物理学中的几何方法

Geometrical Methods in Physics

余扬政 冯承天

CHEP
Springer
高等教育出版社 施普林格出版社

物理学中的几何方法

Geometrical Methods in Physics

余扬政　冯承天

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

(京) 112 号

图书在版编目 (CIP) 数据

物理学中的几何方法/余扬政，冯承天．—北京：
高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社，1998.12
ISBN 7-04-006895-8

Ⅰ．物… Ⅱ．①余… ②冯… Ⅲ．数学物理方法-几何学
Ⅳ．0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 19575 号

高等教育出版社
施普林格出版社 出版
北京沙滩后街 55 号
邮政编码：100009 传真：64014048 电话：64054588
新华书店总店北京发行所发行
北京外文印刷厂印装

*

开本 880×1230 1/32 印张 17.125 字数 470 000
1998 年 12 月第 1 版 1998 年 12 月第 1 次印刷
定价 32.50 元

同氣連枝
同胞共哺

陳省身

序　言

物理几何是一家，共同携手到天涯。
黑洞单极穷奥秘，纤维连络织锦霞。
进化方程孤立异，对偶曲率瞬息差。
畴算竟有天人用，拈花一笑欲无言。
—陈省身—

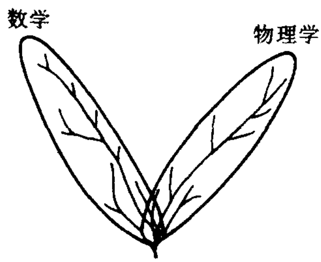
天衣岂无缝，匠心剪接成。
浑然归一体，广邃妙绝伦。
造化爱几何，四力纤维能。
千古寸心事，欧高黎嘉陈。
—杨振宁—

物理学和数学的关系，个中妙谛实非言可尽。尽管各自有不同的传统和价值判断准则，物理学更依据客观自然，本质上是实验的科学；而数学则更着重于理性思维，有人称之为科学中的艺术。但是物理学的每一步发展均离不开数学提供武器，数学又从物理学的发展获得了动力和思想。这种密切的关系正如大数学家陈省身指出的，是“同气连枝，同胞共哺”。著名物理学家杨振宁用图来形象地表示这种关系（图一）[1]。陈省身教授后来也给出了另一个图象（图二）[2]。众所周知，几何学是物理学借以发展的最古老的数学分支。本世纪最重要的两项

[1] Yang C N. Fibre Bundles and the Physics of the Monopole, The Chern Symposium 1979. Springer-Verlag, 1980.

[2] 陈省身，陈维桓．微分几何讲义．北京大学出版社，1983.

理论物理发展——Einstein 广义相对论和 Yang-Mills 规范场论，令人信服地显示了几何理论对理论物理学发展的重要意义。正如 50 年代开始，群论逐渐被广大物理工作者所重视一样，越来越多的大学已经意识到物理系的数学课程不能只局限于普通微积分和微分方程的范围内了，从而纷纷开设了近代微分几何方面的课程。



图一

图二

本教程就是在此形势下产生的。70 年代末开始，首先冯承天在全国多次讲习班和研讨会上介绍了近代微分几何及其在物理学中的应用，然后我们分别在上海师范大学和厦门大学物理系本科高年级学生和研究生开设物理学中的几何方法的课程。1989 年曾以讲义形式出版。此书就是在这些讲义和讲稿的基础上几经修改整理而成的。根据我们教学实践经验，考虑到我国目前课程设置的情况，即使是物理系低年级研究生，仍缺乏集合、代数、群和张量等方面的基础知识，而这些内容又是学习近代微分几何的基础，且与几何学又是相互关联，彼此渗透的。所以按照循序渐进，由浅入深的原则，在本书前面一些章节首先介绍这方面知识，在这个意义上讲，本书也可以作为群论的入门教程。具体地说，本书共二十五章。第一章介绍了集合论的初步知

识，这是数学各领域的基础。第二章讲述了群论基础。第三章引入了代数和代数系的概念。而第四章介绍向量空间的基本知识。有了这些准备，我们在第五章至第八章中，以物理学中常见的一些连续群为例，介绍了群论。第九章转而介绍张量分析基础，并通过曲线坐标中的张量分析，引入 Riemann 几何初步。第十章我们在 $\mathbf{R}^3$ 空间中引入外微分形式，并以实例叙述了它在物理学中的应用。以上十章内容也可以作为物理系本科生数学物理教程的补充。在这些知识的基础上，我们就可以转入近代微分几何的课题了。第十一章引入拓扑空间概念，然后在第十二和十三两章讨论拓扑空间的整体性质——同伦群，接着在第十四章中引入了近代微分几何最重要的概念——流形。紧接着第十五章介绍流形上的外微分形式，然后我们讨论了流形上群结构和微分结构的复合体——Lie 群和 Lie 代数，这是第十六章的内容。上面我们已经提到规范场理论与近代微分几何理论关系非常密切，具体地说，指的是纤维丛，它是研究整体性质和局域性质的有效的数学工具，我们在第十七章详细介绍纤维丛的基本理论。大家知道，分析力学在经典力学和量子力学的相互对应中起着关键的作用，在这里就要涉及到辛流形，第十八章我们就讨论 Hamilton 力学的辛结构问题。第十九章从具体例子引入了流形上的分布与对偶分布的概念。并叙述了关于分布完全可积性的 Frobenius 理论及其应用。应该可以说，同调群和 de Rham 上同调群是描述流形大范围整体拓扑性质的最有效的数学工具，我们分别在第二十章和第二十二章中详细地讨论它们。在第二十一章介绍了流形上的积分理论。涉及到流形上的积分，Gauss-Bonnet 定理占有特殊重要的地位，它建立了流形上局域性质和整体性质的联系。我们在第二十三章中介绍这方面的内容，在本章中我们还介绍微分流形上有重要意义的函数——Morse 函数。第二十四章我们论述了流形上的联络理论，讨论了仿射联络空间和 Riemann 流形。最后作为微分几何方法在物理学中应用的实例，我们在第二十五章讨论了电动力学，这一章也有独立阅读的价值。

本书是作为物理系本科生和研究生教材而编写的，但也可以作为对理论物理学感兴趣的数学系学生和教师的参考书。我们相信，本书

内容对于一般物理学工作者也是有用的。需要强调的是，本书的着眼点是数学在物理学中的应用，并不追求纯数学的严密性，故对于大部分定理或不予证明，或简单地作一些说明。尽管我们力图深入浅出地、直观地论述近代微分几何的知识，但是要较好掌握本书内容，读者应完成书中建议的练习，正如陆游在“冬夜读书示子聿”一首诗中所说的，“纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行”，多多动手是唯一途径！

近代微分几何内容丰富多彩，如纤维丛的示性类和 Atiyah-Singer 指标定理等，在理论物理中有着重要的应用，但由于篇幅所限，不能一一介绍了。对于要更深入一步了解物理学中几何方法的读者，我们推荐 T. Eguchi(江口徹)、P. B. Gilkey 和 A. J. Hanson 著：Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry (*Phys*. Rep. **66**, No. 6, 1980, 213～393)，侯伯元和侯伯宇著：物理学家用的微分几何（科学出版社，1990）和虞言林著：指标定理与热定理方法（上海科学技术出版社，1996）。有了本书的知识，这些书就不难掌握了。

最后，要感谢兰州大学段一士教授，复旦大学倪光炯教授，首都师范大学栾德怀教授和南开大学陈天仑教授的关心，也要感谢复旦大学陆全康教授，他仔细地审阅了全书，并提出了一些宝贵意见。还要感谢高等教育出版社的杨再石、陈小平和林金安、赵天夫等同志的热心支持，他们为本书的出版给予了很大的促进和帮助。最后作者深切悼念董素梅女士，她为本书最早以讲义形式出版付出了辛勤的劳动。

由于作者水平有限，经验不足，错误及不妥之处在所难免，诚恳欢迎批评指正。

余扬政　冯承天

1997 年金秋于厦门

目　录