研究生入学考试

基础数学试题选解

江苏科学技术出版社

研究生入学考试

基础数学试题选解

庄亚栋
方洪锦 姚林 编
路见可 主审

江苏科学技术出版社

研究生入学考试

基础数学试题选解

庄亚栋 方洪锦 姚 林 编
路 见 可 主审

江苏科学技术出版社出版
江苏省新华书店发行 江苏新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张17,375 字数385,000
1986年3月第1版 1986年3月第1次印刷
印数1—10,960册

书号：15196·176 定价：3.30元

责任编辑 沈绍绪

前　　言

近年来，研究生招生考试范围的扩大，不仅要求更多的学生熟练掌握有关专业的基础知识，而且对基础课教师的教学方法与教学水平也提出了新的要求。基于这种情况，编集一本比较全面而又有代表性的试题集，供准备报考研究生的有关人员以及高校基础数学课教师、数学专业学生参考，还是很有必要的。为此，我们编写了本书。

全书所有试题选自1962—1964年及1978年以来的二百多份研究生入学考试数学分析、高等代数、高等数学试卷。试卷的收集面几乎涉及到所有重点综合性大学、师范大学、著名的工科院校以及科学院数学研究所等教学科研单位。此外，还选编了国外的40个试题（题号前加有"△"号的）。在这里，我们向所有提供试卷与试题的同志表示诚挚的谢意。

按照考试科目，本书分为数学分析（216题，合编成200题），高等代数（140题），高等数学（325题）三部分，分别由庄亚栋、方洪锦（包括高等数学的线性代数部分）、姚林编集并作出解答。为避免重复，高等数学部分的某些与数学分析部分相同的理论题已删去；类似地，数学分析的某些计算题可参见高等数学部分。

我们衷心地感谢武汉大学路见可教授审订本书。此外，我们也十分感谢本校秦景明、王炳昌、蔡传仁、王前等同志对编写本书所提供的帮助。

敬请读者批评指正。

编　者

目　录

数 学 分 析

试题　解答

一、分析基础(1—39)……………………………………(1)　(105)
二、微分学(40—79)……………………………………(6)　(119)
三、一元函数积分学　(80—110)…………………………(13)　(138)
四、多元函数积分学(111—141)…………………………(18)　(155)
五、级数(142—180)……………………………………(23)　(173)
六、广义积分与含参数积分(181—200)……………………(31)　(193)

高 等 代 数

一、多项式(201—214)……………………………………(36)　(212)
二、行列式与线性方程组(215—230)………………………(38)　(220)
三、矩阵的秩　矩阵运算(231—252)………………………(41)　(232)
四、特征值与特征向量(253—270)…………………………(44)　(249)
五、矩阵的相似　标准形(271—289)………………………(47)　(263)
六、二次型与对称矩阵(290—303)…………………………(50)　(278)
七、线性空间与线性变换(304—327)………………………(52)　(291)
八、欧氏空间与正交变换(328—340)………………………(57)　(310)

高 等 数 学

一、函数与极限(341—366)………………………………(60)　(320)
二、一元函数微分学(367—404)……………………………(63)　(333)
三、一元函数积分学(405—458)……………………………(68)　(358)

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

	试题	解答
四、多元函数微分学(459—492)	(75)	(391)
五、多元函数积分学(493—541)	(80)	(417)
六、级数与广义积分(542—600)	(88)	(455)
七、常微分方程(601—632)	(96)	(504)
八、线性代数(633—665)	(99)	(527)

数 学 分 析

一、分析基础

1．求 1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^{\frac{1}{n}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$ $(\alpha\geqslant 0, -1<\alpha<0)$。

2．设$\{a_n\}$为实数列，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$a$有限。求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

3．设 $a_0>b_0>0$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$，$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ $(n=0,1,2,\cdots)$。求证 $a_0>\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n>b_0$。

4．设 $p_i>0, i=0,1,2,\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{p_0+\cdots+p_n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$。求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0p_n+s_1p_{n-1}+\cdots+s_np_0}{p_0+p_1+\cdots+p_n}=s.$$

5．设 $0<x_1<\pi$，$x_n=\sin x_{n-1}$，$n\geqslant 2$。证明

1) $\{x_n\}$有极限；

2) $\sum\limits_1^\infty x_n^p$ 当 $p>2$ 收敛，$p\leqslant 2$ 发散。

6. 设 $\alpha\geqslant 0$，$[x]$表示不超过 x 的最大整数，

$$a_n=\sqrt[n]{[\alpha[\alpha\cdots[\alpha]\cdots]]}\ (n\text{ 个方括号}),$$

问$\{a_n\}$是否收敛？如果收敛，求出它的极限。

7. 设 $a_0=0$，$a_n=1+\sin(a_{n-1}-1)$，$n=1, 2, \cdots$，试求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

△8. 设序列 a_0，a_1，$\cdots$，由方程

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n\ (0<x<1)$$

定义，求 $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$。

9. 设 $\{x_n\}$ 为实数列。已知三个序列 $\{x_{2n}\}$，$\{x_{2n+1}\}$ 和 $\{x_{3n}\}$收敛，试证$\{x_n\}$收敛。

10. 设 $a_k>0(k=1, 2, \cdots)$且 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\dfrac{a_m}{a_n}=1$，求证 $\{a_n\}$ 收敛。

11. 设 $\alpha>0$，$S_n=1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha$，$n=1, 2, 3, \cdots$。求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n(\alpha+1)}{nS_n(\alpha)}$。

12. $\{a_n\}$，$\{b_n\}$是两个实数列，且满足

$$e^{a_n}=a_n+e^{b_n}, n=1, 2, \cdots.$$

1）若 $a_n>0, n=1, 2, \cdots$，证明 $b_n>0$，$n=1, 2, \cdots$。

2）若 $a_n>0$，$n=1, 2, \cdots$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，求证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$也收敛。

13. 设数列$\{p_n\}$，$\{q_n\}$满足 $p_{n+1}=p_n+2q_n, q_{n+1}=p_n+q_n$，

$p_1=q_1=1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{q_n}$。

14．证明下列命题彼此等价：

命题 A：每个非空的有上界的实数集有上确界；

命题 B：每个拟单调的非降数列 $\{a_n\}$（即对任意正实数 ε 与任意自然数 n，存在自然数 N，使当 $m>N$ 时 $a_m>a_n-\varepsilon$）趋近于一实数或 $+\infty$。

15．证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k\ln k}-\ln\ln n\right\}$ 存在（有限）。

16．证明从任何一个数列 $\{x_n\}$ 中总可以取出单调数列（这里的单调数列是广义的）。

17．设 ε_i 为 0，1，－1 的一些数，

$$a_n=\varepsilon_0\sqrt{2+\varepsilon_1\sqrt{2+\cdots+\varepsilon_n\sqrt{2}}}.$$

求证 $\{a_n\}$ 收敛，$a_n=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_i}{2^i}\right)$。

18．证明：若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+T)=Kf(x)$，其中 $-\infty<x<+\infty$，$K>0$，$T>0$，则存在常数 a 及以 T 为周期的函数 $\varphi(x)$，使 $f(x)=a^x\varphi(x)$。

19．求 1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^n}-e^{\sin^n x}}{x^n-\sin^n x}$。

20．设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续．求证：存在函数 ψ，在 $(0,+\infty)$ 上具有下述性质：

1) ψ 在 $(0,+\infty)$ 上单调上升，且当 $t\geqslant b-a$ 时 $\psi(t)=$

常数；

2）对任意$x',x''\in[a,b]$有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\psi(|x'-x''|);$$

3）$\lim\limits_{t\to0+}\psi(t)=0$。

21．若函数$f(x)$在实数轴上连续，且$\underline{\lim\limits_{x\to\infty}}f(x)=m$，$\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}f(x)=M$，则对任意$\lambda$：$m\leqslant\lambda\leqslant M$，必有序列$x_n\to\infty(n=1,2,\cdots)$，使$\lim\limits_{x_n\to\infty}f(x_n)=\lambda$。

22．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且有唯一的最小值点$x_0\in[a,b]$。若$x_n\in[a,b]$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。

23．若函数$f(x)$在$[a,b]$上局部有界，即对任何$x_0\in[a,b]$，存在邻域$U_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$使$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有界，证明$f(x)$在$[a,b]$上有界。

24．$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的函数，满足条件：对每一点$x_0\in[a,b]$，任取$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，对于一切$x\in[a,b]\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$有$f(x)<f(x_0)+\varepsilon$成立。

1）证明$f(x)$有最大值；

2）举例说明$f(x)$未必有下界。

25．设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的增函数（即若$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$，必$f(x_1)\leqslant f(x_2)$），但不必连续。如果$f(a)\geqslant a$，$f(b)\leqslant b$，试证：必有$a\leqslant x_0\leqslant b$存在，使$f(x_0)=x_0$。

26．判别$x^3-2x^2-4x-7=0$在$(3,4)$内只有一解，并求近似值（精确到±0.01）。

27．试证$1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n}=0$

1）当n为正奇数时仅有一实根；2）当n为正偶数时无实根。

28．设$p>0$，$f(x)=|x|^p$，$-\infty<x<\infty$．试研究$f(x)$的一致连续性．

29．讨论$f(x)=x\cos\frac{1}{x}$在$(0,\infty)$上的一致连续性．

30．若函数f在区间$[a,b]$上一致连续，又$\{x_n\}$，$n=1,2\cdots$是元素在$[a,b]$内的任意柯西序列，则$\{f(x_n)\}$，$n=1,2,\cdots$也是柯西序列．反之，如果f定义在区间$[a,b]$上，并且f把元素在$[a,b]$内的任一柯西序列变为柯西序列，则f在$[a,b]$上是一致连续的．

31．设$f(x)$在有限开区间(a,b)内连续．证明$f(x)$在(a,b)内一致连续的充要条件是极限$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$存在且有限．讨论此命题对区间$(a,+\infty)$是否成立．

32．设单调有界函数f在区间I（$I=(a,b)$或$I=[a,+\infty)$）上连续，求证f在I上一致连续．

△33．设h：$[0,1)\to R$，证明：如果h一致连续，则存在唯一的连续映射g：$[0,1]\to R$，使对所有$x\in[0,1)$有$g(x)=h(x)$．

34．规定$f(x,y)=\dfrac{|x|^{1+\varepsilon}y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\sin^2x+\sin^2y}}$在原点处的值为0（其中$\varepsilon$为任一大于0的实数）．证明它在原点的连续性．

35．设$f(x,y)$为区域D：$|x|\leqslant1$，$|y|\leqslant1$上的有界k（$k\geqslant1$）次齐次函数，问极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\{f(x,y)+(x-1)e^y\}$是否存在？若存在，求其值．

△36．设$U\subseteq R^n$为凸开集，f：$U\to R$为可微函数，其偏导数一致有界，但不一定连续．证明f有一个到U的闭包上的

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

唯一的连续扩张。

△37. $A\subseteq \mathrm{R}^n$ 是紧集，$x\in A$，设$\{x_i\}$是A中的序列，$\{x_i\}$的每一个收敛子列收敛于x。

1）证明$\{x_i\}$收敛。

2）举例说明：若A非紧，1）中的结论不正确。

△38. 证明：如果映射 g：$\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$ 是连续的，那么g的图象在$\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^n$中是闭的。反过来对不对？

39. 设$f(x_1,\cdots,x_n)$是一个定义在开集$G\subseteq\mathrm{R}^n$上的实值函数，并设$\boldsymbol{v}_i=(\lambda_{i1},\cdots,\lambda_{in})(i=1,2,\cdots,n)$是$\mathrm{R}^n$中的线性无关向量组。若函数$f$在$G$中任一平行于$\boldsymbol{v}_i$的直线上连续$(i=1,\cdots,n)$且$f$在上述直线上依$\boldsymbol{v}_i$的方向单调增加，证明$f(x_1,\cdots,x_n)$在$G$中连续。

二、微 分 学

40. 设 $f(x)=\begin{cases} x\left(1+\dfrac{1}{3}\sin\ln x^2\right) & x\neq 0, \\ 0 & x=0. \end{cases}$

求证$f(x)$连续，当$x'>x$时$f(x')>f(x)$，并求$f'(0)$。

41. 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，且$|f(x)|\leqslant|\sin x|$。求证$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$。

42. 设$f(x)$是定义在闭区间$[a,b]$上的连续函数，且$f(a)=f(b)=0$。又设在(a,b)中每一点处存在右导数$f'_+(x)$，则在(a,b)中存在一点c，使$f'_+(c)\leqslant 0$。同样证明在(a,b)中存在一点d，使$f'_+(d)\geqslant 0$。

43. 假设函数$f(x)$在整个实轴上有定义，并且对任两实数a,b恒有$|f(b)-f(a)|\leqslant M|b-a|^2$，这里$M$为一给定正数。

求证 $f(x)\equiv\text{const}$。

44．设函数 f 在[0,1]上连续，在(0,1)内可微，$f(0)=0$，且对 $0<x<1$ 有 $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$．证明在[0,1]上 $f(x)\equiv 0$。

45．证明：1）$x>0$ 时 $e^x>1+(1+x)\ln(1+x)$；

2）$x\in(0,1)$ 时 $\dfrac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$；

3）$x>0$ 时 $(1+x)^{1+\frac{1}{x}}<e^{1+\frac{x}{2}}$。

△46．设 f：[0，1]→R 为连续函数，$f(0)=0$，且对于 $0<x<1$，f 可微，$0\leqslant f'(x)\leqslant 2f(x)$．证明 f 恒等于 0．

△47．设 f 是 R 到 R 的可微函数，对所有 $x\in\mathbb{R}$，$f'(x)>f(x)$，$f(0)=0$。证明：对所有正数 x，$f(x)>0$。

48．设 $f(x)$ 是可微函数，导函数 $f'(x)$ 严格单调递增。若 $f(a)=f(b)(a<b)$，证明：对一切 $x\in(a,b)$ 均有 $f(x)<f(a)=f(b)$。

注：不得直接利用凸函数的性质。

49．设 $f(x)$ 是[a,b]上的连续函数，$g'(x)$ 在[a,b]上连续，$g(a)=0$，常数 $\lambda\neq 0$．如果

$$|f(x)g(x)+\lambda g'(x)|\leqslant|g(x)|,x\in[a,b],$$

证明 $g(x)\equiv 0(x\in[a,b])$。

50．设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是在 x_0 附近有定义的实函数，且都在 x_0 处有直到 n 阶的导数，

$$N(f)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}|f^{(k)}(x_0)|.$$

试证 $$N(f_1f_2)\leqslant N(f_1)N(f_2).$$

51．设 $f(x)$ 在[a，$+\infty$)内有一致有界的连续二阶导数。设 $M_i=\sup\limits_{a<x<\infty}|f^{(i)}(x)|(i=0,1,2)$，则 $M_1^2\leqslant 4M_0M_2$．举例说

明等号可以取到。

52. 设函数$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上有三阶微商，并且$f(x)$和$f'''(x)$在$(-\infty,\infty)$上有界。证明$f'(x)$和$f''(x)$也在$(-\infty,\infty)$上有界。

53. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$。证明$f'(x)=0$在(a,b)中至少有两解。

54. 已知$f(x)$及$f'(x)$是$[0,\infty)$上的连续函数，且$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+f'(x))=0$，求证$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$。

55. $f(x)$在$[0,+\infty)$可导，且$f(x)+f'(x)\leqslant 1$。求证$\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}f(x)\leqslant 1$。

△56. x：$\mathrm{R}\to\mathrm{R}$为微分方程$5x''+10x'+6x=0$的解。证明映射f：$\mathrm{R}\to\mathrm{R}$，$f(t)=\dfrac{x^2(t)}{1+x^4(t)}$取得最大值。

57. 设$f(x)$在区间(a,b)上可微分无限多次，且$|f^{(n)}(x)|\leqslant M(x\in(a,b),n=1,2,\cdots)$。证明$f(x)$可以开拓到$(-\infty,\infty)$，且在$(-\infty,\infty)$上无限次可微。

58. 1）设对任意实数$0<\lambda<1$有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2). \qquad (*)$$

试证：若$x_1<x_2$，$f(x)$在x_1,x_2可导，便有

$$f'(x_1)\geqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geqslant f'(x_2).$$

2）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，对任意x_1，$x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，均使$(*)$式成立，则存在$\theta\in(a,b)$，使

$$f'(x)\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\text{（当 }a<x\leqslant\theta\text{），}$$

$$f'(x)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\text{（当 }0\leqslant x<b\text{）}.$$

59. 设 f 在$[a,b]$上可微，求证 f' 在$[a,b]$上连续当且仅当 f 在$[a,b]$上一致可微，即$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x\in[a,b]$，只要 $0<|h|<\delta$，则有$\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon$.

60. 函数$f(x)$对一切实数x满足微分方程

$$xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}.$$

1）若$f(x)$在$x=c(c\neq0)$处有极值，证明它是极小值.

2）若$f(x)$在$x=0$处有极值，它是极大值还是极小值?

3）若$f(0)=f'(0)=0$，求最小正数k，使对一切$x\geqslant0$有$f(x)\leqslant kx^2$.

61. 1）若$f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$为$n$次实多项式，求证

$$f\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)x^k=f(k)x^k,k=0,1,2,\cdots$$

2）若$c_0,\cdots,c_n$均为整数，求证

$$f(0)+\frac{f(1)}{1!}+\frac{f(2)}{2!}+\cdots+\frac{f(k)}{k!}+\cdots$$

为e（自然对数底）的整数倍.

62. 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上二次可微，$f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$.

1）试证存在$\xi\in(a,b)$使$|f''(\xi)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$. 说明常数4是最好的.（即对任何$M>4$，找一具体的$[a,b]$及其上满足条件的具体的$f(x)$，使对一切$\xi\in(a,b)$都有

$$|f''(\xi)|<\frac{M}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.)$$

2) 如果再设$f(x)\neq$常数,试证存在$\xi\in(a,b)$,使

$$|f''(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

(注意：此题也可以先证2),再据此证1)的前半部。)

63. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x^2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}-y^2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y} & (xy\neq 0), \\ 0 & (xy=0). \end{cases}$

证明$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$。

64. 1)若 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0, \\ 0 & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

证明$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$。

2) 函数$z=z(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2=yf(z/y)$确定，f是可微函数。证明

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

65. 给定方程$z=y+x^2\varphi(z)$，其中$\varphi(z)$是z的二次可微函数,且$x^2\varphi'(z)\neq 1$。又,$f(z)$是z的可微函数，证明

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(z)\frac{\partial z}{\partial y}\right]$$
$$=2x\frac{\partial}{\partial y}\left[f(z)\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial y}\right].$$

[注：试卷上所给方程是$z=y^2+x^2\varphi(z)$。]

66. 求证：由变换$u=xy,v=\dfrac{1}{y}$可把方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2y(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z^2=0$$

变换成另一方程：把 x 换成 u，y 换成 v 即可。

67. 通过变换 $t=x$，$uxy=x-y$，$vxz=x-z$ 变换方程

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2,$$

使成为以 t，u 为自变量，v 为未知数的偏微分方程。

68. 设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 满足拉普拉斯方程 $\Delta u=0$，$\Delta v=0$，其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$。令 $|F|=(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}$。证明：当 $p\geqslant 2$ 时在 $|F|\neq 0$ 的点处有 $\Delta(|F|^p)\geqslant 0$。

69. 设 $u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$ 为区域 D 上的调和函数。

1）乘积 $w=uv$ 是否为调和函数，即下式是否成立：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0?$$

2）试给出乘积为调和函数的充要条件。

70. 设由方程组

$$\begin{cases} x\sec\alpha+y\,\mathrm{tg}\,\alpha+\varphi(z)=f(\alpha), \\ x\sin\alpha+y=f'(\alpha)\cos^2\alpha \end{cases}$$

能确定函数 $z=z(x,y)$（其中参变数 $\alpha=\alpha(x,y)$ 有连续偏导数，函数 f，φ 也有连续导数）。求证 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\left[\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2-\left[\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2=1.$$

$^{\triangle}$71. 设 f：$\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}$ 有连续偏导数，对所有 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$j=1,\cdots,n$，满足 $\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right|\leqslant k$。证明

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com