

高等工科院校自学函授教材

GAODENGGONGKEYUANXIAOZIXUEHANSYOUJIAOCAI

# 工程数学

上册

线性代数与数理方程

同济大学函授数学教研室

周忆行 郭景德 刘浩荣 编

中国



建筑工业出版社

本书是按照全国工科函授数学研究组讨论制定的“全国工科函授《工程数学》教学基本要求”(初稿)编写的。全书分上、下两册。上册包括“线性代数”及“数理方程”，下册包括“概率统计”及“复变函数”。

本书为上册。其中线性代数内容包括： $n$ 阶行列式、矩阵、向量的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组及二次型。数理方程内容包括：典型方程和定解问题、达朗贝尔解法、分离变量解法及积分变换法。

全书内容考虑了函授和自学的特点，编写时尽量将内容安排得由浅入深，循序渐进。对较难理解的问题作了详细的阐述，并增加较多的例题，以便自学。每章后均有内容小结和复习思考题，分阶段备有测验作业题；书后还附有习题及复习思考题答案等，可供读者参考。

本书可供高等工科院校工业与民用建筑及其他各类成人教育专业作为工程数学课程的自学、函授教材，也可供全日制工科大学生或工程技术人员作为参考书。

高等工科院校自学函授教材

工程数学

上册

线性代数与数理方程

同济大学函授数学教研室

周忆行 郭景德 刘浩荣 编

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

开本：787×1092毫米 1/16 印张：22 字数：532千字

1989年10月第一版 1989年10月第一次印刷

印数：1—6,070册 定价：11.15元

ISBN7—112—00834—4/TU·591

(5917)

## 前 言

《工程数学》是高等工科院校，继《高等数学》后开设的又一门重要的数学基础课。它结合工程技术和专业的需要，也是一门应用性较强的课程。在我校多年来从事《工程数学》课程的函授教学基础上，参考全国理工科函授数学研究组讨论制定的“全国工科函授《工程数学》教学基本要求”（初稿），我们组织编写了这套《工程数学》函授自学教材。

本书分上、下两册。包括“线性代数”、“数理方程”、“概率统计”和“复变函数”等四篇内容。各专业可以根据不同的要求而选用其中的某些部分，而其余部分可供读者自学或查阅。每篇内容的教学（包括自学）时数均为120小时左右。书中打△的章节已超出教学基本要求，可以不作为必读的内容，仅供有关专业选用。

考虑到本书主要是供函授生自学用的教材，在编写时尽量注意做到：由浅入深，文字通顺，条理清楚，叙述详尽，例题较多，便于自学。在每章末均有内容小结，并附有适量的习题及复习思考题；按阶段配备有测验作业题；书后还附有习题及复习思考题答案或少量的题解，可供读者参考。

本书上册中“线性代数”由周忆行和郭景德编写，经骆承钦副教授审阅；“数理方程”由刘浩荣编写，在我校原有的函授教材基础上，为了使函授与日校教学相接近，故部分材料选用于本校桂子鹏和康盛亮编著的《数学物理方程》，经黄烈德教授审阅。

下册中“概率统计”由蔡杰儿和潘承毅编写，并由潘承毅副教授负责审阅；“复变函数”由郭景德编写，经谈祝多副教授审阅。组织审查出版过程中还得到了我校函授学院副院长叶书麟教授等领导同志的关怀与重视。在此，我们谨对所有给予本书出版工作支持与帮助的同志们表示衷心的感谢。

限于我们的水平，书中必有缺点或错误，诚恳地欢迎读者批评指正。

# 目 录

## 第一篇 线 性 代 数

第一章 $n$ 阶行列式	3
第一节 $n$ 阶行列式的定义	3
第二节 $n$ 阶行列式的性质	5
第三节 克莱姆法则	11
习题一	13
内容小结	14
复习思考题一	15
第二章 矩阵	17
第一节 线性变换与矩阵的概念	17
第二节 矩阵的运算	20
一、矩阵的和与差 数与矩阵的乘积	20
二、矩阵与矩阵的乘积	22
三、矩阵的分块运算	27
第三节 矩阵的逆	29
一、逆阵的概念	29
二、逆阵存在的条件及其求法	31
第四节 矩阵的初等变换与初等矩阵	36
一、矩阵的初等变换	36
二、初等矩阵	38
习题二	42
内容小结	44
复习思考题二	46
测验作业题一	47
第三章 向量的线性相关性与矩阵的秩	49
第一节 $n$ 维向量及其线性运算	49
一、 $n$ 维向量	49
二、向量的线性运算	50
第二节 向量的线性相关性	51
一、向量的线性相关与线性无关概念	51
二、向量的线性相关性的判别定理	53
第三节 向量组的秩	55
一、等价向量组	55
二、向量组的秩	57
第四节 矩阵的秩	58
一、矩阵的秩	58
二、用矩阵的初等变换求矩阵的秩	61
第五节 $n$ 维向量空间	63
一、 $n$ 维向量空间的概念	63

二、基底坐标	64
习题三	66
内容小结	66
复习思考题三	68
第四章 线性方程组	70
第一节 线性方程组的相容性	70
第二节 非齐次线性方程组	73
一、解的讨论	73
二、用行的初等变换求解	78
第三节 齐次线性方程组	84
一、有非零解的充要条件及其解法	84
二、基础解系	87
三、非齐次方程组解的结构	91
习题四	94
内容小结	95
复习思考题四	96
测验作业题二	97
第五章 二次型	98
第一节 二次型和它的标准形	98
一、二次型及其矩阵表示	98
二、二次型的标准形	99
第二节 用矩阵的合同变换化二次型为标准形	100
一、矩阵合同的概念	100
二、用矩阵的合同变换化对称方阵为对角方阵	102
三、用初等合同变换化对称矩阵为对角矩阵	104
四、化二次型为标准形	107
第三节 正交矩阵和正交向量组	108
一、正交矩阵和正交变换	108
二、正交向量组和正交化方法	110
第四节 方阵的特征值和特征向量	114
一、方阵的特征值和特征向量	114
二、实对称矩阵的特征值和特征向量	116
第五节 用正交变换化二次型为标准形	118
一、化实对称矩阵为对角矩阵	118
二、用正交变换化二次型为标准形	123
第六节 正定二次型	127
习题五	128
内容小结	129
复习思考题五	132
测验作业题三	133

## 第二篇 数 理 方 程

第六章 典型方程和定解问题	137
---------------	-----

第一节 振动方程的推导	137
一、弦的微小横振动方程	137
二、杆的纵振动方程	139
三、薄膜的微小横振动方程	141
第二节 热传导方程与拉普拉斯方程的推导	142
一、杆的热传导方程	142
二、空间物体的热传导	144
三、恒稳热场的热传导与拉普拉斯方程	146
第三节 初始条件和边界条件	147
一、初始条件	147
二、边界条件	148
第四节 定解问题	152
第五节 二阶线性偏微分方程的一些基本知识	155
一、方程的分类	155
二、二阶线性偏微分方程解的一些性质	156
第六节 无界弦的自由振动初值问题的达朗贝尔解法	157
一、无界弦的自由振动方程的通解	157
二、无界弦自由振动初值问题解的达朗贝尔公式	158
三、达朗贝尔解的物理意义	161
习题六	162
内容小结	164
复习思考题六	165
<b>第七章 振动方程的分离变量解法</b>	<b>168</b>
第一节 有界弦的自由横振动	168
第二节 有界弦的强迫横振动	178
第三节 非齐次边界条件的处理	186
第四节 矩形膜的自由横振动	192
第五节 简支梁的自由横振动	196
习题七	199
内容小结	202
复习思考题七	203
测验作业题四	205
<b>第八章 热传导方程与拉普拉斯方程的分离变量解法</b>	<b>207</b>
第一节 有限长杆的热传导	207
第二节 带有非齐次方程或非齐次边界条件的热传导问题举例	214
第三节 矩形域上拉普拉斯方程的狄里赫莱问题	220
第四节 圆域上拉普拉斯方程的狄里赫莱问题	224
习题八	231
内容小结	233
复习思考题八	235
<b>第九章 贝塞尔函数及其在分离变量法中的应用</b>	<b>237</b>
第一节 贝塞尔方程及其求解	237
第二节 贝塞尔函数的递推公式	242

一、递推公式	242
二、递推公式的应用	244
第三节 贝塞尔函数的渐近公式与零点	247
一、贝塞尔函数的渐近公式	247
二、贝塞尔函数的零点	249
第四节 把函数展开成贝塞尔函数的级数	250
一、贝塞尔函数的正交性	250
二、把函数展开为傅立叶-贝塞尔级数	255
第五节 贝塞尔函数的应用举例	256
习题九	262
内容小结	263
复习思考题九	265
测验作业题五	266
第十章 积分变换法	267
第一节 傅立叶积分和傅立叶变换	267
一、傅立叶积分和傅立叶积分定理	267
二、傅立叶变换及其逆变换	268
第二节 傅立叶变换的基本性质	271
一、傅立叶变换的运算性质	271
二、卷积和它的性质	272
三、卷积定理	274
第三节 应用傅立叶变换解微分方程	275
第四节 拉普拉斯变换	280
一、拉普拉斯变换的概念	280
二、拉普拉斯变换的存在定理	281
三、拉普拉斯变换的计算举例	282
第五节 拉普拉斯变换的基本性质	283
一、拉普拉斯变换的运算性质	283
二、卷积及其性质	286
三、卷积定理	286
第六节 海维赛特展开式	288
第七节 拉普拉斯变换在解微分方程中的应用	293
一、解线性常微分方程的初值问题	293
二、解线性偏微分方程的定解问题	296
习题十	300
内容小结	302
复习思考题十	305
测验作业题六	306
附录一 贝塞尔函数 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 的函数值表	308
附录二 傅立叶变换简表	314
附录三 拉普拉斯变换简表	315
习题及复习思考题答案	318
“数理方程”主要参考书目	345

# 第一篇

## 线性代数



在现实世界中，变量与变量之间的依赖关系是多种多样的。但是，我们可以把它们分成线性的和非线性的两大类。对于许多现象来说，都是在不同程度上与线性变化的规律相接近的。因此，在研究非线性关系时，一个很重要的方法就是把问题线性化，即把问题化为求解线性代数方程组之类的运算。特别是在电子计算机飞速发展和普及的今天，原来难以计算的高阶线性代数方程组的解可以借助电子计算机很快地算出来，这就更促进了线性代数的广泛应用和发展。当今，线性代数知识已成为每个工程技术人员必备的基础知识。

本课程主要介绍线性代数的一些基本知识，包括  $n$  阶行列式、矩阵、向量的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、二次型等。这些知识在理论和实践中都有重要的价值，特别是矩阵，它是线性代数的重要基础，是研究线性关系的有力工具，必须予以足够的重视。

# 第一章 $n$ 阶行列式

在中学里，已学过二阶、三阶行列式，并用它来求解二元、三元线性方程组。为了研究含有  $n$  个未知数的线性方程组的求解问题，需要把行列式的概念推广到  $n$  阶，即需要讨论  $n$  阶行列式的问题。

本章主要介绍  $n$  阶行列式的定义、性质和它的计算方法。此外，还要介绍用  $n$  阶行列式求解  $n$  元线性方程组的克莱姆法则。

## 第一节 $n$ 阶行列式的定义

大家已经知道二阶行列式和三阶行列式的定义。现在考虑的是：在二阶、三阶行列式的基础上来定义四阶、五阶、直至  $n$  阶行列式。这种用较低阶的行列式来定义较高阶的行列式的方法叫“递归定义法”。先来讨论二阶行列式与三阶行列式的关系。

二阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

将上式右端六项两两合并，并利用二阶行列式定义可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

上式表明，三阶行列式可以转化为三个二阶行列式。为了进一步了解三个二阶行列式与三阶行列式中元素的位置关系，我们引入余子式和代数余子式的概念。

在三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，把元素  $a_{ij}$  ( $i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$ ) 所在的第  $i$  行元素与第  $j$  列元素删去，剩下的元素所组成的二阶行列式，叫做元素  $a_{ij}$  的余子式，记为  $M_{ij}$ 。我们称  $(-1)^{i+j}M_{ij}$  为元素  $a_{ij}$  的代数余子式，记为  $A_{ij}$ ，即  $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 。

例如，元素  $a_{12}$  的余子式与代数余子式分别为

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

利用代数余子式的概念, 三阶行列式可表示为

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{1j}$$

即三阶行列式等于它第一行的每个元素与它的代数余子式的乘积之和。进一步不难验证: 三阶行列式等于它的任一行(或任一列)的每个元素与它的代数余子式的乘积之和, 即

$$D = \sum_{j=1}^3 a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}A_{ij} \quad (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$$

上式称为行列式按任意一行(或任意一列)展开。

利用上面的结果, 我们给出  $n$  阶行列式的定义。

**定义** 设有  $n^2$  个数排成  $n$  行  $n$  列数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

定义  $n$  阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为

$$D = \begin{cases} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & \text{当 } n=2 \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & \text{当 } n>2 \end{cases}$$

其中  $A_{1j}$  为元素  $a_{1j}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 的代数余子式<sup>①</sup>。

与三阶行列式一样,  $n$  阶行列式也可以按任意一行(或列)展开。我们有下面的定理。

**定理**  $n$  阶行列式等于它的任一行(或列)的每个元素与它的代数余子式的乘积之和, 即

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n)$$

(定理证明从略)

**【例 1-1】** 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

**【解】** 根据定义, 按第一行展开

<sup>①</sup>  $n$  阶行列式中元素  $a_{ij}$  的代数余子式的定义方法与三阶行列式中所介绍的相同, 不再重复。

$$\begin{aligned}
D &= 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + (-2) \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\
&= -8 + 22 + 2 + 52 = 68
\end{aligned}$$

如果按第二列展开，由于该列有两个元素是零，所以展开式更简单。

$$\begin{aligned}
D &= 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 22 + 46 = 68
\end{aligned}$$

为了书写更简便，今后在计算某元素的代数余子式时，可以不写 $(-1)^{i+j}$ ，直接根据下图所示的符号规律确定其符号。

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

**【例 1-2】** 计算  $n$  阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中空白处的元素均为零。

**【解】** 由于第 1 列的元素除  $a_{11}$  外均为零，故可按第 1 列展开

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

同样，对于上式右边的  $n-1$  阶行列式也按第一列展开，并以此类推，所以

$$\begin{aligned}
D &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots \\
&= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}
\end{aligned}$$

例 1-2 中的行列式称为三角形行列式。

上面的例子告诉我们，在计算  $n$  阶行列式时，为了使计算简便，可选择等于零的元素较多的那一行（或列）展开。在实际计算中，我们往往要利用行列式的性质，使行列式的某行（或某列）元素尽可能多的化为零。

## 第二节 $n$ 阶行列式的性质

$n$  阶行列式与三阶行列式有相同的性质。

**性质1** 行列式 $D$ 与它的转置行列式 $D'$ 相等。其中 $D'$ 为将行列式 $D$ 的行与同序号的列互换所得的行列式。

证 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

于是

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

其中  $a'_{ij} = a_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ )。

用数学归纳法。当  $n = 2$  时, 结论显然成立, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = D'$$

假设对于  $n-1$  阶行列式结论成立, 即  $n-1$  阶行列式与它的转置行列式相等。对于  $n$  阶行列式  $D$  与  $D'$ , 将  $D$  按第一行展开, 将  $D'$  按第一列展开, 得到

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k}$$

$$D' = a'_{11}A'_{11} + a'_{21}A'_{21} + \cdots + a'_{n1}A'_{n1} = \sum_{k=1}^n a'_{k1}A'_{k1}$$

由于  $a'_{k1} = a_{1k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), 又因  $A'_{k1}$  与  $A_{1k}$  有相同的符号并且  $A'_{k1}$  是  $A_{1k}$  的转置行列式 (其阶数为  $n-1$ ), 所以由归纳法假设

$$A'_{k1} = A_{1k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

由此立即可得  $D = D'$

性质1说明了行列式中的行与列有相同的地位, 凡是行所具有的性质, 对于列也成立, 反之也一样。

**性质2** 互换行列式的两行 (列), 行列式的值变号。(证明从略)。

**性质3** 如果行列式中有两行 (列) 的元素相同, 则这个行列式等于零。

证 设行列式  $D$  中第  $i, k$  两行的元素完全相同。把这两行互换得行列式  $D_1$ , 由性质2知,  $D_1 = -D$ 。另一方面, 由于交换的两行完全相同, 所以  $D_1 = D$ 。由此推得

$$D = 0$$

**性质4** 行列式的某一行 (列) 中所有元素都乘以同一个数  $k$ , 等于用  $k$  去乘这个行列式。即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

证 按第  $i$  行展开

$$\text{上式左边} = \sum_{j=1}^n (ka_{ij}) A_{ij} = k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \text{上式右边}$$

**性质5** 行列式中如果有两行 (列) 的元素对应成比例, 则这个行列式等于零。

证 设行列式 $D$ 中第 $i$ 、 $k$ 两行元素对应成比例, 比例常数为 $\lambda$ , 即 $a_{ij} = \lambda a_{kj} (j = 1, 2, \dots, n)$ 。于是

$$D = \begin{vmatrix} \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda a_{k1} & \dots & \lambda a_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

性质 6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} + a'_{i1} & \dots & a_{in} + a'_{in} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a'_{i1} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 将上式左边按第 $i$ 行展开

$$\begin{aligned} \text{上式左边} &= \sum_{j=1}^n (a_{ij} + a'_{ij}) A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} + \sum_{j=1}^n a'_{ij} A_{ij} \\ &= \text{上式右边} \end{aligned}$$

性质 7 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一个常数后加到另一行(列)的对应元素上去, 则行列式的值不变, 即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{k1} & \dots & a_{in} + \lambda a_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix}$$

这个性质的证明留作习题。

【例 1-3】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

【解】 利用行列式性质 7, 将第一行的元素除第一个外全化为零。

$$D \xrightarrow{\substack{c_2 + c_1 \\ c_4 - 2c_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

① 记号 $c_i + \lambda c_k$ 表示将行列式的第 $k$ 列元素乘以 $\lambda$ 后加到第 $i$ 列对应元素上去; $r_i + \lambda r_k$ 表示将行列式的第 $k$ 行元素乘以 $\lambda$ 后加到第 $i$ 行对应元素上去。如 $c_4 - 2c_1$ 表示第 4 列元素减去第 1 列对应元素的 2 倍

$$= 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2(4-2) = 4$$

【例 1-4】 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

【解】 这个行列式元素的分布很有规律，它的每一行（列）元素之和都是 6。于是

$$D \begin{matrix} c_1+c_2+c_3+c_4 \\ r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48。$$

【例 1-5】 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

【解】 方法 1

$$D \begin{matrix} c_1-c_2 \\ c_3-c_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & y & 1-y \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2-r_1 \\ r_4-r_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 1 & y & 1 \\ 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = -x^2 \begin{vmatrix} y & 1 \\ 0 & -y \end{vmatrix} = x^2 y^2$$

方法 2 利用行列式性质 5

$$D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1+0 & 1-x & 1 & 1 \\ 1+0 & 1 & 1+y & 1 \\ 1+0 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = D_1 + D_2$$

$$D \begin{array}{l} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = xy^2$$

$$D_2 = x \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = x \left( \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \right. \\ \left. + \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 0 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \right) = x(D_3 + D_4)$$

$$D_3 \begin{array}{l} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = -y^2$$

$$D_4 = -x \begin{vmatrix} 1+y & 1 \\ 1 & 1-y \end{vmatrix} = -x[(1+y)(1-y) - 1] = xy^2$$

所以  $D = x^2y^2$

**方法3** 利用行列式的定义，在行列式  $D$  的左边与上边添上一列一行得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \begin{array}{l} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1 \\ r_5 - r_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} \\ c_1 + \frac{1}{x} c_2 - \frac{1}{x} c_3 + \frac{1}{y} c_4 - \frac{1}{y} c_5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2$$

在上面的运算中由于出现  $\frac{1}{x} c_2$ ,  $\frac{1}{y} c_4$  等，故  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ 。当  $x = 0$  或  $y = 0$  时，由于  $D$  中有二行的元素对应相等，所以  $D = 0$ 。故  $D = x^2y^2$  不论  $x$ 、 $y$  是否为零都是成立的。

例1-5说明了计算行列式的方法可能有几种，我们可以通过练习逐步掌握其计算方法。下面再介绍一种方法。

**【例 1-6】** 证明

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \quad (a \neq b, n \geq 2)$$



证 用数学归纳法, 当  $n=2$  时,

$$D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a-b}$$

所以当  $n=2$  时结论成立。假设对于  $k \leq n-1$  时结论成立, 即

$$D_k = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} \quad k \leq n-1$$

对于  $D_n$ , 按第一行展开得

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - ab \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

再将上式右端的  $n-1$  阶行列式按第一列展开得

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

根据归纳法假设,  $D_{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a-b}$ ,  $D_{n-2} = \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b}$ , 故有

$$\begin{aligned} D_n &= (a+b) \frac{a^n - b^n}{a-b} - ab \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b} \\ &= \frac{1}{a-b} (a^{n+1} + a^n b - ab^n - b^{n+1} - a^n b + ab^n) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \end{aligned}$$

为了下一节证明克莱姆法则的需要, 介绍行列式性质 3 的一个推论。

**推论** 行列式的某一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零。即

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{lk} = 0 \quad i \neq l$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = 0 \quad j \neq i$$

证 设

$$D = \begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

将  $D$  按第  $i$  行展开有

$$D = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

将  $D$  中的第  $i$  行元素换成  $D$  中的第  $l$  行对应元素, 于是有

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} A_{ik} = \begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix} = 0, \quad i \neq l$$