多目标经济决策

郭多祚 编著

吉林大学出版社

多目标经济决策
郭多祚　编著

责任编辑、责任校对：崔晓光　　封面设计：何小青

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行
（长春市东中华路 37 号）　长春市永昌福利印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米　1/32　　1998 年 1 月第 1 版
印张：7.375　　1998 年 1 月第 1 次印刷
字数：182 千字　　印数：1—1500 册

ISBN 7—5601—2129—2/F・426　　定价：11.00 元

前　言

运筹学作为一种科学的方法出现以来，人们已经发展了各种数学工具，并把它们用于解决工程、商业、经济和社会科学方面的问题。

运筹学方法的贡献在于认识现实世界中关键过程以及它们之间的相互作用，并把这些过程和它们之间的关系构成一个数学模型，以寻求与决策者有关的决策方案，分析这些过程的相互影响，以确定方案的未来后果。这种方法在50年代得到广泛的应用，但不足之处之于仅构造单一准则的目标函数。

然而近30年来，人们日趋认识到，在分析和解决某些经济问题时，必须同时考虑多个目标，早在1896年经济学家V.Pareto首先在经济均衡问题研究中提出了多目标最优问题，提出了Pareto最优概念，1944年数学家J.Von Neumann和O.Morgenstern在《博弈论与经济行为》一书中提出了多目标决策问题，1951年，数理经济家T.C.Koopmans从生产和分配的效率分析中考虑了多目标决策问题。1973年，J.L.Cochrance和M.Zeleny编辑出版了《多目标决策》一书，为多目标决策奠定了理论基础，此后，多目标决策得到了迅速发展。

多目标经济决策的一般过程是，首先由决策者对要解决的问题作出经济上的说明，为解决决策者提出的问题，首先确定决策变量，构造目标函数集合，形成约束集；然后对模型求解，生成可供选择的决策方案，并评价这些方案的直接的和伴随的经济效果，供决

策者选择，如果决策者对于提出的决策方案不满意，调整决策方案，直至决策者满意为止。

本书旨在使读者能了解多目标决策分析的基础理论和决策的全过程。全书内容分为两部分。第一部分从第1章到第6章介绍多目标经济决策的一些基本理论和方法；第二部分第7章到第10章讨论多目标经济决策问题；是将多目标优化决策方法应用于四个不同的经济领域；第7章讨论产业结构优化问题；第8章讨论经济项目评价问题；第9章讨论流动资金管理决策；第10章研究证券组合投资决策。

这些成果是决策问题应用定量分析方法的初步尝试，由于水平所限，书中难免存在缺点和错误，希望读者不吝批评指正。

目　　录

第 1 章　多目标最优化模型

本章首先介绍向量的序关系，向量值函数的有关概念，以及多目标最优化的数学模型，这些模型是多目标经济决策问题最常用的基本模型．

§1　向量值函数的基本概念

多目标(向量)最优化问题与通常单目标(数值)最优化问题的一个本质的不同点是，问题的目标是一个向量函数，为比较这些向量函数的大小，首先需要引进向量空间中向量的“序”关系．下面，给出一个最基本的向量序的定义．

定义 1-1　设 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_m)^T$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_m)^T$ 是 m 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 中的两个向量．

(1)若 $a_i=b_i(i=1,\cdots,m)$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 等于向量 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．

(2)若 $a_i\leqslant b_i(i=1,\cdots,m)$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 小于等于向量 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}\leqslant\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{a}$．

(3)若 $a_i\leqslant b_i(i=1,\cdots,m)$，并且其中至少有一个是严格不等式，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 小于向量 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}\lneq\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}\gneq\boldsymbol{a}$．

(4)若 $a_i<b_i(i=1,\cdots,m)$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 严格小于向量 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}>\boldsymbol{a}$．

由上述定义所确定的向量之间的序，叫做向量的自然序．

简单地说，在自然序的意义下，向量 $\boldsymbol{a}$ 等于向量 $\boldsymbol{b}$ 就是它们的所有分量都对应地相等；向量 $\boldsymbol{a}$ 严格小于（小于等于）向量 $\boldsymbol{b}$，就是 $\boldsymbol{a}$ 的所有分量都小于（小于等于）$\boldsymbol{b}$ 的对应分量；向量 $\boldsymbol{a}$ 小于向量 $\boldsymbol{b}$，则是 $\boldsymbol{a}$ 的所有分量都不大于 $\boldsymbol{b}$ 的对应分量，并且 $\boldsymbol{a}$ 至少有一个分量小于 $\boldsymbol{b}$ 的对应分量．例如，图 1-1 中的 2 维向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 之间有关系：$\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{d}$，而 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 之间无自然序关系．

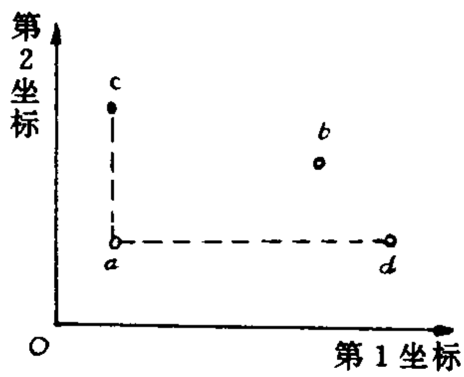

图 1-1

特别地，当 $m=1$ 时，上述定义的自然序和实数序是一致的．不过这时“$\leqslant$”和“$<$”的意义相同．

设 $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^m (m \geqslant 2)$，$\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{R}^m$ 是零向量．若 $\boldsymbol{a} \geqslant \boldsymbol{0}$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为非负向量；若 $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}$，称 $\boldsymbol{a}$ 为正向量；若 $\boldsymbol{a} \gg \boldsymbol{0}$，称 $\boldsymbol{a}$ 为正定向量．

为了以后的需要，我们引入向量值函数性质的两个概念．

设 $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{R}^n$ 是凸集，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))^T$ 是 $\boldsymbol{X}$ 上的向量值函数．

定义 1-2 向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 X 上的（严格）凸函数意味着：它的各个分量函数 $f_i(\boldsymbol{x})(i=1, \cdots, m)$ 都是 X 上的（严格）凸函数，或即对任意的 $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in X$ 和实数 $a (0 < a < 1)$ 有 $\boldsymbol{f}(a\boldsymbol{x}' + (1-a)\boldsymbol{x}'')(<) \leqslant a\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') + (1-a)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')$.

设 $u(\cdot)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 到 $\boldsymbol{R}^1$ 的函数，关于 $u(\cdot)$ 的单调性引入下面两个定义．

定义 1-3 设 $u(y)$是 $\boldsymbol{R}^m$ 上有定义的函数,对任意 $\boldsymbol{y}' \in \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{y}'' \in \boldsymbol{R}^m$,如果

$$\boldsymbol{y}' \leqslant \boldsymbol{y}'' \quad 则有\ u(\boldsymbol{y}') < u(\boldsymbol{y}'') \tag{1-2}$$

则称 $u(y)$是关于 $\boldsymbol{y}$ 的严格增函数 .

定义 1-4 设 $u(y)$是 $\boldsymbol{R}^m$ 有定义的函数,对任意 $\boldsymbol{y}' \in \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{y}'' \in \boldsymbol{R}^m$,如果

$$\boldsymbol{y}' < \boldsymbol{y}'' \quad 则有\ u(\boldsymbol{y}') < u(\boldsymbol{y}'') \tag{1-3}$$

则称 $u(y)$关于 $\boldsymbol{y}$ 是增函数 .

§2 多目标最优化的数学模型

多目标最优化模型是在一定限制条件下,多于一个数值目标函数的最优化问题 .

从这些问题归纳出以下的共同模式:

$$\begin{cases} \min f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ \min f_r(x_1, \cdots, x_n) \\ \max f_{r+1}(x_1, \cdots, x_n) \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ \max f_m(x_1, \cdots, x_n) \\ \text{s.t.}\ g_j(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0, j = 1, \cdots, p \\ \quad h_k(x_1, \cdots, x_n) = 0, k = 1, \cdots, q. \end{cases} \tag{1-4}$$

上述的(1-4)表示,对 r 个数值函数 $f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_r(x_1, \cdots, x_n)$的极小化和对 $m-r$ 个数值函数 $f_{r+1}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)$的极大化被同等地进行,其中的 s.t.(subject to)表示受限制的意思 . 在问题(1-4)中,由于是混合地对多个目标的某一些进行极小化,对另一些进行极大化,因而,通常把(1-4)叫做多目

标混合最优化模型.

我们知道,对某一函数 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$的极大化可以等价地转化为对函数 $-\varphi(x_1,\cdots,x_n)$的极小化.所以,若在上述模型(1-4)中把所有的“max”都转化为“min”,则可以得到如下的统一地对多个目标都进行极小化的模式:

$$\begin{cases} \min f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ \min f_m(x_1,\cdots,x_n) \\ \text{s.t.}\ g_j(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0,\ j=1,\cdots,p \\ \qquad h_k(x_1,\cdots,x_n)=0,\ k=1,\cdots,q. \end{cases} \tag{1-5}$$

问题(1-5)叫做多目标极小化模型.

如果把(1-4)中的“min”都转化为“max”,同理也可以有多目标极大化模型.多目标极小化模型、多目标极大化模型和多目标混合最优化模型统称为一般多目标最优化模型或一般多目标最优化问题.本书将主要以多目标极小化模型的形式进行讨论.

通常,我们把模型(1-4)或(1-5)中的 n 个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 叫做所考虑模型的决策变量,$m(\geqslant 2)$个数值函数 $f_1(x_1,\cdots,x_n)$,$\cdots$,$f_m(x_1,\cdots,x_n)$叫做模型的目标函数,限制条件 $g_j(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0(j=1,\cdots,p)$和 $h_k(x_1,\cdots,x_n)=0(k=1,\cdots,q)$叫做约束条件,$g_j(x_1,\cdots,x_n)(j=1,\cdots,p)$和 $h_k(x_1,\cdots,x_n)(k=1,\cdots,q)$为约束函数.

如果(1-4)或(1-5)中的各个目标函数 $f_i(x_1,\cdots,x_n)(i=1,\cdots,m)$,以及约束函数 $g_j(x_1,\cdots,x_n)(j=1,\cdots,p)$和 $h_k(x_1,\cdots,x_n)(k=1,\cdots,q)$都是决策变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性函数,则相应的问题(1-4)或(1-5)叫做多目标线性规划模型.通常,多目标线性规划模型的一般形式为

$$
\begin{cases}
\min c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n \\
\qquad \cdots\cdots\cdots \\
\min c_{m1}x_1 + \cdots + c_{mn}x_n \\
\text{s.t.}\, a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\
\qquad \cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{l1}x_1 + \cdots + a_{ln}x_n \leqslant b_l \\
\qquad x_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n,
\end{cases}
\tag{1-6}
$$

其中的 $c_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$, $a_{ij}(i=1,\cdots,l;j=1,\cdots,n)$ 和 $b_i(i=1,\cdots,l)$都是常数．如果(1-5)中的 $f_i(x_1,\cdots,x_n)(i=1,\cdots,m)$, $g_j(x_1,\cdots,x_n)(j=1,\cdots,p)$或 $h_k(x_1,\cdots,x_n)(k=1,\cdots,q)$为决策变量的非线性函数,则相应的问题(1-5)叫做多目标非线性规划模型．

为简化记号,我们把一组决策变量用向量形式记作

$$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T.$$

如此,m 个目标函数可表为$f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x})$,约束函数可表为 $g_j(\boldsymbol{x})(j=1,\cdots,p)$和 $h_k(\boldsymbol{x})(k=1,\cdots,q)$. 也可以再用向量形式来表示 m 个目标函数:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))^T,$$

并称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$为模型的向量目标函数．在几何上,决策变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 的一组取定值对应n 维欧氏空间$\boldsymbol{R}^n$ 中的一个点,一个向量目标函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$对应 $\boldsymbol{R}^n$ 到$\boldsymbol{R}^m$ 的一个映射$f:R^n\rightarrow R^m$. 此外,把满足约束条件的点 $\boldsymbol{x}$ 叫做所考虑模型的可行解或可行点,由所有可行解所组成的集合叫做可行域或约束集．(1-4)和(1-5)的可行域或约束集是

$$X=\left\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n \,\middle|\, \begin{aligned} & g_j(\boldsymbol{x})\geqslant 0, j=1,\cdots,p \\ & h_k(\boldsymbol{x})=0, k=1,\cdots,q \end{aligned}\right\}.$$

利用上述表示,满足所有约束条件的可行解可记作 $\boldsymbol{x}\in X$. 最后,

由可行域 X 通过映射 $\boldsymbol{f}$ 得到目标空间中的集合记作 $\boldsymbol{f}(X)$，并称它为相应模型的可达目标集（$m=2$ 时的图形如图 1-2 所示）.

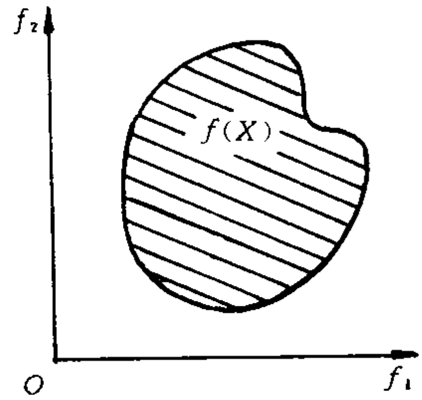

图 1-2

引用了上述记号之后，多目标极小化模型(1-5)可用向量形式简记作

$$\text{V-}\min_{\boldsymbol{x}\in X}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{VMP}$$

上述的（VMP）为向量数学规划（Vector Mathematical Programming）的缩写，（VMP）中的 V-min 表示向量极小化，即向量目标函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))^T$ 中的各个目标函数被同等地极小化的意思，$\boldsymbol{x}\in X$ 则表示决策变量满足所有的约束条件．多目标混合最优化模型(1-4)也可用向量形式记作

$$\text{V-}\begin{cases}\min \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\\ \max\limits_{\boldsymbol{x}\in X} \boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}),\end{cases} \tag{VHP}$$

其中 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_r(\boldsymbol{x}))^T$，$\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})=(f_{r+1}(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))^T$.（VHP）为向量混合规划（Vector Hybrid Programming）的缩写，表示在决策变量 $\boldsymbol{x}\in X$ 的条件下，对向量目标函数 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 中的 $f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_r(\boldsymbol{x})$ 进行极小化，同时对 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})$ 中的 $f_{r+1}(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x})$ 进行极大化．同样地，多目标线性规划模型(1-6)可表为如下的向量形式：

$$\text{V-min} C\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x}, \cdots \boldsymbol{c}_m^T\boldsymbol{x})^T,$$

$$\begin{cases} \text{s.t.} A\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b} \\ \quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{VLP}$$

其中 $m \times n$ 矩阵

$$C = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_m^T \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{c}_i \in \boldsymbol{R}^n (i = 1, \cdots, m)$和 $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^l$ 是已知向量，A 是已知 $l \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{R}^n$ 是零向量．(VLP)是向量线性规划(Vector Linear Programming)的缩写．

要把实际问题建立成形如(VMP)、(VHP)或(VLP)的多目标最优化模型，首先需要收集有关资料和数据．在分析所考虑问题的各种数量关系的基础上，应致力于确定模型的以下三要素：

(1)决策变量——选择并确定所考虑问题的供选方案，并把它们用一组变量表示出来．这些变量取不同的一组值对应着问题的一个不同方案．

(2)目标函数——按照决策者的意图，对问题提出期望要极小化或极大化的若干(多于一)个目标(指标)．它们是决策变量的函数，并且一起组成一个向量目标函数．

(3)约束条件——寻找并建立决策变量必需满足的所有限制条件，并用含有决策变量的不等式或等式表示之．

§3 分层多目标最优化模型

这一节介绍另一类不同于(VMP)和(VHP)形式的多目标最优化模型．这类模型的特点是：在约束条件下，各个目标函数不是同等地被最优化，而是按不同的优先层次先后地进行最优化．

一般地,对于 $m(\geqslant 2)$ 个目标函数

$$f_1^1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_{l_1}^1(\boldsymbol{x});f_1^2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_{l_2}^2(\boldsymbol{x});\cdots;f_1^L(\boldsymbol{x}),\cdots,f_{l_L}^L(\boldsymbol{x})$$

$$(l_1+l_2+\cdots+l_L=m),$$

设按其重要性分成如下的 $L(\geqslant 2)$ 个优先层次:

$$\left.\begin{array}{l}\text{第 1 优先层次 ——}f_1^1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_{l_1}^1(\boldsymbol{x}),\\ \text{第 2 优先层次 ——}f_1^2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_{l_2}^2(\boldsymbol{x}),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \text{第 } L \text{ 优先层次 ——}f_1^L(\boldsymbol{x}),\cdots,f_{l_L}^L(\boldsymbol{x}),\end{array}\right\} \qquad (1\text{-}7)$$

则它们在约束条件 $\boldsymbol{x}\in X$ 之下的分层多目标极小化问题记作

$$\text{L-}\min_{\boldsymbol{x}\in X}[P_1(f_1^1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_{l_1}^1(\boldsymbol{x})),P_2(f_1^2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_{l_2}^2(\boldsymbol{x})),$$

$$\cdots,P_L(f_1^L(\boldsymbol{x}),\cdots,f_{l_L}^L(\boldsymbol{x}))]. \qquad (1\text{-}8)$$

(1-8)中的 $P_s=(s=1,\cdots,L)$是优先层次的记号,表示后面括号中的目标函数 $f_1^s(\boldsymbol{x}),\cdots,f_{l_s}^s(\boldsymbol{x})(s=1,\cdots,L)$属于第 s 优先层次,并且各 P_s 之间有关系

$$P_s \gg P_{s+1},\ s=1,\cdots,L$$

(它表示第 s 优先层次“优先于”第 $s+1$ 优先层次).(1-8)中的 L-min 则表示按字典序(Lexicographical Order)极小化,即依次按记号 $P_1,P_2,\cdots,P_L$ 的次序逐层地进行极小化的意思.若记

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x})=(f_1^1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_{l_1}^1(\boldsymbol{x}))^T,$$

$$\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x})=(f_1^2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_{l_2}^2(\boldsymbol{x}))^T,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{x})=(f_1^L(\boldsymbol{x}),\cdots,f_{l_L}^L(\boldsymbol{x}))^T,$$

则上述(1-8)又可写作

$$\text{L-}\min_{\boldsymbol{x}\in X}[P_1\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}),P_2\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x}),\cdots,P_L\boldsymbol{F}_L(\boldsymbol{x})],$$

或简写作

$$\text{L-}\min_{\boldsymbol{x}\in X}[P_s\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{x})]_{s=1}^L. \qquad (\text{LSP})$$

这里(LSP)为字典分层规划(Lexicographically Stratified Programming)的缩写．问题(LSP)通常叫做是具有 L 个优先层次的分层多目标最优化模型或分层多目标极小化模型．

特别地，若在模型(LSP)中每一优先层次均仅只有一个目标，即若对于(LSP)中的各 $\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{x})$ 有

$$\boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{x}) = f_s(\boldsymbol{x}),\ s = 1, \cdots, m,$$

这时的(LSP)成为

$$\text{L-}\min_{x \in X}[P_s f_s(\boldsymbol{x})]_{s=1}^{m}. \tag{1-9}$$

这种特殊的分层多目标极小化模型叫做完全分层多目标极小化模型或简称为完全分层模型．进一步，若在(1-9)中各个目标又都是决策变量的线性函数，并且约束条件也是线性的情况时，则有如下的分层多目标线性规划模型或分层线性规划模型

$$\text{L-min}[P_s \boldsymbol{c}_s^T \boldsymbol{x}]_{s=1}^{m},$$

$$\begin{cases} \text{s.t.}\ A\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ \qquad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{1-10}$$

其中 $\boldsymbol{c}_s \in \boldsymbol{R}^n (s = 1, \cdots, m)$ 和 $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^l$ 是已知向量，A 是已知的 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0} \in \boldsymbol{R}^n$.

下面，我们来看一个建立分层多目标最优化模型的例子．

［例］ 某水稻区一农户承包 10 亩农田从事农业种植．已知有三类复种方式可供耕种选择，并且其相应的经济效益如表 1-1 所示．设该农户全年至多可出工 3410 小时，至少需要油料 156 公斤．今该农户希望优先考虑年总利润最大和粮食总产量最高，然后考虑使投入氮素最少．问如何确定满意的种植方案?

显然，上述的农田种植问题是一个分层多目标最优化问题．设决策变量为：

x_1——方案 1 的种植亩数，

x_2——方案 2 的种植亩数，

x_3——方案 3 的种植亩数．

表 1-1

方案	复种方式	粮食产量 (kg/亩)	油料产量 (kg/亩)	利润 (元/亩)	投入氮素 (kg/亩)	用工量 (小时/亩)
1	大麦－早稻－晚粳	1056	—	120.27	50	320
2	大麦－早稻－玉米	1008	—	111.46	48	350
3	油菜－玉米－蔬菜	336	130	208.27	40	390

则据表 1-1 可知问题的三个目标函数为：

年总利润：$f_1(x_1, x_2, x_3) = 120.27x_1 + 111.46x_2 + 208.27x_3$,

粮食总产量：$f_2(x_1, x_2, x_3) = 1056x_1 + 1008x_2 + 336x_3$,

氮素投入量：$f_3(x_1, x_2, x_3) = 50x_1 + 48x_2 + 40x_3$.

另外，根据该农户的全年出工能力、对油料的需求量、所承包的农田数以及种植亩数应为非负等的限制，还应有约束条件：

总用工量：$320x_1 + 350x_2 + 390x_3 \leqslant 3410$,

油料需求：$130x_3 \geqslant 156$,

农田数：$x_1 + x_2 + x_3 = 10$,

种植亩数非负：$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0$.

由于该农户要优先考虑年总利润最大和粮食总产量最高，然后再考虑投入氮素最少．故若把其中的求极大转化为求其负数的极小，则根据以上所得到的各目标函数和约束条件的表达式，可把问题归结为如下的具有两个优先层次的分层多目标极小化模型：

$$
\begin{cases}
\text{L-min}[P_1(-120.27x_1 - 111.46x_2 - 208.27x_3, -1056x_1 \\
\qquad - 1008x_2 - 336x_3), P_2(50x_1 + 48x_2 + 40x_3)] \\
\text{s.t.}\, 320x_1 + 350x_2 + 390x_3 \leqslant 3410 \\
\qquad 130x_3 \geqslant 156 \\
\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\
\qquad x_1 \geqslant, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0.
\end{cases}
\tag{1-11}
$$

(1-11)是一个分层线性规划模型，对它进行求解便可得到农户满意的种植方案．

如果在模型(LSP)中有

$$F_1(x)=(f_1(x),\cdots,f_{m-1}(x))^T,$$
$$F_2(x)=f_m(x),$$

则(LSP)成为

$$\text{L-}\min_{x\in X}[P_1(f_1(x),\cdots,f_{m-1}(x)),P_2f_m(x)]. \tag{1-12}$$

这时，(1-12)中的 $f_m(x)$ 叫做该模型的第2目标．如果在(LSP)中有

$$F_1(x)=f_1(x),$$
$$F_2(x)=(f_2(x),\cdots,f_m(x))^T,$$

则模型成为

$$\text{L-}\min_{x\in X}[P_1f_1(x),P_2(f_2(x),\cdots,f_m(x))^T], \tag{1-13}$$

其中的 $f_1(x)$ 叫做(1-13)的重点目标．

§4 目标规划模型

最后，再介绍一类在解决实际问题中有着十分广泛应用的特殊的多目标最优化模型．与一般多目标最优化模型(VMP)及分层多目标最优化模型(LSP)不同的是：这类模型并不是考虑对各个目标进行极小化或极大化，而是希望在约束条件的限制下，每一目标都尽可能地接近于事先给定的各自对应的目标值．

一般地，设给定 $m(\geqslant 2)$ 个目标函数和决策者希望它们要达到的各自对应的目标值如下：

目标函数　　$f_1(x),\cdots,f_m(x)$,

目标值　　$\mathring{f}_1,\cdots,\mathring{f}_m$.

为了使其中各个目标函数都尽可能地达到或接近于它们对应的目