫·M·斯拉比

工程图学专题丛书编委

协调编辑的序言

这本专著是目前由 McGraw—Hill 图书公司出版的工程图学专题丛书中的一本。这套丛书是在1961～1964年期间由国家科学基金资助的工程图学课程内容发展研究的一个结果。

工程图学研究的任务，可以概括如下：

1. 批判地估价图学在工程技术教育中的目的和任务。

2. 探讨和发展课程的内容，丰富教育经验—— 对于所有工科学生。

3. 估价图学作为全部工科课程的重要组成部分的作用。

4. 准备增进知识的资料。这些资料可以作为原始材料供工程教育工作者使用，从中选择有益的材料来建立和加强他们的课程。

这套专题丛书反映了工程图学研究任务中所指出的第二条和第四条的研究结果。

工程图学课程内容的发展研究是由底特律大学的林哈特(Pavl M.Reinhard)教授设想出来并在他的指导下进行的，这个研究也是在我国的一些杰出的教育工作者和专业工程师组成的指导委员会的一般性指导下进行的。

这套丛书中的这本专著的目的是想用这个领域里的新概

念和应用来丰富图学教育，为工科学生和教育工作者所乐意采用。

斯蒂夫·M·斯拉比
协调编辑
普林斯顿大学
工程和应用科学学院

图学和工程制图系
主席（1960～65）

引　言

听到林德格伦（Ernesto Lindgren）和斯拉比（Slaby）教授在普林斯顿的研究已经有几年了，我感到很荣幸被邀请为他们的四维画法几何书写一个引言，他们在仅仅几年内以相当大的热情完成了这个课题。我满怀热情、偷快地读完这本书，发现作者们的四维空间图示才能远远超过我自己。我反复地赞同各种结论，并且似乎总是想用不同的手段来得到它们。如果只有我能够找到它，那末“阿丽斯漫游奇境记”里的一些奇妙的通路，将很可能使我的受损伤的自尊心得到安慰。

实际上，我的确曾从一位相当突出的、为后世所公认的智者（名字不详）的话里找到了庇护所，“没有通向几何学的皇家大道”。在这一点上，这句话确实是一个安慰。在没有任何通向四维几何的皇家大道的情况下，我想作者们和我自己利用我们各自的才能去到达不同的高地，对我们每个人研究这种空间都是有益的。我希望循着他们的路径通过这个高地，但是在这样做时，我必须要研究。也许他们愿意试试我的路径，为的是两条路也许可以筑在一个地方。如果分开的话，总有一天可以合并成一条满意的路。实际上，对于许多困难课题的研究，这是一个好方法——通过不同道路的试验，达到共同的结果。

对于四维几何，我将根据我自己所特有的思维过程和经

验，提出一些特殊的方法。读者可以遵循这些方法或自己拟定一个类似的。我相信作者们是希望激发这种思想的，因为它无疑地会使读者的智力更敏锐，并最终帮助他获得作者那样的技能❶。

1. 不能把对四维空间性质的研究与对四维画法几何学科的研究混淆起来。作者们发现前者是推动后者的一个基本要素，可见后者看来是前者的一个较小的附属物。很难设想出一个比由第四维所提供的新的几何领域更好的或更有趣的研究。对于大学生们，它是一个不切实际的困难任务；而对于教师们，则是一个专业人员不可推卸的责任。

2. 对于任一个三维画法几何的行家，懂得一点四维画法几何是值得的。很明显，最近几年对一年级大学生的训练更加完善，提出了一个比过去画法几何所提出的更大的课题。在第二次世界大战期间，许多大学的课程开始包括解析几何的论述，加强这两个学科之间的转换，例如：直线或平面的相交，通过从画法几何到解析几何的道路，可以很容易作出，反之亦然。后来，计算机程序设计技术被引入画法几何学科中，现在已经很普通了。总之，对于古老的、传统的题目的较广阔的论述，在今天是合乎需要的。

3. 总结推广一个学科的能力是对它的掌握的一个标志，无法用原来一套材料去推广命题，意味着有些东西还没有完全掌握。从三维进到四维，显然是画法几何学家的一个专业成就。

4. 除了从三维推广到四维的能力以外，还要能毫不含

❶ 注意作者的和我自己的大量叙述将是有趣的，这些叙述在内容上是相同的，但是次序和上，下文经常是很不相同的。在14页上提到了四条共点的垂线。见这个引言中14页的讨论。

糊地掌握含有四个变量的各种问题的意义。许多物理的、经济的和其它一些情况的表达与它们的维无关；但是经常遍布的这些变量是空间的维的属性和可能的解释者。通过这类问题，埃内斯托·林德格伦的这些方法首先引起了我的注意，因为它们对一些问题提供了空间解释的可能性，这些问题的这些性质过去在我面前没有被揭示过。

5. 线性方程：考虑从三维的一些几何性质和问题，进到四维的那些几何性质和问题的另一个途径是通过线性方程，即通过从 $Ax+By+Cz+D=0$ 到 $Ax+By+Cz+Du+E=0$ 的方式，或到更高阶的线性方程。为此，当在三维里对读者有用的工具在四维里适当地再出现时，很可能被证明是有用的。供学生自己探讨更高维的工具、器械、方法、手段等等，可以包括维数、自由度、线性方程、线性组合、方向分量、方向余弦、垂直性、点、直线、平面、空间、投射元素、轴线、坐标平面、对称性、二重性和其它。但是，不是所有这些元素都能一起用。简单地说，熟悉它们在三维里的使用，可以直接引伸到四维或更高维。这些工具在使用前最好先准备好。

值得一提的是自由度，例如，对于处理不同的维数，它不一定是不适合的。每个人可以直观地说出有用的东西的自由度的数目：

（1）为了确定点在0维空间、一维空间、二维空间、三维空间或四维空间的位置，总是分别用零、一、二、三或四个自由度表示。

（2）在二维空间、三维空间或四维空间里确定一任意元素，如一点、一直线或一平面，必须有两个、三个或四个变量明显地或不明显地出现在它的方程里。

（3）在确定元素的方程中，在所有变量的值被知道以前，可以自由确定的变量的数目，与在那个空间里的那个元素的变量的自由度数目相同。

（4）一点在一空间里运动的自由度数目等于这个空间的维数。

一直线存在于二维、三维或四维空间里，将有下列关系：

$$L_1^2:\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{1}$$

$$L_2^3:\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{2}$$

$$L_3^4:\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=\frac{u-u_1}{u_2-u_1} \tag{3}$$

此处符号L表示线性关系，脚标表示确定这个元素所需要的方程数目，上标表示出现的变量数目。

在（1）、（2）或（3）中，一个变量的特性确定其它变量的值；因此，在任意空间里，对于直线内的运动，只有一个自由度。

（5）二维空间里的直线的方程也可以写成

$$Ax+By+C=0 \tag{4}$$

三维空间里的平面的方程可以写成

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{5}$$

（分别保持一个和两个运动自由度，如此等等）。

这样，线性方程突然地并十分自然地成为讨论空间里的

各元素的工具。我们可以立即写出下列方程：

在一维空间里的一个点（0维空间）是：

$$Ax + B = 0 \tag{6}$$

在二维空间里的一直线（一维空间）是：

$$Ax + By + C = 0 \tag{7}$$

在三维空间里的一平面（二维空间）是：

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{8}$$

在四维空间里的一空间（三维空间）是：

$$Ax + By + Cz + Du + E = 0 \tag{9}$$

这些方程的基本结构是引人入胜地简单。

这种简单表现得很显著，甚至在稍为复杂的形式中也是有用的。确定二维空间的一点，作为两直线的交点，它的方程是熟知的：

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \tag{10}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{11}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \equiv \{ A_1B_1 — A_2B_1 \} \equiv \triangle \neq 0 \text{[1]} \tag{11a}$$

三维空间里的直线，作为两个平面的交线，它的方程是：

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{12}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{13}$$

作为这种研究的工具，线性方程显示出简单和直接。其次，点、直线、平面和空间在它们各自的空间里被概括为：

---

[1] 在这里我们说明一例外，$\triangle = 0$ 是存在的。我们没有地方介绍或讨论这个对于一般情况普遍存在的例外。

在二维空间	在三维空间	在四维空间	
一点由下式确定：			
$\{\triangle \neq 0\}$ 等等。			
$A_1x+B_1y+C_1=0$	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1u+E_1=0$	
$A_2x+B_2y+C_2=0$	$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	$A_2x+B_2y+C_2z+D_2u+E_2=0$	
	$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$	$A_3x+B_3y+C_3z+D_3u+E_3=0$	
		$A_4x+B_4y+C_4z+D_4u+E_4=0$	
$L_2^2=0$	$L_3^3=0$	$L_4^4=0$	(14)
一直线由下式确定：			
$L_1^2=0$	$L_2^3=0$	$L_3^4=0$	(15)
一平面由下式确定：			
	$L_1^3=0$	$L_2^4=0$	(16)
一空间由下式确定：			
		$L_1^4=0$	(17)

方程 (1)、(2)、(3) 和 (15) 之间没有区别。注意(14)和(16)表示：在四维空间里两个平面一般相交于一点，而不是一直线。只有当这两个平面被限定在同一空间，如象我们经历过的三维空间，它们才可能相交于一直线。

这个方法对更高维空间的一大优点是通过线性方程可以推广到四维或所希望的更高维。试验的结果是一目了然的。数量的答案是垂手可得的，并且可以被直接拟定。

作者设计的一些略图，例如图 5、11、25、37 等等，对于那些能够作出并利用它们的人和对于能在三维里作出它们的读者一样，具有同样的价值。

也许使初学者感到最新奇的是当线性方程(17)表示一个空间时（我本人必须用线性方程来研究，因为我还不能够直接地想象出这个空间）；还有(16)，在四维空间里，平面被看作是两个空间的相交面。三维空间里的两条共点直线必须位于（公共的）三维空间的同一平面（二维空间）内；因此，在四维空间里相交于一直线的两个平面，必须位于（公共的）四维空间内的同一三维空间里。通过察看这些方程，例如，(12)、(13)和(16)，看看它们是否能提供明确答案，这些论点可以得到证实。许多其它性质，特别是那些在三维空间和四维空间里的投射平面的性质，留给读者去研究。

6. 垂直：这可以称为线性方程的附属物。两个方向之间的关系是不变的，与空间的维数无关，但需要我们定义方向。

在二维空间里，一直线有两个方向分量 A、B。对于此直线上的两个点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，我们有

$$A = x_1 - x_2, \quad B = y_1 - y_2 \tag{18}$$

和两个方向余弦

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{19}$$

由此得 $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 \tag{20}$$

在三维空间里，作为直线的方向分量，我们有

$$A = x_1 - x_2, \quad B = y_1 - y_2, \quad C = z_1 - z_2 \tag{21}$$

和方向余弦

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{22}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{23}$$

在四维空间里，可在形式上类似地引伸，因此

$$\begin{aligned} &A = x_1 - x_2, \quad B = y_1 - y_2, \\ &C = z_1 - z_2, \quad D = u_1 - u_2 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}},$$

$$\cos\delta = \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}} \tag{25}$$