幂级数与渐近级数

MIJISHU YU JIANJINJISHU

◎杨禄源◎

国防科技大学出版社

幂级数与渐近级数

杨禄源

国防科技大学出版社
·湖南长沙·

图书在版编目(CIP)数据

幂级数与渐近级数/杨禄源编.—长沙:国防科技大学出版社,2001.4
ISBN 7-81024-731-X

Ⅰ.幂… Ⅱ.杨… Ⅲ.高等数学-教学参考书 Ⅳ.O13

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4572640 邮政编码:410073
E-mail: gfkdcbs@ public.cs.hn.cn
责任编辑:卢天贶 责任校对:张 静
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
开本:787×1092 1/16 印张:9 字数:208千
2001年4月第1版第1次印刷 印数:1-1500册
*
定价:16.00元

序　言

级数，包括常数项级数及函数项级数，是高等数学的一个重要组成部分，是每一本完整的微积分学教材必备的内容。学生们进入大学经过一段时间学习后，便要学习级数。一般说，学习常数项级数困难不大，重要的是弄清楚绝对收敛级数与条件收敛级数的本质不同。学习函数项级数，则情形略有不同，对部分学生来说，可能有一定困难。关于渐近级数，虽然在 Fourier 级数求和及微分方程求解等方面有重要应用，但一般不包括在大学的课程中。

本书正如书名所述，包括级数及渐近级数。在第一章中，作为介绍常数项级数的准备，首先介绍了数列及有关的几条基本定理，然后比较详细地介绍了正项级数收敛的几个判别法，除了大学教材中常见的几个之外还介绍了一些不常见的判别法，最后讨论了任意项级数。

第二章介绍函数项级数。作为准备，首先介绍了函数列及其收敛，一致收敛的概念与判别法等，然后介绍了一致收敛的函数项级数的几个基本性质，如逐项取极限定理、逐项积分定理及逐项微分定理，等等。

第三章介绍作为函数项级数一个重要特例的幂级数，主要包括幂级数所特有的几个主要性质，函数展开成幂级数的条件等，然后介绍了幂级数的应用，如在常数项级数求和，近似计算及微分方程的幂级数解法等方面的应用。

第四章即本书最后一章，介绍了一般教科书中不常见的渐近级数。作者首先用一个实例说明引进渐近级数的重要性与必要性，然后给出渐近级数的确切定义，接着介绍渐近级数的一些主要内容，如渐近级数的运算，函数展开成渐近级数的充分必要条件，展开的唯一性定理，并对某些函数提出了展开的具体方法。本章还涉及与渐近级数有关的其它几个方面，在此不一一赘述。

杨禄源同志在繁忙的教学之余，查阅了很多资料，经过整理加工编成此书，其中不乏个人心得。本书取材适当，叙述流畅，由浅入深，循序渐进，由具体到抽象，确有一定特色。作为一本较为系统介绍级数的数学书籍，相信对读者是有裨益的，故乐以为序。

王声望

2000 年 10 月 30 日于南京大学

目　录

第一章　数列与数项级数

第二章 函数列与函数项级数

第三章 幂级数及其应用

第四章　渐近级数及其应用

第一章　数列与数项级数

§1.1　数列的收敛与发散

一、数列

无穷多个按自然数顺序排列的数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

称为数列,记作$\{x_n\}$,其中每一个数称为数列的项,第 n 项 x_n 叫数列的一般项或通项,例如:

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$$

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots, -\frac{1}{2^n}, \cdots$$

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n+1}}{n}, \cdots$$

$$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$$

$$1, 3, 5, \cdots, (2n-1), \cdots$$

都是数列,它们的通项依次为

$$\frac{n+1}{n}, -\frac{1}{2^n}, \frac{n+(-1)^{n+1}}{n}, (-1)^{n+1}, 2n-1$$

在几何上,数列$\{x_n\}$可以看做数轴上的一个动点依次取数轴上的点 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$,将上述五个数列的前几项分别表示在数轴上,即如图 1.1 所示。

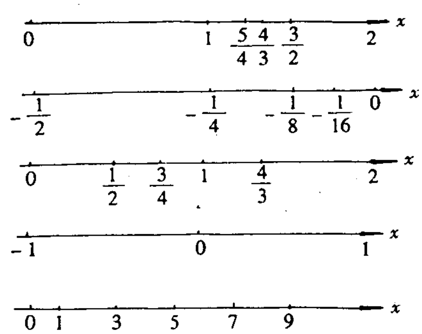

图 1.1

二、数列的极限

我们考察数列

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$$

由图 1.1 容易看出,只要当 n 取得足够大时,$x_n = \frac{n+1}{n}$与 1 之差的绝对值$|x_n - 1| = \frac{1}{n}$就可以小于任意给定的正数。于是我们就说,当 n 无限增大时,x_n 无限接近于 1。例如,给定的正

数为$\frac{1}{100}$,则由$\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$可见,只要 $n>100$,即只要把数列$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$的前 100 项除外,从第 101 项 x_{101}起,后面的一切项

$$x_{101}, x_{102}, x_{103}, \cdots, x_n, \cdots$$

就都能使不等式

$$|x_n-1|<\frac{1}{100}$$

成立。同样地,如果给定的正数为$\frac{1}{10000}$,则从第 10001 项 x_{10001}起,后面的一切项

$$x_{10001}, x_{10002}, x_{10003}, \cdots, x_n, \cdots$$

就都能使不等式

$$|x_n-1|<\frac{1}{10000}$$

成立。一般地,无论给定的正数 ε 多么小,总存在着一个正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式

$$|x_n-1|<\varepsilon$$

都成立。这就是数列$\{x_n\}=\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$当$n\to\infty$时无限接近于 1 这件事的实质。这样的一个数 1,叫做数列$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$当$n\to\infty$时的极限。

一般地,对于数列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

来说,有下列极限定义:

定义 如果对于任意给定的正数 ε(无论多么小),总存在正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立。则称常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限,或者称数列$\{x_n\}$收敛于 a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

或

$$x_n \to a(n\to\infty)$$

如果数列没有极限,就说数列是发散的。

三、有关极限的几个简单定理

定理 1.1 数列$\{x_n\}$如果收敛,则其极限是唯一的。

证:用反证法,假设同时有 $x_n\to a$、$x_n\to b$,我们取$|a-b|=\varepsilon>0$,根据数列收敛的定义,对于取定的 ε,一定存在正整数 N_1,N_2,当 $n>N_1$ 时,有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1.1}$$

当 $n>N_2$ 时,有

$$|x_n-b|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1.2}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，(1.1)式及(1.2)式同时成立，而

$$|a-b|\leqslant|x_n-a|+|x_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

与 $|a-b|=\varepsilon$ 矛盾，这就证明了本定理。（证毕）

部分数列：从数列 $\{x_n\}$ 中选取无穷多项按原次序排列而成的数列叫做原数列的部分数列。

定理 1.2 数列 $\{x_n\}$ 如果收敛于 a，则其任一部分数列也收敛于 a。

证：假设 $x_n\to a$，则对于任意给定的正数 ε，一定存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

设 $\{x_n\}$ 的部分数列为 $\{y_k\}$，则一定存在正整数 k，使 $y_{k+1},y_{k+2},\cdots$ 各项与 $x_{n+1},x_{n+2},\cdots$ 中的某数对应相等，从而当 $k>K$ 时，便有

$$|y_k-a|<\varepsilon$$

所以

$$y_k\to a\quad(k\to\infty)$$

（证毕）

定理 1.3 设数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 分别收敛于 a,b，且从某项起，$x_n\leqslant y_n$，则 $a\leqslant b$。

证：用反证法。假设 $a>b$，令 $a-b=2\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，所以存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，$|y_n-b|<\varepsilon$，于是有

$$a-b=(a-x_n)-(b-y_n)+(x_n-y_n)$$

因为 $x_n-y_n\leqslant 0$，所以有

$$a-b\leqslant(a-x_n)-(b-y_n)\leqslant|x_n-a|+|y_n-b|<2\varepsilon$$

与 $a-b=2\varepsilon$ 矛盾，这就证明了本定理成立。（证毕）

注意：在定理中，即使对一切的 n 均有 $x_n<y_n$，也不能断言 $a<b$。例如，取 $x_n=\dfrac{n-1}{n}$，$y_n=\dfrac{n+1}{n}$，则显然有 $x_n<y_n$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$，并且特别地有，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $x_n>0$，则 $a\geqslant 0$。

定理 1.4(算术平均数的极限定理) 设 $s_n=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2\cdots+x_n)$，若 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则 $\{s_n\}$ 也收敛于 a。

证：考察 $s_n-a=\dfrac{1}{n}\{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_n-a)\}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以存在正数 M，使得对于一切的 n 都有 $|x_n|<M$，$|a|<M$，从而得 $|x_n-a|<2M$，并且对于任意给定的正数 ε，还一定存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

于是

$$\begin{aligned}|s_n-a|&=\frac{1}{n}\{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_n-a)+(x_{n+1}-a)+\cdots+(x_n-a)\}\\&\leqslant\frac{1}{n}\{|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{n+1}-a|+\cdots+|x_n-a|\}\\&\leqslant\frac{1}{n}2NM+\frac{n-N}{n}\varepsilon\end{aligned}$$

由于 N 是固定值,而 n 却可任意增大,所以总可得$\frac{2NM}{n}<\varepsilon$,于是就有

$$|s_n-a|<\varepsilon+\frac{n-N}{n}\varepsilon<2\varepsilon$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}s_n=a$$
(证毕)

注意:我们还可证明:若 $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$$

定理 1.5(几何平均数的极限定理) 若 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$,且 $x_n>0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$$

证:因 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$,且 $x_n>0$,则 $a\geqslant0$。
先设 $a>0$,则$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\ln a$,由定理 1.4 可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)=\ln a$$

进而可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)}=e^{\ln a}=a$$

若 $a=0$,则 $\lim_{n\to\infty}(-\ln x_n)=+\infty$,从而可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n)=+\infty$$

因此也有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}(-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n)}=0=a$$

§1.2 数列收敛的判定

一、数列的单调性与有界性

我们先介绍数列的单调性与有界性。

对于一切的 n,如果总有 $x_n\leqslant x_{n+1}$,则称数列$\{x_n\}$是单调增加的;反之,若有 $x_n\geqslant x_{n+1}$,则称数列$\{x_n\}$是单调减少的。单调增加与单调减少统称为单调。

特别地,不带等号时则称为狭义单调的。例如数列$\left\{-\frac{1}{2^n}\right\}$、$\{2n-1\}$等为单调增加数列,而数列$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$、$\left\{\frac{1}{n}\right\}$等为单调减少数列,由于将单调减少数列$\{x_n\}$改变符号之后,所成的数列$\{-x_n\}$为单调增加数列,所以我们在考察单调数列时,则主要考察单调增加数列。

对于数列$\{x_n\}$,如果存在常数 M,使得一切 x_n 都满足不等式$x_n\leqslant M$,则称数列$\{x_n\}$是有上界的,并称 M 是其上界。如果存在常数 L,使得一切 X_n 都满足不等式$X_n\geqslant L$,则称

数列$\{X_n\}$是有下界的，并称 L 是其下界。当数列$\{X_n\}$既有上界又有下界（即绝对值数列$\{|X_n|\}$上有界）时，就仅称数列是有界的。

对于一个数列，只要有上界或下界，就必有无穷多个。例如，假设 M 是数列$\{X_n\}$的上界，则所有大于 M 的常数就一定都是它的上界。如果数列$\{X_n\}$是下有界的，则数列$\{-X_n\}$必为上有界的。

定理 1.6（收敛数列的有界性） 如果数列$\{X_n\}$收敛，则数列$\{X_n\}$有界。

证：因为数列$\{X_n\}$收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = a$，于是对于 $\varepsilon = 1$ 存在自然数 N，当 $n > N$ 时，有

$$|X_n - a| < 1$$

从而有

$$|X_n| = |(X_n - a) + a| \leqslant |X_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

取 $M > \max\{|X_1|, |X_2|, |X_3|, \cdots, |X_n|, 1 + |a|\}$，因此得$|X_n| \leqslant M,(n = 1,2,\cdots)$，这就证明了数列$\{X_n\}$有界。（证毕）

定理 1.7 上有界的单调增加数列收敛。

对于定理 1.7 我们只作如下的几何解释。

从数轴上看，对应于单调增加数列的点 X_n 只可能依次向 X 轴的正方向移动。若数列$\{X_n\}$无上界，则点 X_n 将移向无穷远（$X_n \to +\infty$）；若数列是上有界的，即 $X_n < M$，则点 X_n 必须趋向于定点 M 或点 M 之左的定点 A（图 1.2），这就表示上有界的单调增加数列收敛。并且显然有：

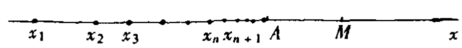

图 1.2

定理 1.7′ 下有界的单调减少数列收敛。

定理 1.7、定理 1.7′合称单调有界准则——单调有界数列必有极限。

而且还有：

定理 1.8 无上界的单调减少数列趋于正无穷大。

定理 1.8′ 无下界的单调减少数列趋于负无穷大。

二、维尔斯特拉斯—波尔查诺定理

下面的定理，就是有名的维尔斯特拉斯—波尔查诺（Weierstrass-Bolzano）定理。

定理 1.9 有界的无穷数列中必含有收敛的无穷部分数列。

证：设 p_1、q_1 分别是有界数列$\{X_n\}$的一个下界与上界，考虑$\frac{1}{2}(p_1 + q_1)$，如果数列中有无穷多项满足不等式：$X_n \geqslant \frac{1}{2}(p_1 + q_1)$，就取$\frac{1}{2}(p_1 + q_1) = p_2, q_1 = q_2$，否则取 $p_1 = p_2$，$\frac{1}{2}(p_1 + q_1) = q_2$，两种情形下都能保证数列中有无穷多项满足关系式：$p_2 \leqslant X_n \leqslant q_2$。

再同样地考虑$\frac{1}{2}(p_2 + q_2)$，如果数列中有无穷多项满足不等式：$X_n \geqslant \frac{1}{2}(p_2 + q_2)$，就取$\frac{1}{2}(p_2 + q_2) = p_3, q_2 = q_3$，否则取 $p_2 = p_3, \frac{1}{2}(p_2 + q_2) = q_3$。用同样的方法逐次地作出

p_i、q_i，然后再考虑$\frac{1}{2}(p_i+q_i)$，如果数列中有无穷多项满足不等式：$X_n \geqslant \frac{1}{2}(p_i+q_i)$，就取$\frac{1}{2}(p_i+q_i)=p_{i+1}$，$q_i=q_{i+1}$，否则取 $p_i=p_{i+1}$，$\frac{1}{2}(p_i+q_i)=q_{i+1}$。结果，就构造出数列$\{p_i\}$与$\{q_i\}$，且知它们满足下列关系式：

1) $p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3 \leqslant \cdots \leqslant q_3 \leqslant q_2 \leqslant q_1$

2) $q_i-p_i=\frac{1}{2}(q_{i-1}-p_{i-1})=\frac{1}{2^2}(q_{i-2}-p_{i-2})=\cdots=\frac{1}{2^{i-1}}(q_1-p_1)$，即当 $i \to \infty$ 时，$q_i-p_i \to 0$。

3) 对于一切的 i，数列$\{X_n\}$中，必有无穷多项满足关系式：$p_i \leqslant X_n \leqslant q_i$。

接下来，就按下列方法求作数列$\{A_i\}$。首先设 $A_1=X_1$，再就在满足关系式 $p_2 \leqslant X_n \leqslant q_2$ 的各 X_n 中取一个序号大于 1 的项，例如 X_{n_2}，并令 $A_2=X_{n_2}$，其次就在满足 $p_3 \leqslant X_n \leqslant q_3$ 关系式的各 X_n 中取一个序号大于 n_2 的项，例如 X_{n_3}，且令 $A_3=X_{n_3}$。于是依次便可得与序号数列 $1<n_2<n_3<\cdots<n_i$ 相应的$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_i$。然后，再在满足关系式 $p_{i+i} \leqslant X_n \leqslant q_{i+1}$的各 X_n 中取一个序号大于n_i 的项，例如 $X_{n_{i+1}}$，于是就令 $A_{i+1}=X_{n_{i+1}}$，这样就求得了数列$\{X_n\}$的部分数列$\{A_n\}$，且有 $p_i \leqslant A_i \leqslant q_i$，而单调有界数列$\{p_i\}$、$\{q_i\}$都是收敛的，由2)又知它们有相同的极限，若令 $\lim\limits_{i\to\infty}p_i=\lim\limits_{i\to\infty}q_i=a$，则因 $p_i \leqslant A_i \leqslant q_i$ 可得$\lim\limits_{i\to\infty}A_i=a$，这就证明了$\{A_i\}$是$\{X_n\}$的收敛的无穷部分数列。（证毕）

由此可知，原数列$\{X_n\}$如果收敛于 a，当然必定有界，则其任一无穷部分数列也一定收敛于 a，这就是定理 1.2。

注意：定理 1.9 的几何意义是指：如果某范围内存在无穷多个点，则这无穷多个点必然会在某点处聚集起来。

像定理 1.9 所表示的无穷部分数列的极限，通常被称为原数列$\{X_n\}$的聚值。使用这个术语，则定理 1.9 就可以表述如下：

定理 1.9′ 有界的无穷数列至少有一个聚值。

三、柯西收敛原理

数列$\{X_n\}$如果收敛，则其极限必为其唯一的聚值，反之，如果$\{X_n\}$有界且仅有唯一的聚值，则数列$\{X_n\}$收敛。于是便有

定理 1.10 有界数列收敛的充分必要条件就是其聚值是唯一的。

将这个定理加以改述，就成如下的重要定理。通常称此定理为柯西(Cauchy)收敛原理，也叫柯西收敛准则。

定理 1.11 数列$\{X_n\}$收敛的充分必要条件是：对于任意给定的正数 ε，存在着这样的正整数 N，使得当 $m>N$，$n>N$ 时，就有

$$|X_m-X_n|<\varepsilon \tag{1.3}$$

证：先证明(1.3)是必要条件，设 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=a$，若任意给定正数 ε，则$\frac{\varepsilon}{2}$也是任意正数，于是由数列极限的定义，存在着正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|X_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

同样，当 $m > N$ 时，也有

$$|X_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此，当 $m > N, n > N$ 时，有

$$|X_m - X_n| = |(X_m - a) - (X_n - a)|$$

$$\leqslant |X_m - a| + |X_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

所以(1.3)是必要条件。

再证明(1.3)是充分条件。若当 $m > N, n > N$ 时，有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

从而就有

$$|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon$$

于是就有

$$|x_n| < |x_{N+1}| + \varepsilon$$

则数列$\{X_n\}$便为有界的，假设其不收敛，根据定理 1.9，则知它至少有两个聚值。不妨分别设为 A、B，并记$|A - B| = \delta > 0$。现在，对于$\frac{\delta}{3}$，可取足够大的正整数 N_1，于是当 $m > N_1, n > N_1$ 时便有

$$|X_m - X_n| < \frac{\delta}{3} \tag{1.4}$$

若设$\{X_{n_i}\}\{X_{n_j}\}$是分别收敛于 A、B 的部分数列，则对于$\frac{\delta}{3}$必存在正整数 N_i、N_j，当 $n_i > N_i, n_j > N_j$ 时，分别有

$$|X_{n_i} - A| < \frac{\delta}{3} \tag{1.5}$$

$$|X_{n_j} - B| < \frac{\delta}{3} \tag{1.6}$$

当 N_i、$N_j > N_1$ 时，(1.4)便与(1.5)、(1.6)同时成立，于是有

$$|A - B| \leqslant |A - X_{n_i}| + |B - X_{n_j}| + |X_{n_i} - X_{n_j}| < \delta$$

与$|A - B| = \delta$ 矛盾，从而知$\{X_n\}$只有唯一的聚值，即数列收敛，所以(1.3)是充分条件。

(证毕)

柯西收敛准则很少用来直接判别具体数列的极限是否存在，因为在很多具体问题中，要验证准则的条件是否成立往往是困难的，但准则在推理上却有很大的理论价值。

§1.3 上确界、下确界与上极限、下极限

一、上确界和下确界

我们知道,有限数列中总有最大数和最小数,但在无穷数列中,即使数列是有界的,也不一定有最大(小)数,例如在数列

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

中,就没有最小数,同样地,数列

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$$

中,就没有最大数。因此,对无穷数列就很有必要定义一个量以充当其中的最大(小)数。为此,我们首先则要利用数列$\{X_n\}$按下列方法构造数列$\{A_n\}$:

先取$A_1=X_1$,再取X_1、X_2中较大的一数为A_2,则使得$A_1\leqslant A_2$,然后再取X_1、X_2、X_3中最大的一数为A_3,从而使得$A_1\leqslant A_2\leqslant A_3\cdots$,一般地,则取$X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$中最大的一数为$A_n$,于是可得无穷数列$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$。此数列显然是单调增加的,从而可知,若数列$\{X_n\}$为上有界的,则$\{A_n\}$也是上有界的,根据定理1.7,则必有$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=S$($S$为常数),这时

1) 对于数列$\{X_n\}$的一切项均有,$X_n\leqslant S$;

2) 对于任意给定的正数ε,至少有一项满足关系式:$X_n>S-\varepsilon$

事实上,对于一切的n,因为$X_n\leqslant A_n\leqslant S$,所有总有$X_n\leqslant S$,其次,由$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=S$知,对于任意给定的正数$\varepsilon$,总有$|A_n-S|=S-A_n<\varepsilon$,即有$A_n>S-\varepsilon$,而$A_n$又是$X_1,X_2,\cdots,X_n$中的某一数,因此有$X_n>S-\varepsilon$。

于是我们称S为数列$\{X_n\}$的上确界,记为$\sup\limits_{1\leqslant n\leqslant\infty}\{X_n\}$,即$S=\sup\limits_{1\leqslant n\leqslant\infty}\{X_n\}$。当$\{X_n\}$中存在最大数时,就取其最大数为$S$,这时$S=\max\limits_{1\leqslant n\leqslant\infty}\{X_n\}$。

若数列$\{X_n\}$无上界,则$\{A_n\}$也无上界,根据定理1.8,可知$A_n\to+\infty(n\to\infty)$,这时就称数列$\{X_n\}$的上确界为$+\infty$,于是我们就以有限数或$+\infty$定义了数列的上确界。

与构造数列$\{A_n\}$类似,我们再按如下的方法求作数列$\{B_n\}$:首先取$B_1=X_1$,再就$n=2,3,\cdots$依次地取$X_1,X_2,\cdots,X_n$中的最小数为B_n,从而可得单调减少数列$\{B_n\}$。

如果数列$\{X_n\}$是下有界的,则$\{B_n\}$也是下有界的,根据定理1.7′,则必有$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=I$($I$为常数),并且易知$I$具有下列性质:

1) 对于数列$\{X_n\}$的一切项均有,$X_n\geqslant I$;

2) 对于任意给定的正数ε,至少有一项满足关系式:$X_n<I+\varepsilon$

于是我们称I为数列$\{X_n\}$的下确界,记为$\inf\limits_{1\leqslant n\leqslant\infty}\{X_n\}$,$I=\inf\limits_{1\leqslant n\leqslant\infty}\{X_n\}$。当$\{X_n\}$中存在最小数时,就取其最小数为$I$,这时$I=\min\limits_{1\leqslant n\leqslant\infty}\{X_n\}$。

如果数列$\{X_n\}$无下界,则$\{B_n\}$也无下界,根据定理1.8′,可知$B_n\to-\infty(n\to\infty)$,这

时就称数列$\{X_n\}$的下确界为$-\infty$。于是我们也就用有限数或$-\infty$定义了数列的下确界。

例如，设$X_n=\frac{n+1}{n}$，则有$\max\limits_{1\leqslant n\leqslant\infty}\{X_n\}=2$，$\inf\limits_{1\leqslant n\leqslant\infty}\{X_n\}=1$；设$Y_n=2n-1$，则有$\sup\limits_{1\leqslant n\leqslant\infty}\{Y_n\}=+\infty$，$\min\limits_{1\leqslant n\leqslant\infty}\{Y_n\}=1$；设$Z_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$，则有$\sup\limits_{1\leqslant n\leqslant\infty}\{Z_n\}=1$，$\inf\limits_{1\leqslant n\leqslant\infty}\{Z_n\}=-1$。

二、上极限与下极限

$n\to\infty$时，数列$\{X_n\}$的变化趋势是我们所关心的问题。即使对于不收敛的数列，我们也希望建立能够描述这种变化趋势的量。为此，我们依次取

S_1,I_1为$X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n,\cdots$的上确界、下确界；

S_2,I_2为$X_2,X_3,\cdots,X_n,\cdots$的上确界、下确界；

S_n,I_n为$X_n,\cdots$的上确界、下确界；

并将这样构造的数列记为$\{S_n\}$、$\{I_n\}$，如果数列$\{X_n\}$无上(下)界，则$S_1,S_2,\cdots(I_1,I_2,\cdots)$就都为$+\infty(-\infty)$，现在我们把$+\infty$、$-\infty$都视为数，并记$+\infty\geqslant+\infty$，$-\infty\leqslant-\infty$，则可知数列$\{S_n\}$、$\{I_n\}$分别是单调减少和单调增加的，且有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=U,\lim_{n\to\infty}I_n=V。$$

当$S_n(I_n)\to+\infty(-\infty)$时，就记$U=+\infty(V=-\infty)$。因$S_n\geqslant I_n$，所以有$U\geqslant V$，我们称$U$为数列$\{X_n\}$的上极限，而称$V$为数列$\{X_n\}$的下极限，并分别记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$和$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$。

$X_n\to+\infty$时，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=+\infty$，

$X_n\to-\infty$时，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=-\infty$。

例如，设$X_n=(-1)^n(1-\frac{1}{n})$，则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=1$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=-1$；设$X_n=2n-1$，则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=+\infty$。

显然地，数列$\{X_n\}$收敛的充分必要条件就是：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\neq\pm\infty$。

§1.4　级数的收敛与发散

一、级数

如果给定一个数列

$$u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$$

则由这数列构成的表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

叫做(常数项)无穷级数，简称(常数项)级数，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1.7}$$

其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项。

上述级数的定义只是一个形式上的定义,我们可以从有限项的和出发,观察它们的变化趋势,由此来理解无穷多个数量相加的含义。

作(常数项)级数(1.7)的前 n 项的和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

S_n 称为级数(1.7)的部分和,当 n 依次取 1,2,3,…时,它们构成一个新的数列:

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \cdots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots$$

根据这个数列有、无极限,我们可以引进无穷级数(1.7)的收敛与发散概念。

定义 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S,即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,并称极限 S 叫做此级数的和,记为

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果 $\{S_n\}$ 没有极限,则级数没有和,并称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

显然,当级数收敛时,其部分和 S_n 是级数的和 S 的近似值,它们之间的差值

$$r_n = S - S_n = U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots$$

叫做级数的余项。

例 1.1 研究等比级数(几何级数)

$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots (a \neq 0)$ 的收敛性。

解:1) 若 $q \neq 1$,则部分和可表为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}(1 - q^n)$$

当 $|q| < 1$ 时,$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-q}(1-q^n) = \frac{a}{1-q}$,等比级数收敛,其和为 $\frac{a}{1-q}$。

当 $|q| > 1$ 时,由于 $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$,所以 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$,等比级数发散。

2) 若 $|q| = 1$,则当 $q = 1$ 时,$S_n = na \to \infty$,等比级数发散,当 $q = -1$ 时,则

$$S_n = \begin{cases} 0(n \text{ 为偶数时}) \\ a(n \text{ 为奇数时}) \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在,等比级数发散。

综上所述,得结论如下:

当 $|q| < 1$ 时,等比级数收敛,和为 $\frac{a}{1-q}$;当 $|q| \geqslant 1$ 时,等比级数发散。

例 1.2 证明级数