高等工科院校自学函授教材

GAODENGGONGKEYUANXIAOZIXUEHANSHOUJIAOCAI

工程数学 上册

线性代数与数理方程

同济大学函授数学教研室

周忆行 郭景德 刘浩荣 编

中国

建筑工业出版社

本书是按照全国工科函授数学研究组讨论制定的“全国工科函授《工程数学》教学基本要求”（初稿）编写的。全书分上、下两册。上册包括“线性代数”及“数理方程”，下册包括“概率统计”及“复变函数”。

本书为上册。其中线性代数内容包括：n阶行列式、矩阵、向量的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组及二次型。数理方程内容包括：典型方程和定解问题、达朗贝尔解法、分离变量解法及积分变换法。

全书内容考虑了函授和自学的特点，编写时尽量将内容安排得由浅入深，循序渐进。对较难理解的问题作了详细的阐述，并增加较多的例题，以便自学。每章后均有内容小结和复习思考题，分阶段备有测验作业题；书后还附有习题及复习思考题答案等，可供读者参考。

本书可供高等工科院校工业与民用建筑及其他各类成人教育专业作为工程数学课程的自学、函授教材，也可供全日制工科大学生或工程技术人员作为参考书。

高等工科院校自学函授教材

工 程 数 学

上 册

线性代数与数理方程

同济大学函授数学教研室

周忆行 郭景德 刘浩荣 编

*

中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷（北京阜外南礼士路）

*

开本：787×1092毫米 1/16 印张：22 字数：532 千字

1989年10月第一版 1989年10月第一次印刷

印数：1—6,070册 定价：11.15元

ISBN7—112—00834—4/TU·591

(5917)

前　言

《工程数学》是高等工科院校，继《高等数学》后开设的又一门重要的数学基础课。它结合工程技术和专业的需要，也是一门应用性较强的课程。在我校多年来从事《工程数学》课程的函授教学基础上，参考全国理工科函授数学研究组讨论制定的“全国工科函授《工程数学》教学基本要求”(初稿)，我们组织编写了这套《工程数学》函授自学教材。

本书分上、下两册。包括“线性代数”、“数理方程”、“概率统计”和“复变函数”等四篇内容。各专业可以根据不同的要求而选用其中的某些部分，而其余部分可供读者自学或查阅。每篇内容的教学（包括自学）时数均为120小时左右。书中打Δ的章节已超出教学基本要求，可以不作为必读的内容，仅供有关专业选用。

考虑到本书主要是供函授生自学用的教材，在编写时尽量注意做到：由浅人深，文字通顺，条理清楚，叙述详尽，例题较多，便于自学。在每章末均有内容小结，并附有适量的习题及复习思考题；按阶段配备有测验作业题；书后还附有习题及复习思考题答案或少量的题解，可供读者参考。

本书上册中“线性代数”由周忆行和郭景德编写，经骆承钦副教授审阅；“数理方程”由刘浩荣编写，在我校原有的函授教材基础上，为了使函授与日校教学相接近，故部分材料选用于本校桂子鹏和康盛亮编著的《数学物理方程》，经黄烈德教授审阅。

下册中“概率统计”由蔡杰儿和潘承毅编写，并由潘承毅副教授负责审阅；“复变函数”由郭景德编写，经谈祝多副教授审阅。组织审查出版过程中还得到了我校函授学院副院长叶书麟教授等领导同志的关怀与重视。在此，我们谨对所有给予本书出版工作支持与帮助的同志们表示衷心的感谢。

限于我们的水平，书中必有缺点或错误，诚恳地欢迎读者批评指正。

目　录

第一篇　线性代数

第二篇　数　理　方　程

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 一 篇

线 性 代 数

在现实世界中，变量与变量之间的依赖关系是多种多样的。但是，我们可以把它们分成线性的和非线性的两大类。对于许多现象来说，都是在不同程度上与线性变化的规律相接近的。因此，在研究非线性关系时，一个很重要的方法就是把问题线性化，即把问题化为求解线性代数方程组之类的运算。特别是在电子计算机飞速发展和普及的今天，原来难以计算的高阶线性代数方程组的解可以借助电子计算机很快地算出来，这就更促进了线性代数的广泛应用和发展。当今，线性代数知识已成为每个工程技术人员必备的基础知识。

本课程主要介绍线性代数的一些基本知识，包括 n 阶行列式、矩阵、向量的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、二次型等。这些知识在理论和实践中都有重要的价值，特别是矩阵，它是线性代数的重要基础，是研究线性关系的有力工具，必须予以足够的重视。

第一章　n 阶 行 列 式

在中学里，已学过二阶、三阶行列式，并用它来求解二元、三元线性方程组。为了研究含有 n 个未知数的线性方程组的求解问题，需要把行列式的概念推广到 n 阶，即需要讨论 n 阶行列式的问题。

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质和它的计算方法。此外，还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则。

第一节　n阶行列式的定义

大家已经知道二阶行列式和三阶行列式的定义。现在考虑的是：在二阶、三阶行列式的基础上来定义四阶、五阶、直至 n 阶行列式。这种用较低阶的行列式来定义较高阶的行列式的方法叫"递归定义法"。先来讨论二阶行列式与三阶行列式的关系。

二阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &+a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

将上式右端六项两两合并，并利用二阶行列式定义可得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

上式表明，三阶行列式可以转化为三个二阶行列式。为了进一步了解三个二阶行列式与三阶行列式中元素的位置关系，我们引入余子式和代数余子式的概念。

在三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，把元素 $a_{ij}(i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3)$ 所在的第 i 行元素与第 j 列元素删去，剩下的元素所组成的二阶行列式，叫做元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}。我们称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

例如，元素 a_{12} 的余子式与代数余子式分别为

$$M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$$

利用代数余子式的概念，三阶行列式可表示为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}A_{1j}$$

即三阶行列式等于它第一行的每个元素与它的代数余子式的乘积之和。进一步不难验证：三阶行列式等于它的任一行（或任一列）的每个元素与它的代数余子式的乘积之和，即

$$D=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij}\qquad(i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3)$$

上式称为行列式按任意一行（或任意一列）展开。

利用上面的结果，我们给出 n 阶行列式的定义。

定义 设有n^2个数排成n行n列数表

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}$$

定义 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

为

$$D=\begin{cases}a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & 当n=2\\ a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} & 当n>2\end{cases}$$

其中A_{1j}为元素a_{1j}($j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)的代数余子式❶。

与三阶行列式一样，n 阶行列式也可以按任意一行（或列）展开。我们有下面的定理。

定理 n 阶行列式等于它的任一行（或列）的每个元素与它的代数余子式的乘积之和，即

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\qquad(i=1,\ 2\cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

（定理证明从略）

【例 1-1】 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2 & 4\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 5 & 1\end{vmatrix}$$

【解】 根据定义，按第一行展开

❶ n阶行列式中元素a_{ij}的代数余子式的定义方法与三阶行列式中所介绍的相同，不再重复。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$D=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&1&1\\-1&2&3\\0&5&1\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&1&1\\0&2&3\\2&5&1\end{vmatrix}$$

$$+(-2)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&0&1\\0&-1&3\\2&0&1\end{vmatrix}+4\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3&0&1\\0&-1&2\\2&0&5\end{vmatrix}$$

$$=-8+22+2+52=68$$

如果按第二列展开，由于该列有两个元素是零，所以展开式更简单。

$$D=1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&1&1\\0&2&3\\2&5&1\end{vmatrix}+(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&-2&4\\3&1&1\\2&5&1\end{vmatrix}$$

$$=22+46=68$$

为了书写更简便，今后在计算某元素的代数余子式时，可以不写$(-1)^{i+j}$，直接根据下图所示的符号规律确定其符号。

$$\begin{vmatrix}+&-&+&-\\-&+&-&+\\+&-&+&-\\-&+&-&+\end{vmatrix}$$

【例 1-2】 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}$$

其中空白处的元素均为零。

【解】 由于第 1 列的元素除a_{11}外均为零，故可按第 1 列展开

$$D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&\ddots&\vdots\\&&a_{nn}\end{vmatrix}$$

同样，对于上式右边的$n-1$阶行列式也按第一列展开，并以此类推，所以

$$D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&\ddots&\vdots\\&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&\cdots&a_{3n}\\&\ddots&\vdots\\&&a_{nn}\end{vmatrix}=\cdots$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例1-2中的行列式称为三角形行列式。

上面的例子告诉我们，在计算n阶行列式时，为了使计算简便，可选择等于零的元素较多的那一行（或列）展开。在实际计算中，我们往往要利用行列式的性质，使行列式的某行（或某列）元素尽可能多的化为零。

第二节 n阶行列式的性质

n阶行列式与三阶行列式有相同的性质。

性质1 行列式D与它的转置行列式D'相等。其中D'为将行列式D的行与同序号的列互换所得的行列式。

证 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

于是

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $a'_{ij}=a_{ji}$ $(i、j=1,\ 2\cdots,\ n)$。

用数学归纳法。当$n=2$时，结论显然成立，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=D'$$

假设对于$n-1$阶行列式结论成立，即$n-1$阶行列式与它的转置行列式相等。对于n阶行列式D与D'，将D按第一行展开，将D'按第一列展开，得到

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}$$

$$D'=a'_{11}A'_{11}+a'_{21}A'_{21}+\cdots+a'_{n1}A'_{n1}=\sum_{k=1}^{n}a'_{k1}A'_{k1}$$

由于 $a'_{k1}=a_{1k}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，又因$A'_{k1}$与$A'_{1k}$有相同的符号并且$A'_{k1}$是$A_{1k}$的转置行列式（其阶数为$n-1$），所以由归纳法假设

$$A'_{k1}=A_{1k}\qquad(k=1,\ 2\cdots,\ n)$$

由此立即可得 $D=D'$

性质 1 说明了行列式中的行与列有相同的地位，凡是行所具有的性质，对于列也成立，反之也一样。

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式的值变号。（证明从略）。

性质 3 如果行列式中有两行（列）的元素相同，则这个行列式等于零。

证 设行列式D中第i、k两行的元素完全相同。把这两行互换得行列式D_1，由性质2知，$D_1=-D$。另一方面，由于交换的两行完全相同，所以$D_1=D$。由此推得

$$D=0$$

性质 4 行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一个数k，等于用k去乘这个行列式。即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

证 按第i行展开

$$\text{上式左边}=\sum_{j=1}^{n}(ka_{ij})A_{ij}=k\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\text{上式右边}$$

性质 5 行列式中如果有两行（列）的元素对应成比例，则这个行列式等于零。

证　设行列式D中第i、k两行元素对应成比例，比例常数为λ，即$a_{ij}=\lambda a_{kj}$（$j=1, 2, \cdots, n$）。于是

$$D=\begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{k1} & \cdots & \lambda a_{kn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$=0$$

性质 6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证　将上式左边按第i行展开

$$\text{上式左边}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+a'_{ij})A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}+\sum_{j=1}^{n}a'_{ij}A_{ij}$$

$$=\text{上式右边}$$

性质 7　把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个常数后加到另一行（列）的对应元素上去，则行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+\lambda a_{k1} & \cdots & a_{in}+\lambda a_{kn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

这个性质的证明留作习题。

【例 1-3】　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

【解】　利用行列式性质 7，将第一行的元素除第一个外全化为零。

$$D\xlongequal[c_4-2c_1]{c_2+c_1\text{❶}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

---

❶　记号$c_i+\lambda c_k$表示将行列式的第k列元素乘以λ后加到第i列对应元素上去；$r_i+\lambda r_k$表示将行列式的第k行元素乘以λ后加到第i行对应元素上去。如c_4-2c_1表示第 4 列元素减去第 1 列对应元素的 2 倍

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2(4-2) = 4$$

【例 1-4】 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

【解】 这个行列式元素的分布很有规律，它的每一行（列）元素之和都是 6 。于是

$$D \overset{c_1+c_2+c_3+c_4}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}}{\underset{r_4-r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 6\times2\times2\times2 = 48$。

【例 1-5】 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

【解】 **方法1**

$$D \overset{c_1-c_2}{\underset{c_3-c_4}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & y & 1-y \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{\underset{r_4-r_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 1 & y & 1 \\ 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = -x^2\begin{vmatrix} y & 1 \\ 0 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2$$

方法 2 利用行列式性质 5

$$D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1+0 & 1-x & 1 & 1 \\ 1+0 & 1 & 1+y & 1 \\ 1+0 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = D_1 + D_2$$

$$D_1\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-x&0&0\\0&0&y&0\\0&0&0&-y\end{vmatrix}=xy^2$$

$$D_2=x\begin{vmatrix}1-x&1&1\\1&1+y&1\\1&1&1-y\end{vmatrix}=x\left(\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+y&1\\1&1&1-y\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix}-x&1&1\\0&1+y&1\\0&1&1-y\end{vmatrix}\right)=x(D_3+D_4)$$

$$D_3\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&y&0\\0&0&-y\end{vmatrix}=-y^2$$

$$D_4=-x\begin{vmatrix}1+y&1\\1&1-y\end{vmatrix}=-x[(1+y)(1-y)-1]=xy^2$$

所以 $D=x^2y^2$

方法 3 利用行列式的定义，在行列式D的左边与上边添上一列一行得

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&1+x&1&1&1\\0&1&1-x&1&1\\0&1&1&1+y&1\\0&1&1&1&1-y\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_4-r_1\\r_5-r_1}]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\-1&x&0&0&0\\-1&0&-x&0&0\\-1&0&0&y&0\\-1&0&0&0&-y\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+\frac{1}{x}c_2-\frac{1}{x}c_3+\frac{1}{y}c_4-\frac{1}{y}c_5}\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&x&0&0&0\\0&0&-x&0&0\\0&0&0&y&0\\0&0&0&0&-y\end{vmatrix}=x^2y^2$$

在上面的运算中由于出现$\frac{1}{x}c_2$，$\frac{1}{y}c_4$等，故$x\neq0$，$y\neq0$。当$x=0$或$y=0$时，由于D中有二行的元素对应相等，所以$D=c_0$ 故 $D=x^2y^2$ 不论x、y是否为零都是成立的。

例1-5说明了计算行列式的方法可能有几种，我们可以通过练习逐步掌握其计算方法。下面再介绍一种方法。

【例 1-6】 证明

$$D_n=\begin{vmatrix}a+b&ab&0&\cdots&0&0\\1&a+b&ab&\cdots&0&0\\0&1&a+b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a+b&ab\\0&0&0&\cdots&1&a+b\end{vmatrix}_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\ (a\neq b,\ n\geqslant2)$$

证 用数学归纳法，当$n=2$时，

$$D_2=\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}=a^2+ab+b^2=\frac{a^3-b^3}{a-b}$$

所以当$n=2$时结论成立。假设对于$k\leqslant n-1$时结论成立，即

$$D_k=\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}\qquad k\leqslant n-1$$

对于D_n，按第一行展开得

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-ab\begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

再将上式右端的$n-1$阶行列式按第一列展开得

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$$

根据归纳法假设，$D_{n-1}=\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$，$D_{n-2}=\dfrac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}$，故有

$$D_n=(a+b)\frac{a^n-b^n}{a-b}-ab\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}$$

$$=\frac{1}{a-b}(a^{n+1}+a^nb-ab^n-b^{n+1}-a^nb+ab^n)=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

为了下一节证明克莱姆法则的需要，介绍行列式性质3的一个推论。

推论 行列式的某一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零。即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{lk}=0\qquad i\neq l$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0\qquad j\neq l$$

证 设

$$D=\begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}$$

将D按第i行展开有

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$$

将D中的第i行元素换成D中的第l行对应元素，于是有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{lk}A_{ik}=\begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{vmatrix}=0,\ i\neq l$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com