'99考研 系列丛书

1999年
研究生入学考试

主编　王学理（东北大学）　富景隆（哈尔滨工业大学）

数学
应试指南

NEUPRESS
东北大学出版社

1999年研究生入学考试数学应试指南

主　编　王学理　富景隆
副主编　刘玉柱　李建华　沙秋夫

东北大学出版社

序　　言

以全国硕士研究生入学考试数学考试大纲为依据，我们为准备报考研究生的朋友们编写了这本“应试指南”。其目的是帮助读者在较短的时间内将浩如烟海的数学问题进行条分缕析，将所学知识融会贯通，力争考试胸有成竹，有望金榜题名。

全书共四篇。依次为高等数学、线性代数、概率论与数理统计、模拟试卷。前三篇共含二十六讲，每讲包含内容提要、客观题、主观题、综合题、复习题、答案等六个部分。第四篇为模拟试题，由多年参加全国考研命题的富景隆教授编写，此篇的八套试题颇具针对性，很有实用价值。四篇编者依次为王学理和沙秋夫、李建华、刘玉柱、富景隆。该书由王学理、富景隆担任主编。

为真正能对应试者起到指导作用，每讲都将所涉猎内容分成若干类，每一类型都选择典型例题，介绍一些方便快捷的解题方法。这些方法大都是编者在长期教学中呕心沥血之所得，作起题来往往简明速效。读者阅后会有清心明快、柳暗花明之感。建议读者能独立完成书中所给习题，若能真正通读本书，相信入学考试之数学成绩一定会令您满意。

本书的读者对象是准备参加全国硕士研究生入学考试的青年朋友。本书亦可作为在校本科生之数学学习辅导书，对于从事高校数学教学工作的同仁也是一本较好的教学参考书。

由于编者水平所限与时间仓促，疏漏与不妥之处在所难免，希望得到读者与同仁的批评与帮助。

编　者

1998 年 2 月 18 日

目　　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第一讲　一元函数的极限

极限概念的建立给高等数学的学习奠定了第一块基石.其基本思想将贯穿于整个高等数学的理论体系.

考试的内容包括数列极限与函数极限的定义及性质,函数的左、右极限,无穷小与无穷大,无穷小的比较,极限四则运算,两个极限存在准则和两个重要极限,洛比达法则.

考试要求理解极限的概念,理解函数左、右极限概念以及极限存在与左、右极限之间的关系;掌握极限的性质及四则运算法则;掌握极限存在的两个准则并会用它们求极限;掌握利用两个重要极限求极限的方法;理解无穷小与无穷大及无穷小阶的概念,会用等价无穷小替换求极限;掌握用洛比达法则求未定式极限的方法.

一、内容提要

(一)　主要定义

1　$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,使得当 $n > N$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$,则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限(也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a),记成 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

极限不存在时,说 $\{x_n\}$ 发散.

2　$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x \to x_0$ 时的极限,记成 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

注　在此定义中,$0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 - \delta < x < x_0$,A 称为 $f(x)$ 的当 $x \to x_0 - 0$ 时的左极限,记成

$\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = A$,或 $f(x_0 - 0) = A$,类似可以定义右极限 $f(x_0 + 0)$.

3　$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$,当 $|x| > X$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,则称 A 为 $f(x)$ 的当 $x \to \infty$ 时的极限,记成 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

读者可以自己给出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 的定义.

4　$\forall M > 0, \exists \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有 $|f(x)| > M$,则称 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷大量,记成 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.无穷大量简称为无穷大.

读者可以自己给出 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 等的定义.

注　当 $x \to x_0$ 和 $x \to \infty$ 时结论都成立时,以后简记成lim.以0为极限的量称为无穷小量.无穷小量简称为无穷小.

5　若 $\lim\alpha(x) = \lim\beta(x) = 0$,且 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$,则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小,记成 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$,称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小;若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C(C \neq 0)$,则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小,记成 $\alpha(x) = O(\beta(x))$,当 $C = 1$ 时,称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷小,记成 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

(二)　主要定理与公式

1　若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,则有

$\lim[f(x)+g(x)]=A+B,\lim[f(x)g(x)]=AB$

$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

2　极限存在准则

Ⅰ　单调有界数列必有极限.

Ⅱ　若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

（准则 Ⅱ 亦称夹逼准则，对于函数也成立）

3　在同一过程中的有界变量与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小的和是无穷小.

注(1) 等价无穷小具有传递性：设 α、β，γ 为同一过程的无穷小，若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$；

(2) 等价无穷小在求极限过程中可以进行如下替换：在同一极限过程中，若 $\alpha\sim\tilde{\alpha},\beta\sim\tilde{\beta}$，且 $\lim\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$ 存在，则$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$.

4　$\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，此处$\lim\alpha(x)=0$.

5　洛比达(L'Hospital)法则　$\lim f(x)=\lim g(x)=0$(或 ∞)，$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞，则　$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

6　两个重要极限　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

7　若在 $U(\hat{x},\delta)$ 内 $f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0(A\leqslant 0)$.

8　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0(A<0)$，则必有 $U(\hat{x},\delta)$ 使在此邻域中 $f(x)>0(f(x)<0)$.

注　若 $A=f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续，此时结论亦真.

9　若极限存在，则其值必然唯一.

10　任何有界数列都有收敛的子数列.

（三）　结论补充

1　若$\lim\varphi(x)=0$，　则　$\lim\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

2　若$\lim\varphi(x)=\infty$，　则　$\lim\left[1+\frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=e$.

3　若$\lim\varphi(x)=0$，　则　$\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$.

注　以上三条中的 $\varphi(x)$ 不等于 0.

4　$a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

5　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

6　当 $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x\sim\operatorname{tg}x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg}x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)\sim\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$，$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$，$a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1)$.

注　由 $x\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$ 立刻得到　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}$.

7　若$\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=\lim A(x)=\lim B(x)=0$. 且 $\alpha(x)\sim A(x),\beta(x)\sim B(x)$，则有$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{A(x)}{B(x)}$ 和$\lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}}=\lim[1+A(x)]^{\frac{1}{B(x)}}=e^{\lim\frac{A(x)}{B(x)}}$.

注　分母 $\beta(x)$，$B(x)$ 不能取 0.

8　不为零的无穷小的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小.

9　$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n>m\\ \infty, & n<m\end{cases}$$

10　$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}$$

11　　皮亚诺(Peano)代换法

在求极限过程中，可视情况将某些函数用它的马克劳林展开式来代替，主要有：

(1)　$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$.

(2)　$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$.

(3)　$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$.

(4)　$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})$.

(5)　$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

12　设 $\lim\varphi(x)=1$，$\lim\psi(x)=0$，$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 可导，且 $\lim\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\psi'(x)}$ 存在，则

$$\lim\varphi(x)^{\frac{1}{\psi(x)}}=\exp\lim\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)\psi'(x)}.$$

13　设 $\lim\alpha=\lim\beta=0$，且 $\alpha-\beta\neq 0$，则

$$\ln(1+\alpha)-\ln(1+\beta)\sim 2(\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{1+\beta})\sim\alpha-\beta$$

14　设 $\alpha,\tilde{\alpha},\beta,\tilde{\beta}$ 均为 $x\to x_0$ 的无穷小，且 $\alpha\sim\tilde{\alpha}$，$\beta\sim\tilde{\beta}$，又 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=C(C\neq-1)$，则 $\alpha+\beta\sim\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}$.

15　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left[a+\frac{k}{n}(b-a)\right]\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

二、客观题

（一）　填空题

【例 1】　$\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x-2)-\ln(x+1)]=$〔　　　　〕.

【解】　应填 -3. 因为

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^x=\ln\exp\left(\frac{-2-1}{1}\right)\cdot 1=-3$.

【例 2】　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^p}=\frac{1}{2}$，则 $p=$〔　　　　〕

【解】　应填 3. 因为　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^p}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^p}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(\cos x)x^{p-1}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^{p-1}}.$$

故　$p-1=2$，因此 $p=3$.

【例 3】 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-x\sin\frac{1}{x}\right)=$〔　　　〕.

【解】 应填$\frac{1}{6}$. 因为可令$\frac{1}{x}=t$. 则

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{6}t^3}{t^3}=\frac{1}{6}.$$

【例 4】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}\mathrm{d}t=$〔　　　〕.

【解】 应填$\frac{1}{2}$. 因为应用洛比达法则

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2}\mathrm{d}t}{xe^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x^2)e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

【例 5】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$〔　　　〕.

【解】 应填 2. 有理化，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=2$.

练　　习　1-1

1 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{x^2\int_{\frac{\pi}{6}}^x\sin t\mathrm{d}t}{x-\frac{\pi}{6}}=$〔　　　〕.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}=$〔　　　〕.

3 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2^x}{\ln(1+2x)}-\dfrac{1}{\ln(1+2x)}\right]=$〔　　　〕.

4 $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=$〔　　　〕.

5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}=$〔　　　〕.

6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{\sin^2x}=$〔　　　〕.

7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\mathrm{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)=$〔　　　〕.

8 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\mathrm{ctg}x=$〔　　　〕.

9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x-x}{2x+\cos x}=$〔　　　〕.

10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{1-2^{\frac{1}{\mathrm{tg}x}}}=$〔　　　〕.

（二） 选择题

【例 1】 下列各式不正确的是〔　　　〕.

(A) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$;　　(B) $\lim\limits_{x\to 0-}e^{\frac{1}{x}}=0$;

(C) $\lim\limits_{x\to 0+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$;　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$.

【解】 应选择 A. 因为 B. C 都是正确的，故$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$不存在.

【例 2】 下列各式正确的是〔　　　〕.

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;　　(B) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$;

(C) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e$.

【解】 应选择 C. 因为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}=e^0=1$. 令 x

$=\frac{1}{t}$，立刻可得$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=1$是显然的.

【例 3】 设$0<a<b$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=$〔 〕.

(A) a； (B) b； (C) 1； (D) $a+b$.

【解】 应选择 B. 因为$\sqrt[n]{a^n+b^n}=b\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$，故原极限值为$b$.

【例 4】 求下列极限时，能使用洛比达法则的是〔 〕.

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$； (B) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$； (D) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x\right)$.

【解】 应选择 D. 因为此极限为$\infty\cdot 0$型，又

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1.$$

(C) 不存在，注意$x\to\infty$包含$x\to+\infty$和$x\to-\infty$两种情形. (A)、(B) 不满足洛比达法则的条件.

【例 5】 当$x\to 0$时，变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是〔 〕.

(A) 无穷小； (B) 有界的，但非无穷小；

(C) 无界的，但非无穷大； (D) 无穷大.

【解】 应选择C. 当$x\to 0$时，$\frac{1}{x^2}$是无穷大量，而$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$. 有界变量与无穷大的乘积并不一定是无穷大. 实际上，$\sin\frac{1}{x}$当$x=\frac{1}{2k\pi}(k=1,2,\cdots)$时，其值为0；当$x=\dfrac{1}{2k\pi+\frac{1}{2}\pi}(k=0,1,2,\cdots)$时，其值为1. 故当$x\to 0$时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$既不是无穷小量，又不是无穷大量，也不是有界变量. 它是无界的.

练 习 1-2

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$的值是〔 〕.

(A) 1； (B) ∞； (C) 0； (D) 不存在.

2 无穷大量与有界量的关系是〔 〕.

(A) 无穷大量可能是有界量； (B) 无穷大量一定不是有界量；

(C) 有界量可能是无穷大量； (D) 不是有界量就一定是无穷大量.

3 下面运算正确的是〔 〕.

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1\cdot 0=0$；

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\cos x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos x}{\sin x}$不存在，故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{\cos x}$不存在；

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\dfrac{1}{x}}{\cos x}=1$;

(D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1\cdot 1=1$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=$〔　　〕.

(A) 0;　　(B) 1;　　(C) 不存在;　　(D) ∞.

5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x}=$〔　　〕.

(A) 1;　　(B) -1;　　(C) 0;　　(D) 不存在.

三、主观题

(一) 利用代数方法求极限

【例 1】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+3k+1}{(k+2)!}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2+3k+2-1}{(k^2+3k+2)k!}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+2)!}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right]=\frac{3}{2}.$$

【例 2】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)}{(n+1)+2(n+2)+\cdots+n(n+n)}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)}{n(1+2+3+\cdots+n)+(1+2^2+3^2+\cdots+n^2)}$.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\Big/\left(1-\dfrac{1}{2}\right)}{n\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\frac{2}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}=\frac{12}{5}.$$

【例 3】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]$,　$(|x|<1)$.

【解】 此题应设法变形,否则很难计算.可以乘以因子$\dfrac{1-x}{1-x}$.

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

【例 4】 设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2n}}\right)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 可以从例 2 和例 3 的解法中得到启发:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)x_n=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)=1-\frac{1}{2^{2n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n+1}}\right)=\frac{4}{3}.$$

练　　习 1-3

1 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[e^{(2+\frac{1}{n})}+e^{(2-\frac{1}{n})}-2e^2\right]$,提示:提取 $e^{(2-\frac{1}{n})}$.

2 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$.　　4 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

5 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}}$ （共有 n 个根号）.

6 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{1+u^3}}{1+u}$.　　7 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)$.

8 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$　$(x<0)$.

9 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.　　10 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

（二）　利用定义或准则研讨极限

【例 1】　证明　$\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

【证明】　在证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的时候，应设法从 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 不等式出发，推出与之等价或较强的不等式 $M|x-x_0|<\varepsilon$，即 $|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{M}$ $(M>0)$. 这样，只要取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ 就可以了. 本题可以从 $|5x+2-12|<\varepsilon$ 推出与之等价或较强的不等式 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}$，于是取 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ 即可. 现将本题证明书写如下：$\forall\ \varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$，则当 $0<|x-2|<\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ 时，

$$|5x+2-12|=5|x-2|<5\cdot\delta=5\cdot\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon.\ 故\lim_{x\to 2}(5x+2)=12.$$

【例 2】　求　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

【解】　令 $\sqrt[n]{n}=1+h_n$　$(h_n>0)$，则

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2.\ 即\ 0<h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

令 $n\to\infty$，则 $h_n\to 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

实际上，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ 可以看成极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$ 的一种特例，即取 x 为正整数列，而对于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$ 是很容易利用洛比达法则求得其极限的.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\exp\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=e^0=1.$$

另外，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 是一个很重要的结论，它在以后的学习中还会用到.

【例3】　已知 $x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$，$x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$，…，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(a>0)$.

【解】　这是一个单调增加且有界的数列，显然　$x_{n-1}<x_n$；

又　$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$，于是　$x_n^2=a+x_{n-1}$.

$$x_n=\frac{a}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n}<\frac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1，故\ x_n\ 有界.$$

由极限存在准则 Ⅰ，知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 不妨假定 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}(a+x_{n-1})$，得 $A^2=a+A$，解得 $A=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

由于 $a>0$，故负值舍去. 最后得 $A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

【例 4】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^3}+\dfrac{1}{(n+2)^3}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^3}\right]$.

【解】 $\dfrac{n}{(2n)^3}\leqslant\dfrac{1}{(n+1)^3}+\dfrac{1}{(n+2)^3}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^3}\leqslant\dfrac{n}{(n+1)^3}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(2n)^3}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)^3}=0$

故 原式 $=0$.

【例 5】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1}\dfrac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t$.

【解】 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$1-2t^2\leqslant\cos 2t\leqslant 1$. 所以当 $x>1$ 时，有

$$\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{1-2t^2}{4t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{1}{4t^2}\mathrm{d}t$$

即 $-\dfrac{3}{4x}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2x^2}\leqslant\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{1}\dfrac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4x}$

令 $x\to+\infty$，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}.$$

练　　习　1-4

1　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

2　$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0)$.

4　设 $x_1>a>0$，且 $x_{n+1}=\sqrt{ax_n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

5　设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,m)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}$.

（三） 利用两个重要极限求极限

这里所说的两个重要极限是指 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

当然，在解题过程中也可以利用其变形，例如，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$ 等.

【例 1】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(x+\cos x^2)\ln(1+x)}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+\cos x^2}\cdot\dfrac{2\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[2\dfrac{\sin x}{x}+x\sin\dfrac{1}{x}\right]=2.$

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\quad(a>0,b>0,c>0,a\neq 1,b\neq 1,c\neq 1)$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\cdot\frac{1}{x}}$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-1}{x}+\dfrac{b^x-1}{x}+\dfrac{c^x-1}{x}\right)=\dfrac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\dfrac{1}{3}\ln(abc)$

故原式 $=e^{\frac{1}{3}\ln(abc)}=(abc)^{\frac{1}{3}}$.

【例 3】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=e\cdot 1=e.$$

注　此题若用公式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}$，有 $a=2,b=3,c=1,h=1,k=1$.

立刻得到原式 $=e^{\frac{(3-1)\cdot 1}{2}}=e$.

【例 4】 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^{\frac{4x}{x-1}}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\left(\left(1+\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}\right)^{\frac{4x}{x+1}}$

$$=\left(\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x}{x+1}}=e^2.$$

【例 5】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{x+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}+\ln\dfrac{x+2}{x+1}\right)$

$=\ln e-\ln e+\ln 1=0$.

练　　习　1-5

1　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$.

2　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}$.

3　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$.

4　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{2x+1}$.

5　$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

6　设 a、b 为常数，且 $a>0$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{ax})\ln\left(1+\dfrac{b}{x}\right)$.

（四）　利用等价替换求极限

【例 1】 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x-1}\right)}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$.

【解】 注意到 $x\to 1$ 时 $\sqrt[3]{x-1}\to 0,2\sqrt[3]{x^2-1}\to 0$，故

$\ln\left(1+\sqrt[3]{x-1}\right)\sim\sqrt[3]{x-1},\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}\sim 2\sqrt[3]{x^2-1}$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\cdot\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2\cdot\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$.

此题若不利用等价无穷小替换，则会遇到麻烦.

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{\sin^4 2x}$.

【解】 这是呈 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式，可以使用洛比达法则，但是，这样计算相当麻烦且很容易出

现错误.如果先做等价无穷小替换,则会简洁得多.

因为 $\sin^4 2x \sim (2x)^4$,故

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{(2x)^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x+2xe^{-x^2}}{64x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-1+e^{-x^2}}{32x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{-x^2}}{64x} = -\frac{1}{32}.$$

【例 3】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\frac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$

【解】 原式 $= \exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(5-\frac{4}{\cos x}\right)}{(3x)^2}$

$$= \exp\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4\sin x}{\cos^2 x}}{\left(5-\frac{4}{\cos x}\right)\cdot 18x} = e^{-\frac{2}{9}}.$$

【例 4】 求 $\lim\limits_{x\to 1}[1+\mathrm{tg}(x-1)]^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to 1}[1+\mathrm{tg}(x-1)]^{\frac{1}{\ln[1+(x-1)]}}$

$$= \lim_{x\to 1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}} = e.$$

注意,这里使用了前面内容提要中补充的公式,利用此公式可以简化许多计算,例如

1 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\mathrm{ctg}x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{tg}x}} = e.$

3 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x^3}} = e^{-\frac{1}{6}}.$

注意这里 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x} = 0, x-\sin x \sim \dfrac{1}{6}x^3$.

【例 5】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(e^{2x}-x^2)-2x}$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-\ln e^x}{\ln(e^{2x}-x^2)-\ln e^{2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{\sin^2 x}{e^x}\right)}{\ln\left(1-\frac{x^2}{e^{2x}}\right)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x/e^x}{-x^2/e^{2x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot(e^x) = -1.$$

练 习 1-6

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x\,\mathrm{tg}x}-1}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^3 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x-\sin x}}$.

5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{x\sin x}$.

6 $a>0, a\neq 1$,求 $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

(五) 利用洛比达法则求极限

【例 1】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^t-1-t)^2\mathrm{d}t}{x\sin^4 x}$.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^t-1-t)^2 dt}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1-x)^2}{5x^4}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2(e^x-x-1)(e^x-1)}{20x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{10x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{20x} = \frac{1}{20}.$$

【例 2】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

【解】 这是 1^∞ 型未定式，需要先取对数.

令 $y = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}, \ln y = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

$y = e^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}}$ 当 $x\to 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}$ 呈 $\dfrac{0}{0}$ 型.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{2x} = 0.$$

原式 $= e^0 = 1$

实际上，本题有更简单的算法.

注意到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{2x} = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{1} = 0$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x - x}}\right]^{\frac{\sin x - x}{x^2}} = e^0 = 1.$

【例 3】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^{ax})}{2x+3}$ $(a<0)$

【解】 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{ax})}{2x+3} = 0$，而

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^{ax})}{2x+3}$ 为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式，使用洛比达法则

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^{ax})}{2x+3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{ae^{ax}}{1+e^{ax}}}{2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{a^2e^{ax}}{2ae^{ax}} = \frac{a}{2}.$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+2e^{ax})}{2x+3}$ 不存在.

【例 4】 求 $\lim\limits_{x\to+0}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解】 这是 ∞^0 型未定式，仍须利用取对数方法化成 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

令 $y = (\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$， $\ln y = \dfrac{1}{\ln x}\ln\mathrm{ctg}x = \dfrac{\ln\mathrm{ctg}x}{\ln x}$.

当 $x\to+0$ 时，是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型. 应用洛比达法则

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\mathrm{ctg}x}{\ln x} = \lim_{x\to+0}\frac{-\frac{1}{\mathrm{ctg}x}\cdot\csc^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0}\left(-\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = -1.$$

故 $\lim\limits_{x\to+0}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$.

此题利用“结论补充”的公式12立刻有

原式 $=\exp\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{-\csc^2x}{(\mathrm{ctg}x)\cdot\dfrac{1}{x}}=\exp\lim\limits_{x\to+0}\left(-\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=e^{-1}$.

练　　习　1-7

1　$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

2　$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}(a,b>0)$.

3　$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$.

4　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos(t^2)\mathrm{d}t}{\sin^{10}x}$.

5　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin^2x-1)^3}{\int_{x^2}^0\mathrm{tg}(t^2)\mathrm{d}t}$.

（六）　确定极限式中的常数

【例1】　求 a 值，使 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\int_{-\infty}^a te^{2t}\mathrm{d}t$.

【解】　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot2a+a}=e^{2a}$，

而 $\int_{-\infty}^a te^{2t}\mathrm{d}t=\lim\limits_{c\to-\infty}\int_c^a te^{2t}\mathrm{d}t$

$=\lim\limits_{c\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}te^{2t}-\dfrac{1}{4}e^{2t}\right)\Big|_c^a=\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{4}\right)e^{2a}$

令　$e^{2a}=\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{4}\right)e^{2a}$ 得 $a=\dfrac{5}{2}$.

【例2】　若　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求 a 与 b 的值.

【解】　显然应有 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$，因为若不然等式就不会成立，这样，左端极限就呈 $\dfrac{0}{0}$ 型，利用洛比达法则就有

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^2+ax+b)'}{(1-x)'}=\lim_{x\to1}\frac{2x+a}{-1}=-(2+a)=5.$$

故　$a=-7$，再利用 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$，得到 $b=6$.

【例3】　已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$，求 a 与 b 的值.

【解】　$\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})(5x+\sqrt{ax^2-bx+c})}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{25x^2-(ax^2-bx+c)}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x^2+bx-c}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x+b-\dfrac{c}{x}}{5+\sqrt{a-\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}}}=2.$$

故　$\begin{cases}25-a=0\\ \dfrac{b}{5+\sqrt{a}}=2\end{cases}$　　解得 $a=25$，$b=20$.