

物理学中的 几何方法

Geometrical Methods in Physics

● 余扬政 冯承天



CHEP

高等教育出版社



Springer

施普林格出版社

物理学中的几何方法

Geometrical Methods in Physics

余扬政 冯承天



CHEP
高等教育出版社



Springer
施普林格出版社

(京) 112 号

图书在版编目 (CIP) 数据

物理学中的几何方法/余扬政, 冯承天. —北京:
高等教育出版社; 海德堡: 施普林格出版社, 1998. 12
ISBN 7-04-006895-8

I. 物… II. ①余… ②冯… III. 数学物理方法-几何学
IV. 0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 19575 号

高等教育出版社
施普林格出版社 出版
北京沙滩后街 55 号

邮政编码: 100009 传真: 64014048 电话: 64054588

新华书店总店北京发行所发行
北京外文印刷厂印装

*

开本 880×1230 1/32 印张 17.125 字数 470 000

1998 年 12 月第 1 版 1998 年 12 月第 1 次印刷

定价 32.50 元

© China Higher Education Press Beijing and
Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1998

版权所有, 不得翻印

同氣連枝

同胞共嗚呼

陳者身

2/10/1941

序 言

物理几何是一家，共同携手到天涯。
黑洞单极穷奥秘，纤维连络织锦霞。
进化方程孤立异，对偶曲率瞬息差。
畴算竟有天人用，拈花一笑欲无言。

—陈省身—

天衣岂无缝，匠心剪接成。
浑然归一体，广邃妙绝伦。
造化爱几何，四力纤维能。
千古寸心事，欧高黎嘉陈。

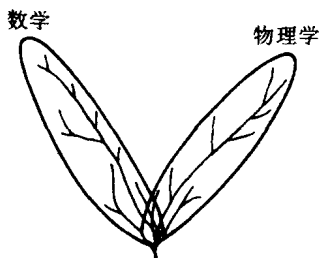
—杨振宁—

物理学和数学的关系，个中妙谛实非言可尽。尽管各自有不同的传统和价值判断准则，物理学更依据客观自然，本质上是实验的科学；而数学则更着重于理性思维，有人称之为科学中的艺术。但是物理学的每一步发展均离不开数学提供武器，数学又从物理学的发展获得了动力和思想。这种密切的关系正如大数学家陈省身指出的，是“同气连枝，同胞共哺”。著名物理学家杨振宁用图来形象地表示这种关系（图一）^①。陈省身教授后来也给出了另一个图象（图二）^②。众所周知，几何学是物理学借以发展的最古老的数学分支。本世纪最重要的两项

① Yang C. N. Fibre Bundles and the Physics of the Monopole, The Chern Symposium 1979. Springer-Verlag, 1980.

② 陈省身，陈维桓，微分几何讲义，北京大学出版社，1983。

理论物理发展——Einstein 广义相对论和 Yang-Mills 规范场论，令人信服地显示了几何理论对理论物理学发展的重要意义。正如 50 年代开始，群论逐渐被广大物理工作者所重视一样，越来越多的大学已经意识到物理系的数学课程不能只局限于普通微积分和微分方程的范围了，从而纷纷开设了近代微分几何方面的课程。



图一



图二

本教程就是在此形势下产生的。70 年代末开始，首先冯承天在全国多次讲习班和研讨会上介绍了近代微分几何及其在物理学中的应用，然后我们分别在上海师范大学和厦门大学物理系本科高年级学生和研究生开设物理学中的几何方法的课程。1989 年曾以讲义形式出版。此书就是在这些讲义和讲稿的基础上几经修改整理而成的。根据我们教学实践经验，考虑到我国目前课程设置的情况，即使是物理系低年级研究生，仍缺乏集合、代数、群和张量等方面的基础知识，而这些内容又是学习近代微分几何的基础，且与几何学又是相互关联，彼此渗透的。所以按照循序渐进，由浅入深的原则，在本书前面一些章节首先介绍这方面知识，在这个意义上讲，本书也可以作为群论的入门教程。具体地说，本书共二十五章。第一章介绍了集合论的初步知

识，这是数学各领域的基础。第二章讲述了群论基础。第三章引入了代数和代数系的概念。而第四章介绍向量空间的基本知识。有了这些准备，我们在第五章至第八章中，以物理学中常见的一些连续群为例，介绍了群论。第九章转而介绍张量分析基础，并通过曲线坐标中的张量分析，引入 Riemann 几何初步。第十章我们在 \mathbf{R}^n 空间中引入外微分形式，并以实例叙述了它在物理学中的应用。以上十章内容也可以作为物理系本科生数学物理教程的补充。在这些知识的基础上，我们就可以转入近代微分几何的课题了。第十一章引入拓扑空间概念，然后在第十二和十三两章讨论拓扑空间的整体性质——同伦群，接着在第十四章中引入了近代微分几何最重要的概念——流形。紧接着第十五章介绍流形上的外微分形式，然后我们讨论了流形上群结构和微分结构的复合体——Lie 群和 Lie 代数，这是第十六章的内容。上面我们已经提到规范场理论与近代微分几何理论关系非常密切，具体地说，指的是纤维丛，它是研究整体性质和局域性质的有效的数学工具，我们在第十七章详细介绍纤维丛的基本理论。大家知道，分析力学在经典力学和量子力学的相互对应中起着关键的作用，在这里就要涉及到辛流形，第十八章我们就讨论 Hamilton 力学的辛结构问题。第十九章从具体例子引入了流形上的分布与对偶分布的概念。并叙述了关于分布完全可积性的 Frobenius 理论及其应用。应该可以说，同调群和 de Rham 上同调群是描述流形大范围整体拓扑性质的最有效的数学工具，我们分别在第二十章和第二十二章中详细地讨论它们。在第二十一章介绍了流形上的积分理论。涉及到流形上的积分，Gauss-Bonnet 定理占有特殊重要的地位，它建立了流形上局域性质和整体性质的联系。我们在第二十三章中介绍这方面的内容，在本章中我们还介绍微分流形上有重要意义的函数——Morse 函数。第二十四章我们论述了流形上的联络理论，讨论了仿射联络空间和 Riemann 流形。最后作为微分几何方法在物理学中应用的实例，我们在第二十五章讨论了电动力学，这一章也有独立阅读的价值。

本书是作为物理系本科生和研究生教材而编写的，但也可以作为对理论物理学感兴趣的数学系学生和教师的参考书。我们相信，本书

内容对于一般物理学工作者也是有用的。需要强调的是，本书的着眼点是数学在物理学中的应用，并不追求纯数学的严密性，故对于大部分定理或不予证明，或简单地作一些说明。尽管我们力图深入浅出地、直观地论述近代微分几何的知识，但是要较好掌握本书内容，读者应完成书中建议的练习，正如陆游在“冬夜读书示子聿”一首诗中所说的，“纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行”，多多动手是唯一途径！

近代微分几何内容丰富多彩，如纤维丛的示性类和 Atiyah-Singer 指标定理等，在理论物理中有着重要的应用，但由于篇幅所限，不能一一介绍了。对于要更深入一步了解物理学中几何方法的读者，我们推荐 T. Eguchi (江口徹), P. B. Gilkey 和 A. J. Hanson 著: *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry* (*Phys. Rep.* **66**, No. 6, 1980, 213~393), 侯伯元和侯伯宇著: *物理学家用的微分几何* (科学出版社, 1990) 和虞言林著: *指标定理与热定理方法* (上海科学技术出版社, 1996)。有了本书的知识，这些书就不难掌握了。

最后，要感谢兰州大学段一士教授，复旦大学倪光炯教授，首都师范大学栾德怀教授和南开大学陈天伦教授的关心，也要感谢复旦大学陆全康教授，他仔细地审阅了全书，并提出了一些宝贵意见。还要感谢高等教育出版社的杨再石、陈小平和林金安、赵天夫等同志的热心支持，他们为本书的出版给予了很大的促进和帮助。最后作者深切悼念董素梅女士，她为本书最早以讲义形式出版付出了辛勤的劳动。

由于作者水平有限，经验不足，错误及不妥之处在所难免，诚恳欢迎批评指正。

余扬政 冯承天

1997 年金秋于厦门

目 录

序 言	(1)
第 1 章 集合论基础	(1)
1.1 集合的基础	(1)
1.2 集合的运算	(3)
1.3 映射	(5)
1.4 关系、次序关系、等价关系和分类	(7)
参考文献	(12)
第 2 章 群论基础	(13)
2.1 群的定义	(13)
2.2 子群和陪集	(16)
2.3 共轭与共轭类	(18)
2.4 不变子群与商群	(19)
2.5 同态与同构	(21)
2.6 同态的序列	(23)
2.7 直积群	(24)
参考文献	(25)
第 3 章 代数系和数系	(27)
3.1 代数系的概念	(27)
3.2 自然数及其性质	(28)
3.3 整数整域	(29)
3.4 体和有理数体	(30)
3.5 Cauchy 数列和实数体	(32)
3.6 复数体和代数学基本定理	(33)
3.7 超复数数系	(34)
3.8 四元数系 $Q(R)$	(35)

3.9	八元数系 Ω 和十六元数系 $\Gamma(R)$	(37)
3.10	向量空间	(38)
3.11	体上的代数	(40)
3.12	例子: 谐振子的能级	(41)
	参考文献	(43)
第 4 章	向量空间的理论	(44)
4.1	向量空间中的一些基础理论	(44)
4.2	商空间	(46)
4.3	线性映射	(47)
4.4	对偶空间	(49)
4.5	不变子空间	(51)
4.6	Euclid 空间	(53)
4.7	酉空间	(55)
	参考文献	(56)
第 5 章	群表示论概要	(58)
5.1	群表示的概念	(58)
5.2	可约表示和完全可约表示	(60)
5.3	酉表示	(62)
5.4	矩阵的张量积与张量积空间中的变换	(63)
5.5	群表示论中的一些重要定理	(64)
5.6	正则表示	(73)
5.7	量子力学和群论	(75)
	参考文献	(77)
第 6 章	张量的概念	(79)
6.1	$SO(2)$ 群及其向量	(79)
6.2	$SO(2)$ 群的张量	(81)
6.3	$SO(3)$ 群的张量	(82)
6.4	惯性张量	(85)
6.5	$O(3)$ 群的张量	(87)
6.6	齐次 Lorentz 群 L	(90)

6.7	齐次 Lorentz 群 L 的张量及其结构	(92)
6.8	电磁场张量及 Maxwell 方程	(93)
6.9	4 维不变量	(95)
	参考文献	(98)
第 7 章	线性群的张量	(99)
7.1	向量空间中基的变换和 $GL(n, K)$ 群	(99)
7.2	协变向量	(100)
7.3	$GL(n, K)$ 群的张量	(103)
7.4	线性张量的运算	(105)
7.5	张量分量的变换和张量的缩并	(107)
7.6	正交群的张量	(110)
7.7	张量代数 $J(V)$	(110)
7.8	2 阶反对称协变张量空间	(111)
7.9	协变张量的反称化	(112)
7.10	外积(反称积)	(114)
7.11	$\Delta^r(V)$ 的构造	(115)
7.12	外代数	(116)
	参考文献	(117)
第 8 章	$O(3)$ 群、$SO(3)$ 群和 $SU(2)$ 群及其应用	(118)
		(118)
8.1	道路连通性问题	(118)
8.2	$SO(3)$ 群的道路连通性	(120)
8.3	单连通的 $SU(2)$ 群	(122)
8.4	$SU(2)$ 与 $SO(3)$ 的 2—1 同态	(123)
8.5	四元数和有限转动的合成	(126)
8.6	$SU(2)$ 群和旋量	(127)
8.7	矩阵的指数函数及其性质	(130)
8.8	$U(n)$ 群及其 Lie 代数	(131)
8.9	$\mathfrak{su}(2)$ 的几何意义	(133)
8.10	A_1 型 Lie 代数	(134)

8.11	A_1 型代数的 Bose 子算符实现	(135)
8.12	Lie 代数及其表示的一般概念	(137)
8.13	A_1 型 Lie 代数的有限维既约表示的完全系	(138)
8.14	表示 ρ' 的权以及 $\rho' \otimes \rho''$ 的约化	(140)
8.15	Clebsch-Gordan 系数	(143)
8.16	既约张量算子	(144)
8.17	Wigner-Eckart 定理和选择定则	(145)
8.18	$SO(3)$ 群的有限维既约表示的完全系	(147)
8.19	$O(3)$ 群的有限维既约表示的完全系	(150)
8.20	单电子原子多极矩跃迁的选择定则	(151)
	参考文献	(152)
第 9 章	曲线坐标和张量分析	(154)
9.1	曲线坐标	(154)
9.2	曲线坐标下的基本度量形式	(156)
9.3	把张量的概念进一步扩展	(158)
9.4	曲线坐标下的向量和张量	(161)
9.5	曲线坐标系的基本方程	(163)
9.6	协变微分	(166)
9.7	梯度、散度和旋度作为协变导数	(170)
9.8	Newton 方程在曲线坐标下的形式	(174)
9.9	仿射空间和 Riemann 空间	(176)
9.10	Minkowski 几何	(178)
9.11	Riemann 空间中的张量分析	(182)
9.12	Riemann 曲率张量	(186)
9.13	Einstein 场方程	(188)
9.14	短程线和力的几何化	(191)
	参考文献	(194)
第 10 章	R^3 中的外微分形式及其应用	(195)
10.1	外微分形式和外积	(195)
10.2	向量代数与外积运算	(197)

10.3	外微分形式的外微分	(197)
10.4	外微分形式和向量场的微分运算	(199)
10.5	热力学中的 Maxwell 等式	(200)
10.6	Maxwell 方程组的外微分形式	(201)
10.7	外微分形式的积分以及 Stokes 定理	(203)
10.8	Stokes 定理、散度定理和 Green 定理	(205)
10.9	完全可积和 Frobenius 定理	(208)
10.10	闭形式和恰当形式及其应用	(209)
	参考文献	(212)
第 11 章	拓扑空间	(213)
11.1	哥尼斯堡七桥问题	(213)
11.2	正多面体的 Euler 示性数	(214)
11.3	拓扑空间的引入	(217)
11.4	聚点、闭集和闭包	(218)
11.5	内点、外点和边界	(220)
11.6	邻域和邻域系	(221)
11.7	连续映射和同胚	(222)
11.8	特殊拓扑空间	(224)
11.9	拓扑空间的附加特性	(228)
	参考文献	(233)
第 12 章	基本群	(234)
12.1	一个简单的例子	(234)
12.2	道路连通	(235)
12.3	闭道路和同伦	(236)
12.4	基本群	(238)
12.5	同伦映射和同伦型	(241)
12.6	Euclid 单纯形、复形及三角剖分	(245)
12.7	基本群的计算定理	(248)
	参考文献	(250)
第 13 章	高维同伦群和孤子	(251)

13.1	引言	(251)
13.2	高维同伦群的定义	(252)
13.3	相对同伦群	(253)
13.4	恰当序列	(254)
13.5	拓扑不变量	(255)
	参考文献	(261)
第 14 章	流形	(262)
14.1	流形的引入	(262)
14.2	流形的定义	(264)
14.3	可微映射	(267)
14.4	可微映射的秩以及浸入、浸没、嵌入和子流形	(268)
14.5	切向量和切向量空间	(271)
14.6	C^∞ 映射的微分	(274)
14.7	协变向量	(276)
14.8	积流形	(277)
14.9	向量场及其对数量场的作用	(277)
14.10	向量场的交换子积	(278)
	参考文献	(279)
第 15 章	外微分形式	(280)
15.1	切张量和张量场	(280)
15.2	反称积	(282)
15.3	外微分运算 d	(284)
15.4	闭形式、恰当形式和 Poincaré 引理	(285)
15.5	映射 f 的推进 f_* 和拉回 f^*	(287)
15.6	向量场与微分形式的内积	(289)
15.7	Lie 导数问题	(290)
15.8	向量空间 V 上的度规	(295)
15.9	度规向量空间上的和流形上的 Hodge $*$ 运算	(296)
15.10	余微分	(301)
15.11	向量值形式	(303)

参考文献	(305)
第 16 章 Lie 群和 Lie 代数	(306)
16.1 Lie 群的定义	(306)
16.2 左不变向量场	(307)
16.3 Lie 群的 Lie 代数	(309)
16.4 Lie 群和 Lie 代数的同态	(310)
16.5 Lie 子群和 Lie 子代数	(311)
16.6 单参数子群	(312)
16.7 指数映射	(313)
16.8 伴随表示	(315)
16.9 变换群	(316)
16.10 典型群	(318)
16.11 典型群的 Lie 代数	(319)
16.12 Lie 群上的不变形式	(321)
16.13 通用覆盖群	(323)
16.14 爱尔兰根纲领	(325)
参考文献	(326)
第 17 章 纤维丛	(327)
17.1 引言	(327)
17.2 纤维丛	(329)
17.3 切丛和余切丛	(335)
17.4 张量丛	(337)
17.5 向量丛	(338)
17.6 主(纤维)丛	(339)
17.7 伴丛	(341)
参考文献	(344)
第 18 章 Hamilton 力学的辛结构	(345)
18.1 位形空间、状态空间和相空间	(345)
18.2 辛形式和辛流形	(347)
18.3 Hamilton 向量场和 Hamilton 正则方程	(347)

18.4	Lagrange 力学	(348)
18.5	Poisson 括号和辛变换	(351)
18.6	正则变换问题	(353)
18.7	H 显含时间 t 时的切触变换	(355)
18.8	H 显含时间 t 时的正则变换	(357)
18.9	H 显含时间 t 时的 Poisson 括号	(359)
	参考文献	(360)
第 19 章	Frobenius 理论	(361)
19.1	引言	(361)
19.2	从微分几何角度看完全可积问题	(363)
19.3	流形上的全微分方程	(365)
19.4	对偶分布	(367)
19.5	有关流形上外代数的一些术语	(368)
19.6	Frobenius 定理的微分形式表述	(369)
19.7	Frobenius 定理在热力学中的应用和 Carathéodory 的不可接近定理	(372)
19.8	极大积分流形	(373)
	参考文献	(374)
第 20 章	同调群	(375)
20.1	无向单形和有向单形	(375)
20.2	单纯复合形和链	(376)
20.3	有关 Abel 群的一些理论	(379)
20.4	单纯复合形 K 的 q 维同调群	(380)
20.5	同调群的性质	(384)
20.6	同调群例	(387)
20.7	相对同调群	(390)
20.8	恰当序列和 Kunneth 公式	(392)
20.9	奇异同调群	(397)
20.10	流形的剖分	(401)
	参考文献	(402)

第 21 章 流形上的积分理论	(403)
21.1 Euclid 空间 R^n 中的积分	(403)
21.2 向量空间的定向	(405)
21.3 流形的定向	(406)
21.4 诱导定向	(408)
21.5 R^n 中的 n 次形式的积分	(410)
21.6 形式在链上的积分	(411)
21.7 定向流形上的积分	(413)
21.8 带边流形上的 Stokes 定理	(419)
21.9 微分形式作为多重线性映射观点下的积分	(421)
21.10 应用: 力学中的不变积分	(422)
参考文献	(426)
第 22 章 de Rham 上同调群	(427)
22.1 流形上的 de Rham 上同调群	(427)
22.2 de Rham 上同调群的例子	(429)
22.3 有紧致支集的 de Rham 上同调群	(434)
22.4 de Rham 定理	(435)
22.5 映射度和环绕数	(438)
22.6 Laplace-Beltrami 算子的另一些性质	(440)
22.7 Hodge 分解定理及其在上同调群理论中的应用	(442)
22.8 Poincaré 对偶性	(445)
22.9 上积	(447)
参考文献	(448)
第 23 章 Gauss-Bonnet 定理、流形上的向量场和 数量场以及 Morse 理论	(449)
23.1 曲线和曲面上曲线的曲率	(449)
23.2 曲面的曲率	(451)
23.3 Gauss-Bonnet 定理	(453)
23.4 从 Gauss-Bonnet 定理看闭曲面的 Euler 示性数	(455)