浑沌 Melnikov 方法

李继彬　编著

重庆大学出版社

浑沌与Melnikov方法

李继彬 编著

重庆大学出版社

浑沌与Melnikov方法

李继彬　编著

责任编辑　陈均平

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆大学出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/16　印张：15　字数：　374　千

1988年　8　月第1版　　1989 年　1　月第　1　次印刷

印数：1-2000

标准书号：ISBN 7-5624-0242-6 O·35　　定　　价：3.02元

引　言

在现实世界上，许多物理、力学、化学、生物、经济和社会学中的系统，往往用微分方程所确定的数学模型来描述。为揭示这些模型所反映的系统的内部结构，人们作了各种各样的探索，所获得的成果丰富和充实了微分方程古典学科的内容，促进了该学科的发展，增加了人类对于客观世界的理解。大量事实雄辩地说明，集中精力对付某些有实际背景的系统是发展理论的指南和源泉。

19世纪80年代由H.Poincaré所开创的微分方程定性理论，在本世纪上半期由于与非线性振动的联系，在应用方面获得令人刮目相看的进展；在理论方面，G.D.Birkhoff将经典微分方程所定义的动力系统，抽象为拓扑动力系统。随着50年代以来微分流形和微分拓扑理论的崛起，传统的Euclid空间上定义的微分方程被引伸到微分流形上定义的动力系统，在近20余年中，形成了崭新的微分动力系统新学科，获得了许多优秀的成果。动力系统理论是与时间的发展有关的数学。该理论的一般目标是寻找有效的方法，回答问题：随着时间的演化，系统的性质如何？理论的发展沿着两条并行的路线，一方面，发现简单性，可理解性和稳定性；另一方面，揭示复杂性，不稳定性和浑沌性。

微分动力系统理论的新成果源于微分方程而又反作用于微分方程，提供了人们对于高维系统所确定的连续流的动态复杂性以理论的思维。这是符合认识发展的辩证法的。1967年，动力系统专家S.Smale说过，“……常微分方程定性理论中出现的若干现象和问题，在微分同胚问题中以最简单形式同样出现。因此，作为第一步，在微分同胚中发现定理，第二步，通常是倒回去，将它们翻译为微分方程理论中的结果。”这样一种“倒回去”的工作，简言之，即微分方程中的动力系统方法。编写本书的目的，是介绍微分动力系统反作用于常微分方程的理论和应用中，涉及对系统的复杂性认识的某些初步结果。

近年来，物理、力学、化学的各种实验和计算机模拟所发现的事实说明，高于二维的微分方程所确定的系统，其轨道具有复杂的浑沌（Chaos）性质。什么是浑沌性，如何理解这种现象？系统是如何随参数的改变而过渡到浑沌状态的？有些什么样的数学处理方法和技巧？本书将对上述问题作出某些在数学上已经获得理解的回答。本书将着重介绍Smale马蹄型浑沌的Melnikov测量方法。

全书共八章。第一章介绍动力系统的基本概念。第二章涉及符号动力系统和Li-Yorke关于浑沌的定义。第三章论述二维周期系统与二维映射的关系。第四章介绍Smale马蹄理论及横截同宿性的定理。第五章简论平面Hamilton系统的性质和系统的闭轨道族的周期性质。第六章对二维周期扰动系统的Melnikov方法和更替法作细致讨论。第七章着重介绍应用实例和分枝到Smale马蹄的途径。第八章论述高维系统的横截同宿现象与Melnikov方法的推广。书末给出了一个附录，列出近百个Jacobi椭圆函数的有理函数的Fourier展式，供计算Melnikov函数时引用（该附录摘自笔者与万世栋撰写的“Jacobi椭圆函数有理式的Fourie级数”，原文载于《应用数学和力学》，1988年第9卷第6期）。

本书第七章初稿由刘曾荣执笔，其余各章均由李继彬执笔。赵晓华同志协助作者作了许多具体工作，昆明工学院教材科为本书的撰写创造了许多条件，作者在此表示衷心的感谢。

由于本书内容涉及正在飞速发展中的非线性动力系统的分枝与浑沌领域，新的结果层出不穷，作者仅选择了部分内容进行介绍，文献难免挂一漏万，取材恐有不当，内容或有漏误，热忱欢迎读者不吝指正。

目　录

第一章　动力系统的基本概念

§1　流和离散动力系统

"动力系统"这个名词，由Poincaré研究多体问题——质点组动力学问题而产生。后来被发扬光大，沿用下来，在数学上具有确定的含意。

考虑定义于Euclid空间$\mathbf{R}^n$上的微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(x) \tag{1.1}$$

其初始条件为$x(0)=x_0$。设$f\in C^1(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)$，$x_0\in\mathbf{R}^n$，则(1.1)的初值问题解$x=\varphi(t,\ x_0)$局部存在唯一。再增加全局解存在唯一等条件，可设解$\varphi(t,x_0)$对于一切$t\in\mathbf{R}$，$x_0\in\mathbf{R}^n$，都是存在唯一的，由微分方程一般理论可知，函数$\varphi(t,x_0)$满足性质

(i) 确定性：$\forall s,t\in\mathbf{R}$，$x\in\mathbf{R}^n$，有

$$\varphi(0,x)=x;\ \varphi(s+t,x)=\varphi(s,\varphi(t,x))$$

(ii) 连续性：$\varphi(t,x)$关于变元t,x在$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$连续。满足这两个性质的映射$\varphi:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$构成以$t$为参数的$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^n$的单参数连续变换群。$\varphi$称为$\mathbf{R}^n$中定义的动力系统或流。

对于给定的$x\in\mathbf{R}^n$，集合

$$\mathrm{Orb}_\varphi(x)\overset{\text{def}}{=\!=}\{\varphi(t,x)\,|\,t\in\mathbf{R}\}\subset\mathbf{R}^n$$

称流ϕ过点x的轨道。$\mathbf{R}^n$称为状态空间或相空间，每个点$x\in\mathbf{R}^n$称为一个状态。

如果抛开微分方程，设X是一个拓扑空间（或C^r微分流形），一般地考虑连续映射（C^r-映射）φ：$\mathbf{R}\times X\to X$，并设φ满足确定性条件

(1°) $\varphi(s+t,x)=\varphi(s,\varphi(t,x))$，$\forall s,t\in\mathbf{R}$，$x\in X$；

(2°) $\varphi(0,x)=x$，$\forall x\in X$；

此时称φ为定义在X上的一个拓扑动力系统（C^r动力系统），或称X上的$C^0(C^r)$流。

对于任意取定的$t\in\mathbf{R}$，由于$\varphi(t,\cdot)$定义了一个以t为参数的连续(C^r)映射，简记为φ^t，条件(1°)(2°)可改写为

(1) $\varphi^{s+t}=\varphi^s\cdot\varphi^t$，$\forall s,t\in\mathbf{R}$；

(2) $\varphi^0=id$。

由于对任何固定的t，φ^t有逆映射φ^{-t}，因此，φ^t是一个同胚（C^r微分同胚）。在拓扑空间X上定义的上述流ϕ同样关于t构成单参数变换群，参数的取值范围是实数加群$(\mathbf{R},+)$。

如果对流进行离散采样，研究它每隔一段时间间隔T的状态，我们得到一个两边有无穷多项的序列

$$\cdots,\ \varphi^{-2T},\ \varphi^{-T},\ \varphi^0=id,\ \varphi^T,\ \varphi^{2T},\ \cdots.$$

这个序列由同胚$f=\varphi^T$所生成：

$$\varphi^{kT}=\varphi^T\circ\varphi^T\circ\cdots\circ\varphi^T=f\circ f\circ\cdots\circ f=f^k \tag{1.2}$$

$$\varphi^{-kT}=\varphi^{-T}\circ\varphi^{-T}\circ\cdots\circ\varphi^{-T}=f^{-1}\circ f^{-1}\circ\cdots\circ f^{-1}=f^{-k} \tag{1.3}$$

φ^T称为流φ的时刻T映射，特别，φ^1称流φ的时刻1映射。流φ^t的时刻T映射可看作流$\psi^t=\varphi^{Tt}$的时刻1映射，因此，只须考虑$T=1$的情形。

一般地，任给一个同胚（C^r微分同胚）f，f不一定是某个流的时刻1映射，同样能够生成一个双边序列

$$\cdots,\ f^{-2},\ f^{-1},\ f^{0},\ f^{1},\ f^{2},\ \cdots, \tag{1.4}$$

其中，$f^\circ=id$，　$f^k=f\circ f^{k-1}=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k重}$.

$$f^{-k}=(f^{-1})^k$$

显然f满足关系

(i) $f^{k+l}=f^k\circ f^l$，$\forall k,\ l\in\mathbf{Z}$,

(ii) $f^\circ=id$.

与流的情形类比，人们称这种由同胚(C^r微分同胚)生成的双边序列为离散动力系统。离散的动力系统也是一个单参数变换群，其参数取值范围是整数加群（$\mathbf{Z}$，+）。

流与离散动力系统有什么关系呢？上面已经讲过，流经过采样离散化而得到一个离散动力系统。流的时刻1映射总是一个同胚。反过来，采取“扭扩”(Suspension)的方式，可以把任意的同胚与适应的流联系起来。

设M是一个C^r流形，$\dim M=m$，f：$M\to M$是一个C^r微分同胚，在$\mathbf{R}\times M$上我们定义一个十分简单的流

$$\psi^t(r,\ x)=(t+r,\ x) \tag{1.5}$$

考虑$\mathbf{R}\times M$上的等价关系～：

$(s,y)\sim(r,x)$当且仅当$s-r\in\mathbf{Z}$，$y=f^{-(s-r)}(x)$，按这种等价关系可以构造$\mathbf{R}\times M$的商空间。

$$\widetilde{M}=\mathbf{R}\times M/\sim$$

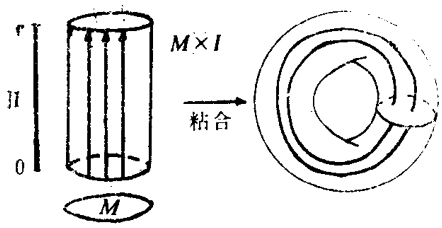

图1.1.1　微分同胚的扭扩流

换言之，把形如$(r+k,\ f^{-k}(x))(k\in\mathbf{Z})$的点等同起来看作一个点，得到空间$\widetilde{M}$，根据流形理论，$\widetilde{M}$具有$C^r$结构，是$m+1$维$C^r$流形。

上述扭扩过程的几何解释如图1.1。取$I\times M(I=[0,1])$和一个单位向量场X，指向I方向，将$I\times M$的两端粘合在一起，即令$(0,x)$与$(1,f(x))$相等同，中间用连续流连接起来，得到$m+1$维光滑流形$I\times M$上的向量场，这个向量场确定的流即C^r微分同胚f的扭扩流。

如前所述，如果$(s,y)\sim(r,x)$，则

$$\psi^t(s,y)=(t+s,y)\sim(t+r,x)=\psi^t(r,x)$$

因此，ψ^t锈导出$\widetilde{M}$上的C^r流$\widetilde{\psi^t}$。反过来，如果把M与$\widetilde{M}_0=\{0\}\times M/\sim$等同起来，$f$可以看作$\widetilde{M}_0$上的$C^r$微分同胚。流$\widetilde{\psi^t}$从$\widetilde{M}_0$上任意一点$x$出发，都要返回$\widetilde{M}_0$，第一次返回的点即$f(x)$。因此，$\widetilde{M}_0$是流$\widetilde{\psi^t}$的一个截面，$f$恰好是$\widetilde{\psi^t}$的第一返回映射，又称Poincare映射。

上面的讨论说明，流与离散动力系统密切相关。因此，研究流所获得的结论，往往能用于微分同胚情形。反之，在一定条件下，由微分同胚获得的信息，可用于研究流。

对于微分方程所定义的经典动力系统，通过对时间t周期地“取样”，构造Poincare映

射可以得到低一维的微分同胚系统。正因为关于时间具有周期性的向量场"取样"作横截面，与微分同胚之间有上述密切关系。才激励着离散动力系统理论近30年的大量著作和研究。人们首先在微分同胚的研究中发现定理，反过来又用之于微分方程，以获得相应的结果。

上面的讨论都是由同胚(C^r微分同胚)生成的系统，如果我们更一般地考虑连续映射(C^r映射)的迭代：$f^0=id$，f^1，f^2，…，f^k，…，$k\in \mathbf{Z}^+$，这样得到的系统称拓扑半动力系统(C^r微分半动力系统)。

§2 基本定义与性质

设X是拓扑空间(C^r流形)，f：$X\to X$是一个同胚(C^r微分同胚)。

定义2.1 集合

$$\mathrm{Orb}_f(x)=\{f^k(x)\mid k\in \mathbf{Z}\}$$
$$\mathrm{Orb}_f+(x)=\{f^k(x)\mid k\in \mathbf{Z}^+\}$$
$$\mathrm{Qrb}_f-(x)=\{f^{-k}(x)\mid k\in \mathbf{Z}^+\}$$

分别称为离散动力系统f过点x的轨道，正半轨道和负半轨道。

显然

$$\mathrm{Orb}_f(x)=\mathrm{Orb}_f+(x)\bigcup \mathrm{Orb}_f-(x)$$

如果不产生符号混淆，可简记$\mathrm{Orb}_f(x)$为$\mathrm{Orb}(x)$.

定义2.2 若存在正整数$n\geqslant 1$，使得$f^n(x)=x$成立，称x为f的周期点；使得$f^n(x)=x$成立的最小自然数n，称为x的周期。特别，周期为1的点，称为f的不动点。

用记号$\mathrm{Per}(f)$和$\mathrm{Fix}(f)$分别表示f的周期点集合和不动点集合，显然，$\mathrm{Fix}(f)\subset \mathrm{Per}(f)$。

定义2.3 设$x\in X$，若存在正整数$m>0$，使得$f^m(x)$是f的周期点，则称x为f的准周期点(或称终于周期点)，f的终于周期点集合记为$E\mathrm{Per}(f)$。

f的周期点必定是准周期点，反之不真。且有关系

$$\mathrm{Per}(f)\subset E\mathrm{Per}(f)=\bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(\mathrm{Per}(f))$$

定义2.4 设$x\in X$，若对x的任意邻域$U(x)\subset X$，都存在$n>0$，使$f^n(x)\in U(x)$，则称x为f的回复点。

f的全体回复(recurrence)点记为$\mathrm{Rec}(f)$。显然$\mathrm{Per}(f)\subset \mathrm{Rec}(f)$。

定义2.5 集合

$$\omega(x)=\bigcap_{n\in \mathbf{N}}\overline{\{f^k(x)\mid k\geqslant n\}}$$

与

$$\alpha(x)=\bigcap_{n\in \mathbf{N}}\overline{\{f^{-k}(x)\mid k\geqslant n\}}$$

分别称为$\mathrm{Orb}_f(x)$的ω极限点集与α极限点集。其中，$\mathbf{N}$表示正整数集合。

由定义2.5可见，$\omega(x)$和$\alpha(x)$都是闭集。如果X是紧致度量空间，则$\omega(x)\neq\phi$，$\alpha(x)\neq\phi$，$\forall x\in X$。

定义2.6 设$x\in X$，如果存在x的邻域$U(x)$使得$f^k(U(x))\cap U(x)=\phi$，$\forall k\in\mathbf{Z}-\{0\}$，则称$x$是$f$的游荡点。不是游荡点的点称非游荡(nonwandering)点，换言之，对于x的任意邻域$U(x)$，都存在整数$k\neq 0$，使得$f^k(U(x))\cap U(x)\neq\phi$，则称$x$为$f$的非游荡点。

f的全体非游荡点的集合称为f的非游荡集，记为$\Omega(f)$。由定义2.6可知，f的游荡点集是开集，而非游荡点集$\Omega(f)$是闭集。

定义2.7 设集合$\wedge\subset X$，且$f(\wedge)=\wedge$(对于半动力系统$f(\wedge)\subset\wedge$)，则称$\wedge$为f的不变集。又若$\wedge$是f的非空闭不变集，并且不存在真包含于它之中的非空闭不变集，则称$\wedge$为f的极小集。

定理2.1 设f：$X\to X$是连续映射，则

(i) $\Omega(f)$是闭集。(ii) $\bigcup_{x\in X}\omega(x)\subset\Omega(f)$，从而$\Omega(f)$非空。

(iii) 全体周期点集$\mathrm{Per}(f)\subset\Omega(f)$。

(iv) $f(\Omega(f))\subset\Omega(f)$；又若$f$为同胚，则$\Omega(f)$为不变集，即$f(\Omega(f))=\Omega(f)$。

证：(i) 根据定义2.6，显然$X-\Omega(f)$为开集，从而$\Omega(f)$是闭集。

(ii) 设$x\in X$，$y\in\omega(x)$，兹证$y\in\Omega(f)$，记V为点y的邻域，兹求满足$f^{-n}(V)\cap V\neq\phi$的$n\geqslant 1$，从而存在$n\geqslant 1$与某个$z\in V$，满足$f^n(z)\in V$，因为$y\in\omega(x)$，故存在自然数列$\{n_i\}$，有$f^{n_i}(x)\to y$，选择$n_{i0}<n_{i1}$，且$f^{n_{i0}}(x)\in V$，$f^{n_{i1}}(x)\in V$，于是取$n=n_{i1}-n_{i0}$，$z=f^{n_{i0}}(x)$即得所证。

(iii) 倘若$f^n(x)=x$，$n>0$，U是x的邻域，则有$x\in f^{-n}(U)\cap U$，从而$x\in\Omega(f)$。

(iv) 设$x\in\Omega(f)$，V为$f(x)$的邻域，则$f^{-1}(V)$是x的邻域，从而存在某个$n>0$，使得$f^{-(n+1)}(V)\cap f^{-1}(V)\neq\phi$，因此，$f^{-n}(V)\cap V\neq\phi$，故$f(x)\in\Omega(f)$，即$f(\Omega(f))\subset\Omega(f)$。

如果f是同胚，必有$\Omega(f)=\Omega(f^{-1})$故由上所证，$f^{-1}(\Omega(f))\subset\Omega(f)$从而$f(\Omega(f))=\Omega(f)$，即$\Omega(f)$为不变集。

定义2.8 (i) 连续映射f：$X\to X$称为单边拓扑传递的(topologically transitive)，倘若存在某些$x\in X$，其半轨道$\{f^n(x)\mid n\geqslant 0\}$在$X$中稠；(ii) 同胚映射$f$：$X\to X$称为拓扑传递的，倘若存在某些$x\in X$，使得$\mathrm{Orb}_f(x)=\{f^n(x)\mid n\in\mathbf{Z}\}$在$X$中稠。

如果同胚f是单边拓扑传递的，称f是拓扑混合的(mixing)。存在例子说明，拓扑传递的同胚f并不是拓扑混合的。反之，若f拓扑混合，f必拓扑传递，并且$\Omega(f)=X$。

定理2.2 设f：$X\to X$是紧致度量空间的同胚，则下面的说法等价：

(i) f是拓扑传递的；

(ii) 设E是X的闭子集，是f的不变集，则或者$E=X$，或者E无处稠密(换言之，对于任何满足$f(U)=V$的开子集$U\subset X$，或者$U=\phi$或者U为稠集)；

(iii) 对于任何非空开集U,V，存在$n\in\mathbf{Z}$，使得$f^n(U)\cap V\neq\phi$；

(iv) 集合$\{x\in X:\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}=X\}$是稠的$G_\delta$集合；

证 (i)⇒(ii)，设$x_0\in X$，$\mathrm{Orb}_f(x_0)$在X中稠，从而$\overline{\mathrm{Orb}_f(x_0)}=X$。设$E\neq\phi$，且$E$为闭集，关于$f$不变。若$U$为开集且$U\subset E$，$U\neq\phi$，则存在$p$使得$f^p(x_0)\in U\subset E$，从而

$\mathrm{Orb}_f(x_0)\subset E$，即$X=E$，因此，或者$E$无内点，或者$E=X$。

(ii)⇒(iii)设U，V为非空开集，则$\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(U)$为开集且关于$f$不变，由条件(ii)，这个集合必为稠集，从而$\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(U)\cap V\neq\phi$。

(iii)⇒(iv)，用U_1，U_2，…，U_n表示X的可数基，则集合$\{x\in X\mid \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}=X\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=-\infty}^{\infty} f^m(U_n)$，且由条件(iii)$\bigcup\limits_{m=-\infty}^{\infty} f^m(U_n)$稠，由此即得(iv)的结果。

由(iv)⇒(i)是显然的。

§3 拓扑共轭与结构稳定性

设X和Y是拓扑空间（C^r微分流形，$f:X\to X$和$g:Y\to Y$是同胚（C^r微分同胚）。

定义3.1 如果存在从空间X到空间Y的同胚$h:X\to Y$，使得$h\circ f=g\circ h$，即以下图表可交换，则称f与g拓扑共轭。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \big\downarrow h & & \big\downarrow h \\ Y & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

显然，拓扑共轭是全体同胚空间上的等价关系。

拓扑共轭h把系统f过x点的轨道变成系统g过$h(x)$点的轨道，把轨道$\mathrm{Orb}_f(x)$的$\omega(\alpha)$极限点变成轨道$\mathrm{Orb}_g h(x)$的$\omega(\alpha)$极限点，把f的n周期点变成g的n周期点，把f的非游荡点变成g的非游荡点，等等。总之，拓扑共轭的两个系统有相同的轨道结构。因此，研究动力系统时，拓扑共轭的两个系统可看作同一个系统。

在许多情形，拓扑共轭的要求似太高。人们寻找一些较弱的关系，其中之一是Ω共轭，即限制在各自的非游荡集上的拓扑共轭。

定义3.2 系统f和g称为Ω共轭，倘若存在同胚$h:\Omega(f)\to\Omega(g)$使得以下图表可交换

$$\begin{array}{ccc} \Omega(f) & \xrightarrow{f|_{\Omega(f)}} & \Omega(f) \\ h\big\downarrow & & \big\downarrow h \\ \Omega(g) & \xrightarrow[g|_{\Omega(g)}]{} & \Omega(g) \end{array}$$

容易看出，Ω共轭也是一种等价关系，在今后的研究中，我们常用这种等价关系。

一个动力系统在什么样的条件下经过“扰动”而不改变轨道结构（Ω集结构）？称为系统扰动后的“坚持性”问题，即所谓结构稳定性（Ω稳定性）问题，这是动力系统理论的中心问题之一。

什么叫做系统的“小扰动”呢？扰动与一切映射组成的空间的拓扑有关。

先考虑Euclid空间的映射，设$U\subset\mathbf{R}^n$是一个开集，对映射集合，引进C^r弱拓扑，即“在任何紧集上直到r阶微分一致收敛的拓扑”。任给$f\in C^r(U,\mathbf{R}^n)$，f的基本邻域为

$$u(f,K,\varepsilon)=\{g\in C^r(U,\mathbf{R}^n)\mid \sup_{x\in X}\|D^jg(x)-D^jf(x)\|<\varepsilon,\quad j=0,1,\cdots,r\}$$

其中$K\subset U$是任意紧集，ε是任意正实数。注意，高阶微分$D^jg(x)$是一个j重线性映射，$\|D^jg(x)\|$表示j重线性映射的模，模的一种取法为

$$\| D^j g(x) \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{\substack{j_1, \cdots, j_n \geqslant 0 \\ j_1+j_2+\cdots+j_n=j}} \left| \frac{\partial^j g_i(x)}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \cdots \partial x_n^{j_n}} \right|$$

可以证明，由上面的邻域系给出的拓扑，收敛性意味着在任意紧集$K \subset U$上直到r阶微分的一致收敛性。并且，这种拓扑可以距离化。

其次，考虑C^r流形M到C^r流形N的C^r映射集合$C^r(M,N)$，我们同样赋予这个集合以C^r弱拓扑，与$\mathbf{R}^n$中映射不同之点在于通过局部坐标卡来定义邻域基。

设$f \in C^r(M,N)$，(U,φ)和(V,ψ)，分别是M和N的局部坐标卡，$\overline{U}$紧致，$f(\overline{U}) \subset V$，$K \subset U$为紧致集，$\varepsilon$为任意实数，取形如

$$u(f;\ (U,\varphi),\ (V,\psi),\ K,\varepsilon) = \{ g \in C^r(M,N) \mid \| \psi \circ g \circ \varphi^{-1} - \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \|_K^r < \varepsilon \}$$

的集合为子基所生成的拓扑，称C^r弱拓扑，其中

$$\| g \|_K^r \overset{def}{=\!=\!=} \max_{0 \leqslant j \leqslant r} \sup_{x \in K} \| D^j g(x) \|$$

在微分动力系统理论中常涉及$M = N$为紧致流形情形，为简单起见，记$\mathrm{Diff}^r(M)$表示M到M的C^r微分同胚集合。由微分流形理论可知，$\mathrm{Diff}^r(M)$是$C^r(M,M)$中的开集。$\mathrm{Diff}^r(M)$中的C^r弱拓扑，指它作为$C^r(M,M)$子集所诱导出的拓扑。

定义3.3 $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$称为是C^r结构稳定的(C^r-Ω结构稳定的)，如果存在f在C^r拓扑中的邻域u，使得任意$g \in u$，都与f拓扑共轭（Ω共轭）。

由定义3.3可见，C^r结构稳定的系统(C^r-Ω稳定的系统)在C^r小扰动下不改变其轨道（Ω集）结构。经常考虑$r=1$的情形，如不混淆，一般就称为结构稳定性（Ω稳定性）。

在一些问题的研究中，还涉及f在其不变集$\wedge$上的结构稳定性概念，为此有以下定义：

定义3.4 设M是一个C^r流形，$U \subset M$是一个开集，$f \in C^r(U,M)$是到象集的微分同胚，$\wedge \subset U$是f的一个紧致不变集。称f在$\wedge$上C^r结构稳定，倘若对任给的$\varepsilon > 0$，存在f在$C^r(U,M)$中的邻域u，使得对任意$g \in u$，存在关于g不变的子集$\wedge_g$和同胚h：$\wedge \to \wedge_g$，满足

(i) $d(h(x),x) < \varepsilon \quad \forall x \in \wedge$，

(ii) $h \circ f|_\wedge = g \circ h|_\wedge$，即以下图表可交换

$$\begin{array}{ccc} \wedge & \xrightarrow{f} & \wedge \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \wedge_g & \xrightarrow{g} & \wedge_g \end{array}$$

f在不变集$\wedge$上的结构稳定性意味着：经过C^r小扰动，f的不变集$\wedge$不改变其结构，仅在位置上稍有移动。

微分动力系统理论中发展得较系统的是结构稳定性问题，$\mathrm{Diff}(M)$中一切结构稳定的系统记为$SS(M)$。与之相对应，$\mathrm{Diff}(M)$中除$SS(M)$后的余集称为分枝(bifurcafion)集。每个$\mathrm{Diff}(M)$中的“点”称为分枝点，对应于一个结构不稳定的系统。换言之，在分枝点的任何邻域内总存在另一系统，在M上的拓扑结构与原系统不等价。动力系统分枝理论是当今十分有趣的课题。

第二章　符号动力系统，拓扑熵与浑沌概念

符号动力系统是一个特殊的动力系统。通过类比的方法，用符号模型来研究任意的动力系统，称为符号动力系统方法。浑沌是近二十余年来在自然科学中发现的一类普遍存在的深刻的自然现象。本章介绍如何通过符号动力系统的性质认识和理解浑沌概念。

§1　符号动力系统

考虑N个符号的集合，例如N个数字的集合

$$S(N)=\{0,1,2,\cdots N-1\}$$

对上述集合赋予离散的拓扑，构成一个拓扑空间（其任意子集都为开集）。该拓扑空间可以距离化，例如，$\forall\ a,b\in S(N)$，兹定义距离

$$\delta(a,b)=\begin{cases}1, & \text{若} a\neq b\\ 0, & \text{若} a=b\end{cases}$$

可数个空间$S(N)$的笛卡儿积

$$\sum(N)=\prod_{j=-\infty}^{+\infty}S_j,\ S_j=S(N) \tag{1.1}$$

或

$$\sum(N)=\prod_{j=0}^{+\infty}S_j,\ S_j=S(N) \tag{1.2}$$

称为符号空间，其元素分别为双边符号序列S：

$$\cdots,\ S_{-2},\ S_{-1};\ S_0,\ S_1,\ S_2,\ \cdots \tag{1.3}$$

或单边符号序列S：$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \cdots$　　(1.4)

前者$\Sigma(N)$称双边符号空间，后者$\Sigma(N)$称单边符号空间。符号序列中的某一段$S_0,S_1,S_2,\cdots,S_{n-1}$称为序列$S$的$n$节。对$\Sigma(N)$引入距离

$$d(s,t)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(s_j,t_j)}{2^{|j|}} \tag{1.5}$$

其中$s=(\cdots,s_{-2},s_{-1};\ s_0,s_1,s_2\cdots)$，$t=(\cdots,t_{-2},t_{-1};\ t_0,t_1,t_2,\cdots)$，（单边情形1.5中$j$从0开始求和），$\Sigma(N)$可以距离化。

命题1.1　符号空间$\Sigma(N)$是紧致的，完全的，完全不连通的距离空间。

证　(i)由Тихонов定理知，$\Sigma(N)$紧致，因为有限的离散空间$S(N)$紧致，从而其乘积空间$\Sigma(N)$紧致。

(ii) 只须证明：对任意$S\in\Sigma(N)$，存在点列$\{S^{(n)}\}\subset\Sigma(N)\setminus\{S\}$，以$S$为极限，设$S$由(1.3)表示，兹取

$$S^{(n)} = (\cdots, s_{-2}, s_{-1};\ s_0, s_1, s_2, \cdots, s_n^*, \cdots) \tag{1.6}$$

其中

$$s_n^* = \begin{cases} 1, & 若 s_n = 0, \\ 0, & 其它情形. \end{cases}$$

显然，$S^{(n)} \in \Sigma(N) \backslash \{S\}$，且有 $\lim\limits_{n \to +\infty} S^{(n)} = S$，从而$\Sigma(N)$完全。

(iii) 兹证$\Sigma(N)$中任何连通集至多只能含一点，从而$\Sigma(N)$完全不连通。事实上，设S，t为$\Sigma(N)$的子集D中两个不同的点，$s_k \neq t_k$。考虑两个开集

$$U = \{u \in \Sigma(N) \mid u_k = s_k\}$$
$$V = \{v \in \Sigma(N) \mid v_k \neq s_k\}$$

显然有

$$U \cup V = \Sigma(N),\quad U \cap V = \phi$$
$$s \in U \cap D,\quad t \in V \cap D$$

因此D不连通。即$\Sigma(N)$的任何连通子集至多包含一点。证毕。

拓扑学中的一个定理说：任何紧致的，完全的，完全不连通的距离空间都同胚于Cantor三分集。因此，$\Sigma(N)$同胚于Cantor三分集。

在符号空间$\Sigma(N)$上引入移位映射σ：$\Sigma(N) \to \Sigma(N)$定义如下：

$$\sigma(s) = \sigma(\cdots, s_{-2}, s_{-1};\ s_0, s_1, s_2, \cdots) = (\cdots, s_{-2}, s_{-1}, s_0;\ s_1, s_2 \cdots)$$

即$(\sigma(s))_j = s_{j+1}$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$或$j = 0, 1, 2, \cdots$)，换言之，$\sigma$的作用是将双边或单边符号序列左移一位（分号右移一位）。显然，双边符号序列的移位映射确定了一个动力系统，而单边符号序列的移位映射定义了一个半动力系统。它们有以下的动力学性质。

命题1.2 σ的周期集合$PP(\sigma) = \mathbf{Z}^+$，即存在可数无穷多个周期轨道。

证 对任给的$n > 0$，取$s \in \Sigma(N)$，s以$(\underbrace{0, 0, \cdots, 1}_{n\text{个}})$作为生成节，即$s$为以此节循环的循环列。显然，$s$为$\sigma$的周期$n$点，由$n$之任意性即得命题的结论。

命题1.3σ的周期点集在$\Sigma(N)$中稠密；即

$$\overline{\mathrm{Per}(\sigma)} = \Sigma(N)$$

证 对任意的$r \in \Sigma(N)$，取它的$-m$项到m项的一段作节，令其循环，得周期点$r^{(m)}$的循环列，因为m可任意大，且$r^{(m)} \to r$，当$m \to +\infty$时，从而r的任意邻域内都有周期点，即$\overline{\mathrm{Per}(\sigma)} = \Sigma(N)$。

命题1.4 σ存在稠轨道，从而σ是拓扑传递的（对于单边符号序列，σ是拓扑混合的）。换言之，存在$s \in \Sigma(N)$，使$\overline{\mathrm{Orb}(s)} = \Sigma(N)$。

证 由命题1.3，只须证明存在$s \in \Sigma(N)$，使得$\mathrm{Per}(\sigma) \subset \omega(s, \sigma) \subset \overline{\mathrm{Orb}(s)}$即可，其中$\omega(s, \sigma)$表示$s$的$\omega$极限集，$\overline{\mathrm{Orb}(s)}$表示$s$的轨道的闭包。

N个不同的元素$0, 1, 2, \cdots, N-1$取n个可重复排列的种数为N^n种，因此，σ的n周期轨道有N^n个。对一切$n \geq 1$，取N^n个n生成节按任意顺序首尾相接得到共nN^n项的节$(s_0^{(n)}$，

$s_1^{(n)}$, …, $s_{nN^n-1}^{(n)}$)。再按$n=1$, 2, …的顺序将上述节首尾相连，取它作为我们要构造的 s 的正标号项，再任意取 s 的负标号项，首尾相接起来构造出 s 。

任取一点$p\in \mathrm{Per}(\sigma)$，兹证存在$n_i$，当$n_i\to\infty$时，$\rho(\sigma^{n_i}(s), p)\to 0$，这说明$p\in\omega(s,\sigma)$，从而$Per(\sigma)\subset\omega(s,\sigma)$。事实上，对任意的$i>0$，存在周期点$q\in Per(\sigma)$，$q$以$p$的一节为 i 生成节，因此，$\rho(q,p)\leqslant 2\sum\limits_{n=i}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$，由$s$的构造可知，存在$n_i$使$\sigma^{n_i}(s)$的 i 节与q的i生成节相同，从而$\rho(\sigma^{n_i}(s),p)\leqslant 2\sum\limits_{n=i}^{\infty}\frac{1}{2^n}\to 0$，当 $i\to+\infty$。

引理1.5 设$k>0$为整数，$x>0$为实数，$[x]$表示x的整数部分，则

(i) $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{[kx]}{k}=x$；(ii) 若$x\in(0,1)$，则对一切$k\geqslant 0$，$[kx]-[(k-1)x]\leqslant 1$。

命题1.6 存在不可数子集$S\subset\Sigma(N)-Per(\sigma)$，满足

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\rho(\sigma^n(x),\sigma^n(y))\geqslant 1$，$\forall x, y\in S$，$x\neq y$；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\rho(\sigma^n(x), \sigma^n(y))=0$，$\forall x,y\in S$；

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\rho(\sigma^n(x), \sigma^n(y))\geqslant 1$，$\forall x\in S$，$\forall y\in Per(\sigma)$.

证 兹设$N=2$，并对单边符号空间证明本命题。证$\Sigma(N)=\Sigma_2$。并设$\Sigma_2^0=\{x\in\Sigma_2 \mid x_0=0\}$，$\Sigma_2^1=\{x\in\Sigma_2 \mid x_0=1\}$。显然，$\Sigma_2^0$，$\Sigma_2^1$都是$\Sigma_2$的紧致子集，且$\Sigma_2^0\cap\Sigma_2^1=\phi$，$\sigma(\Sigma_2^i)=\Sigma_2$，$(i=0,1)$。

记$M=\{E_n\}_0^\infty$为一个集合序列，其中$E_n=\Sigma_2^0$或Σ_2^1，$\forall n\geqslant 0$。用μ表示一切这种序列的全体。对每个$M\in\mu$，注意到E_n的定义和移位映射定义即知，存在唯一的$x\in\Sigma_2$使得$\sigma^n(x)\in E_n$，$\forall n\geqslant 0$。因此集合序列M与Σ_2中元之间存在唯一的对应关系。

用$P(M,l)$记M中当$0\leqslant n\leqslant l$时，$E_n=\Sigma_2^0$的个数，以下对每个实数$r\in(0,1)$构造一个集合列$M^r=\{E_n^r\}\in\mu$，使得$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{P(M^r,k^2)}{k}=r$。这样的$M^r\in\mu$存在但不唯一，归纳构造如下：令$k_0\geqslant 1$为使得$[kr]=1$的最小正整数。记$M_{k_0}^r=\{E_0^r, E_1^r, \cdots, E_{k^2}^r\}$，其中$E_i^r=\Sigma_2^1$，$0<i<k_0^2$，$E_{k_0^2}^r=\Sigma_2^0$。设对$k>k_0$时，$M_k^r$已有定义，兹记$M_{k+1}^r=\{E_0^r, E_1^r\ E_{(k+1)^2}^r\}$，$M_{k+1}^r$的前面$k^2+1$项与$M_k^r$的相同，从$k^2+1$个指标开始定义为

$$E_i^r=\Sigma_2^1,\text{当}k^2+1\leqslant i\leqslant(k+1)^2,$$

$$
E^r_{(k+1)^2}=\begin{cases}\Sigma^1_2, & \text{当}[(k+1)r]-[kr]=0\\ \Sigma^0_2, & \text{当}[(k+1)r]-[kr]=1,\end{cases}
$$

这样就完成了归纳定义的步骤，得到$M^r=\left\{E^r_n\right\}_0^\infty\in\mu$。

设$x^r\in\Sigma_2$满足关系$\sigma^n(x^r)\in E^r_n$，$\forall n\geqslant 0$，从M^r的构造立即可得

$x^r_n=0\Longleftrightarrow$存在$k>0$，使$n=k^2$，且$[kr]-[(k-1)r]=1$。注意到$p(M^r,\ k^2)$的定义以及$M^r$的构造可见，$P(M^r,\ k^2)=[k_r]$，$\forall k\geqslant 1$成立，因此由引理1.5可知，

$$
\lim_{k\to\infty}\frac{P(M^r,k^2)}{k}=\lim_{k\to\infty}\frac{[kr]}{k}=r
$$

对每个$r\in(0,1)$，令上面构造的$M^r\in\mu$与之对应，从而r也对应于Σ_2中的一点x^r，$\sigma^n(x^r)\in E^r_n$，$\forall n\geqslant 0$。从M^r的构造可见，若$0<r<r_1<1$，则$x^r\neq x^{r_1}$，事实上，从M^r的构造可见，当$r\neq r_1$时存在无穷多个$k>0$，使$E^r_{k^2}\neq E^{r_1}_{k^2}$，从而$M^r\neq M^{r_1}$，否则就有$r=r_1$导出矛盾。

用上述方法我们得到一个集合

$$
S=\{x^r\in\Sigma_2\,|\,r\in(0,1)\}.
$$

S与$(0,1)$的点一、一对应，故为不可数集合。以下证明集S满足性质(i)，(ii)，(iii)。

(i) 设x^r，$x^{r_1}\in S$，$r\neq r_1$，故存在无穷多个$k_i>0$，$(i=1,2,\cdots)$使$E^r_{k_i^2}\neq E^{r_1}_{k_i^2}$，即$x^r_{k_i^2}\neq x^{r_1}_{k_i^2}$，因此

$$
\rho(\sigma^{k_i^2}(x^r),\ \sigma^{k_i^2}(x^{r_1})>1
$$

(ii) 取序列$n_i=i^2+1,i=0,1,2,\cdots$，由于$\sigma^{n_i}(x^r)$与$\sigma^{n_i}(x^{r_1})$至少在前面$(i+1)^2-i^2-1=2i$个项相同，都等于1，故$\rho(\sigma^{n_i}(x^r),\ \sigma^{n_i}(x^{r_1}))\to 0$当$i\to\infty$，由此即得关系式(ii)。

(iii) 设$x^r\in S$，$x\in Per(\sigma)$，由x^r的构造可知，存在单调增加的指标列$k_i(i\to\infty)$，使得$x^r_{k_i^2}\neq x_{k_i^2}$，因为有无穷多$k$使$x^r_{k^2}=1$，也有无穷多$k$使$x^r_{k^2}=1$，否则将有$r=0$或$r=1$导致矛盾。从而$\rho(\sigma^{k_i^2}(x^r),\ \sigma^{k_i^2}(x))>1$，故(iii)式成立，证毕。

对于双边符号空间$\Sigma(N)$的移位映射σ，由于它是可逆的双射结构，因此往往称为移位自同构(Shift automorphism)。如果将双边移位映射放到概率空间中考虑，又称之为Bernoulli移位。

§2 拓扑Markov链

在离散动力系统的研究中，Markov链起着重要作用。因为系统的不变集或状态空间可以进行某种形式的“Markov分解”，使所讨论的系统的重要性质，可通过与概率论中Markov链的拓扑相似性来认识。