高等财经院校试用教材

# 经济数学基础

## （一）

微积分（上册）

中国金融出版社

高等财经院校试用教材

# 经济数学基础

## （一）

### 微积分（上）

中国金融出版社

经济数学基础（一）
微积分（上）
李宝光 谢瑞云 万作新 编
*
中国金融出版社 出版
北京新华书店发行 各地新华书店经售
吉林省工商银行印刷厂 印刷
*
850×1168毫米 32开本 14,375印张 328,000字
1985年2月第一版 1985年2月第一次印刷
印数：1—4,5000
统一书号：4058·139 定价：3.50元

# 编 审 说 明

这本教材是为高等财经院校教学需要而编写的，也可作为培训银行干部的教材，还可供有志于学习高等数学的经济工作人员自学之用。

《经济数学基础》一书，共分为四册：第一册《微积分》；第二册《线性代数》；第三册《概率统计》；第四册《线性规划》。全书由中央财政金融学院李宝光同志任主编，四川财经学院倪训芳同志为副主编，参加编写组的有：中央财政金融学院、四川财经学院、陕西财经学院和湖南财经学院部分老师。现在出版的是第一册《微积分》，其主要内容包括：一元函数微积分、多元函数微积分、无穷级数和常微分方程。其特点，一是教材的知识面广，着重方法的介绍，重点在于应用，例题不深而解得详细，并附有具有经济特色的例题和习题；二是微积分的公式都是采取复合函数的形式，使用起来很方便；还介绍了微分的经济意义和广义积分的内容，为研究相关学科打下基础。

本书是由中央财政金融学院李宝光主编和编写的，参加编写的还有湖南财经学院谢瑞云、万作新同志，李宝光同志总纂。

本书经过两年的教学实践，作了局部修改。现经我们审阅，可作为高等财经院校试用教材出版。读者对本书的意见和建议，请函北京三里河中国人民银行教育司教材编审室，以便再版时修正。

中国人民银行教材编审委员会

1984年5月5日

本书分上、下两册。书中标记*号的地方在讲解的内容中，是表示可讲可不讲部分；在习题和例题中是较深一些的题。在习题中有些习题详细作出来，以便读者学习作题规格。而有的节内容较少，有时只给例题数则，一部分例题不予解出，供读者作为习题。

在讲授这本教材时，微分方程一章，可以调整提前讲授。

# 目　　录

# 第一章　函数与极限

数学是研究现实世界中的量的关系和空间形式的科学。在各门类科学中，数学总是占着重要的地位，它是科学基础的基础。马克思认为：一种科学只有当它成功地运用了数学的时候才能达到完善的地步。

微积分研究的主要对象是函数。读者在中学时代，已经接触过函数的概念。但那时对函数并不是作为主要的研究对象来提出的，现在这里将用极限方法作为主要手段，把函数作为主要对象较系统地进行深入的探讨，就是说，微积分将要以极限法作为主要工具对现实世界的变量（泛称）在某一变化过程中的相互依赖、相互制约的关系（称它为函数关系）加以分析研究。本章内容：（一）函数；（二）极限；（三）函数的连续性。

## §1.1　函数的概念

### Ⅰ．常量与变量

在我们观察分析自然现象、社会经济现象过程中，经常遇到的一种基本概念之一，就是量的概念。例如：体积、面积、长度、重量、温度、力、速度、成本、价格等等的大小或多少都是量。我们所遇到的许多不同的量，其中一些量在某一过程中始终保持一定的数值，我们称它为常量；另外一些量在此过程进行中取不同的数值，称它为变量。常量一般习惯于用字母

$a$、$b$、$c$…表示；变量用$x$、$y$、$z$、$t$、$u$、$v$…表示。

应该注意：常量与变量并不是绝对的，一种量在这一过程中是常量，而在另一过程中则可能是变量。还有，在某一过程中，变化很小的量，无碍于所研究问题关于计量的有效数字时，这时也可以视其为常量。例如地球重力加速度（g），在地球上各地测得的数值，未尽相同，但在一般物理问题的讨论中，人们往往把它当作常量（$g=980$厘米/秒$^2$）。此外，在某些情况下，为了叙述的一般性，往往把常量看成是取同一值的变量。

## Ⅱ. 函数的概念

在自然现象、技术工程和社会经济的体系中，往往在某变化过程中同时牵涉到几个或许多个变量，这些变量通常都不是孤立的，而是遵循一定的规律相互依赖又相互制约地变化着的。为了阐述得简单明确，我们先就两个变量的情况加以探讨，并先用几个例题说明。

例1　设将一块每边长60厘米的正方形金属板的四个角各割去一块小正方形，然后把它的四边折起来，使其与底平面垂直，焊成一个正方形底、无上盖的溶槽。问每角割去的小正方形的边长是多少才能使溶槽的容积最大？

如图1—1，$ABCD$为一正方形金属板，$AB=BC=60$厘米。设$y$表示容积，$AE=FB=x$，于是$EF=60-2x$，则有

$$y=f(x)=(60-2x)^2x.$$

这里$x$的取值范围是$0<x<30$.

这个问题将在第二章中从理论上加以阐述，在那里将得知$x=10$厘米时，所得溶槽的容积最大，为16,000立方厘米。

这类问题在国民经济中的意义是：如何使一定的物力（物资）发挥最大(最高)效率。这显然是经济管理中的重要问题，

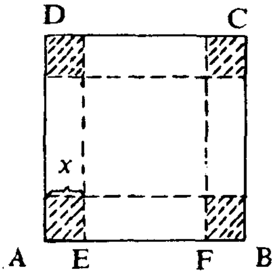


图 1—1

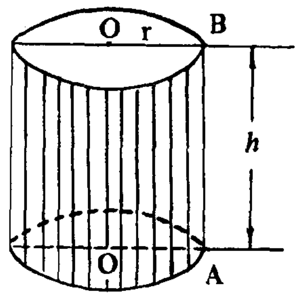


图 1—2

例 2　制造一种圆柱形的金属筒，上、下底和侧面采用同样规格的金属薄板，每个筒的容积为 $2000\pi$ 立方厘米。试求每个圆筒的底半径和高各为多少厘米，才能使造价最低（消耗材料最少）？

如图 1—2，设圆筒的底半径 $OA=r$，高 $AB=h$，用 $m$ 表示每个圆筒所用材料，则

$$m=2\pi r^2+2\pi rh, \qquad (1^\circ)$$

依任务要求

$$\pi r^2 h=2000\pi, \qquad (2^\circ)$$

由 $(1^\circ)$、$(2^\circ)$ 消去 $h$，得

$$m=f(r)=2\pi r^2+\frac{4000\pi}{r}. \qquad (3^\circ)$$

这里要求 $r$ 的取值范围为 $r>0$.

这个问题将在第二章中从理论上加以阐述，在那时将知 $r=10$ 厘米、$h=20$ 厘米时，每个圆筒造价最低（消耗材料最少）。

这类问题在国民经济中的意义是：完成一定的任务，如何

使用(消耗)最少的物资(物力、财力)。这显然也是经济管理中的一类重要问题。

**例3** 某河流的水文站记录了该河流历年的月流量(即一个月流过的水量的总和),现将近30年的平均月流量$\varphi$列表如下:

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | 37 | 42 | 53 | 45 | 38 | 73 | 440 | 450 | 190 | 110 | 85 | 50 |

这里有两个变量:月份$t$与流量$\varphi$(以万立方米计)。$t$的取值只能是1、2、3……11、12,每取定$t$的一个值,从表中便可唯一地确定出$\varphi$的一个值,在表中容易看出七、八月份的流量最大,一、二月份的流量最小。

**例4** 某地区一天中气温$H$与时间$t$是两个变量。该地区的气象站自动记录的一天气温变化的一条曲线如图1—3,这条曲线表现了气温$H$随时间$t$变化的规律。在这里$t$的变化范围是$0\leqslant t\leqslant 24$,在$t$的变化范围内,每给定$t$一个值,就可从图中确定出$H$的唯一的一个相应值。

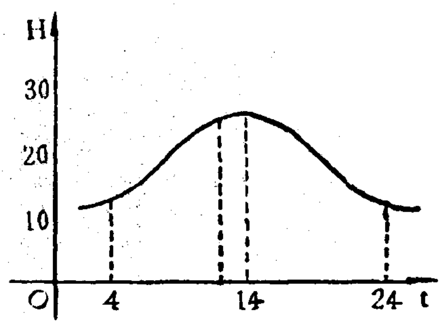

图1—3

上面几个例题,虽然在具体的实际意义上各有不同,变量之间的对应关系也是用不同方式表达的,但它们有着重要的共性,即:抽去上面这些例题中所表示的具体内容,我们看到,它们都是表达了两个变量之间变化的相依关系及其取值范围。

这种相依关系给出了一种对应法则（有分析表达式、列表、图形等不同的表现形式）。根据这一对应法则，当其中一个变量在某范围内每取一个数值时，另一变量就有唯一的确定的一个数值与之对应。两个变量间的这种对应关系我们称它为函数关系，也就是函数概念的实质。为了今后对函数做一般的讨论，我们抛开它的具体内容，而给出它的数学抽象定义。

*函数定义* 设在某一变化过程中，有两个变量$x$和$y$，如果对于变量$x$在它的变化范围内所取的每一个值，根据一定的对应规律可确定变量$y$的唯一的一个值，那么我们就说变量$y$是变量$x$的函数。记为

$$y=f(x)$$

其中$x$叫做自变量，它的所有能够取值的范围，叫做函数的定义域；$y$随$x$的变化而变化（泛称），叫做因变量。如果自变量$x$取一值$x_0$时，因变量$y$也对应地取一值$y_0=f(x_0)$，称$y_0$为函数在$x=x_0$点的函数值，这时我们就说函数$y=f(x)$在$x=x_0$点有定义。函数$y$取值的范围叫做函数的值域，$x$与$y$之间的对应法则叫做函数的对应律，上式$y=f(x)$中的“$f$”是表示对应律的符号。这里应该指出，实质上函数并不是指因变量$y$，而是指其间的对应规律，亦即以符号$f$所表示的规律。但我们也遵照一般习惯，说因变量$y$是自变量$x$的函数。

*单值函数与多值函数* 在某一变化过程中，$x$每取一值，$y$就有一值且仅有一值与之对应，这时就说$y$是$x$的单值函数。但在实际问题中，有时会遇到自变量$x$取某一值，与之对应的因变量$y$能取得两个或两个以上的数值，这时就说$y$是$x$的多值函数，例如$y=f(x)=\mathrm{Arcsin}x=n\pi+(-1)^n\arcsin x$是定义在$(-1\leqslant x\leqslant 1)$上的多值函数。这时我们取$y=\mathrm{Arcsin}x$曲线

的一段主分支$y=\arcsin x$作为讨论的对象，它的定义域是($-1\leqslant x\leqslant+1$)，值域是($-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$)，结果就成了$x$每取一值，对应唯一的一个$y$值，然后进行讨论，较为便利而确切。

例5　函数$y=f(x)=x^2-5x+6$，试求当$x$等于$x_0$、0、3、4、$-2$、$(a+b)$时的函数值。

解：$y_0=f(x_0)=x_0^2-5x_0+6$，

$y|_{x=0}=f(0)=0^2-5\cdot0+6=6$，

$f(3)=3^2-5\times3+6=0$，这表示$x=3$是$y=f(x)$的一个根。

$f(4)=4^2-5\times4+6=2$，

$f(-2)=(-2)^2-5(-2)+6=20$，

$$f(a+b)=(a+b)^2-5(a+b)+6$$
$$=a^2+b^2+2ab-5a-5b+6.$$

在同一个问题讨论的过程中，对于不同的函数关系（即不同的对应律），当然应采用不同的函数符号。采用作为函数对应律的符号的字母，通常用$f$、$\varphi$、$\psi$、$F$、$G$、$\Phi\cdots$；有时也用因变量字母本身作为函数的符号，例如$u=\sin x$，可记为$u=f(x)=\sin x$.

函数的表示法　由前面的几个例题可以看出，表示函数对应关系的方法是多种多样的，常见的有：（1）分析式表达法，如例1、例2。这种方法便于分析论证。（2）列表法，即根据调查或实验得来的数据组列成表格，如例3。这种列表法在经济问题研究中是常被采用的。（3）图形法（或图示法）。这种方法在工业企业管理上常被采用，它比较直观，能使所讨论的问题一目了然，如例4。

**Ⅲ．区间概念**

介于数轴上某两点$a$、$b$（设$a<b$）之间的全部点（亦即两数$a$、$b$之间的全部实数）叫做区间。$a$、$b$叫做区间的端点，不包含两端点$a$、$b$在内的区间叫做开区间，记为（$a$，$b$）或$a<x<b$；包含两端点$a$、$b$在内的叫做闭区间，记为［$a$，$b$］或$a\leqslant x\leqslant b$；区间也有半开半闭的，如［$a$，$b$）是左闭右开区间；（$a$，$b$］是左开右闭区间。

**Ⅳ．分段函数**

在我们所遇到的问题和它们涉及的范围有时所引出的函数关系的表达式不只是一个，而是按自变量取值范围分段的两个或两个以上的分析表达式，我们称这种函数为分段函数。下面用例题说明。

例6　$y=f(x)=|x|$，求其分析表达式和定义域。

解：$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & （当x<0）．\\ x & （当x\geqslant 0）．\end{cases}$$

这是分段用两个式子表达的函数，它的定义域是全体实数。

例7　$A$、$B$两地公共汽车运输，旅客携带行李不超过10公斤者，不收行李运费；超过10公斤至25公斤的，每公斤收运费0.12元；超过25公斤至100公斤的，每公斤收运费0.20元，试列出运输行李的收费表达式。

解：设$x$表示某一旅客行李的公斤数，依题意得运费表达式为：

$$f(x)=\begin{cases}0, & （0<x\leqslant 10），\\ 0.12(x-10), & （10<x\leqslant 25），\\ 0.2(x-25)+1.8, & （25<x\leqslant 100）．\end{cases}$$

这是用三个式子表达的分段函数，它的定义域为$0<x\leqslant 100$．

应该注意：函数的定义域可能是数轴上的一个区间，也可

能是若干区间，例如$y=\mathrm{tg}x$的定义域是

$\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\cdots$。还可能是数轴上一些彼此离散的点，例如整标函数$f(n)=\frac{1}{n}$的定义域就是数轴上除0点外的整数点。

如果一个函数由分析式给出，并且没有附加规定，那末这个函数的定义域就是使该分析式有值（有定义）的全部自变量值，例如，前面例1中的函数

$$y=f(x)=4x^3-240x^2+3600x,$$

若不限制条件，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$；但若加上例1原题的实际意义要求的条件后，则其定义域为$0<x<30$.

例8　试求函数 $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$的定义域。

解：如欲$y$取得实数值，须

$$1-x^2\geqslant0，x^2\leqslant1，|x|\leqslant1，$$

则须　　$-1\leqslant x\leqslant+1$，

故所求定义域为闭区间$[-1，+1]$.

例9　试求出函数　$y=\Phi(x)=\sqrt{1-x}$ 的定义域。

解：欲$y$取得实数值，则须$1-x\geqslant0$，$x\leqslant1$，故所求定义域为$-\infty<x\leqslant1$，或$(-\infty，1]$.

例10 试求出函数$y=f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域.

解：如欲函数$y=f(x)$取得实数值，须

$$1-x^2>0，\quad x^2<1，\quad |x|<1，$$

则须　$-1<x<+1$，

故所求的定义域为开区间$(-1，+1)$.