

旋转壳的应力分析

北京大学固体力学教研室

水利电力出版社

12

旋转壳的应力分析

北京大学固体力学教研室

*

水利电力出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

*

1979年2月北京第一版

1979年2月北京第一次印刷

印数 0001—9910 册 每册 0.50 元

书号 15143·3400

内 容 提 要

本书介绍了弹性旋转薄壳应力分析的有限单元法。全书共分三章：第一章简明地介绍旋转壳的基本知识；第二、三章分别介绍旋转壳的静力和动力计算方案。在书末附录中给出了静力与动力计算的ALGOL-60源程序及其使用说明。

本书可供工程技术人员、科研人员和高等院校有关专业的师生参考。

前 言

旋转壳的应力分析是近代工程中常见的重要课题。例如，在设计大型双曲线自然通风冷却水塔以及其它的旋转壳形容器与元件时，不仅要了解它们在静力作用下的内力和位移，有时还需要了解它们的固有频率和振型，并进而计算动应力。

旋转壳的应力分析，早年是用所谓无矩理论（即在壳体基本方程组中略去弯矩）进行的。其结果的准确性，在某些条件下并不能满足工程设计的需要。随着电子计算机的发展，近年来不少人提出了用有矩理论计算的方案（参考文献[2]~[6]、[11]），并已为工程设计所广泛采用。

本书所述内容改进了文献[2]中静力分析的方法，并在此基础上增加了动力分析，从而提供了旋转壳应力分析有限单元解法的方案。根据这个方案，分别编制了静力程序（简称BS）和动力程序（简称BSD）。这两个程序可以处理具有下述特征的壳体：

1. 母线形状是任意光滑曲线；
2. 沿母线的厚度是变化的；
3. 边界条件是多种常见的情形，如固定、铰支、简支、自由或弹性支承等；BS程序还可以计算非齐次边界条件和不连续支承问题，BSD程序还可以计算边界具有集中质量环与集中转动惯量环的问题。

在BS程序中，荷载（如风载）与温度分布可以是任意非轴对称的。

BSD程序可以计算固有频率、振型和对于地震的反应。

本书只是介绍力学方案和计算程序，没有涉及实验内容。

本课题是水利电力部规划设计管理局为设计大型自然通风冷却水塔而提出的。

在水利电力部规划设计管理局的委托和大力支持下，我室自一九七三年以来，在旋转壳的应力分析方面进行了计算和实验工作。参加这项工作的：在静力方面有，武际可、曲圣年、苏先基、韩铭宝、王颖坚、李炜谱、马连芬等同志；在动力分析方面有，庄业高、袁明武、王大钧、文伶等同志。

本书由武际可、王大钧、袁明武同志执笔。编写过程中，清华大学黄克智同志、水利水电科学研究院陈厚群同志对书稿提出了宝贵意见，作者在此深表谢意。

由于作者水平有限，本书内容难免有不妥和错漏之处，敬希读者批评指正。

北京大学固体力学教研室

一九七八年三月

目 录

前 言

第一章 旋转壳的基本知识	1
第一节 旋转曲面的几何	1
第二节 旋转壳的变形	6
第三节 壳体的内力分量和变形能	11
第二章 用有限单元法解旋转壳的静力问题	17
第一节 函数的插值	17
第二节 壳体几何形状的插值	23
第三节 位移的插值	26
第四节 内力和变形分量的插值	29
第五节 单元刚度矩阵和广义力	34
第六节 总体刚度矩阵和广义力	39
第七节 边界条件及其处理方法	41
第八节 多根支柱的边界条件处理	45
第九节 算例	48
第三章 旋转壳的固有振动和地震反应	55
第一节 运动方程	55
第二节 边界条件及其处理方法	59
第三节 固有频率和振型的计算	61
第四节 壳体的地震反应	69
第五节 算例	78
附录一 BS程序使用说明	85
附录二 BS源程序	96
附录三 BSD 程序使用说明	129
附录四 BSD 源程序	136
参考文献	183

第一章 旋转壳的基本知识

第一节 旋转曲面的几何

一、旋转曲面

旋转曲面（见图1-1），是由一条平面曲线绕同一平面内的一条直线旋转而形成的曲面。这条曲线我们通常称为母线，这条直线称为旋转轴。母线在旋转的每一时刻与旋转轴构成的平面称为子午面，在旋转曲面上的这些母线称为子午线。母线上任一点的旋转轨迹是一个圆，这些圆称为平行圆，有时也称为纬圆。

在空间取直角坐标系 $oxyz$ ，令 oz 轴为旋转轴，则在旋转曲面上任一点 A 的坐标可以用下述参数方程表示：

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= f(r) \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

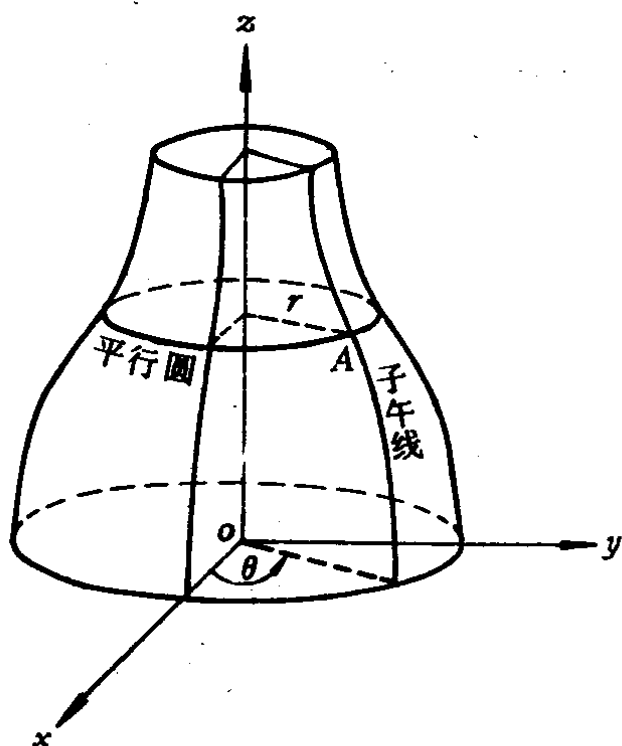


图 1-1 旋转曲面

这里， θ 为 A 所在子午面相对于 xoz 平面的夹角， r 为 A 点所在平行圆的半径。在 xoz 平面内，子午线的方程是 $z = f(x)$ 。

为方便起见，令 r 为 A 点的向径，并取 ox 、 oy 、 oz 轴上的单位向量为 i 、 j 、 k ，则参数方程 (1-1) 可以表示为

$$r = r \cos \theta i + r \sin \theta j + f(r) k \quad (1-1_a)$$

如果引用记号 $\{ \}$ 表示列向量（若其中的元素为向量时，则表示一个向量列）， $[\]$ 表示行向量或矩阵，上标 T 表示转置，于是

式 (1-1_a) 采用矩阵写法可记为

$$\mathbf{r} = [r \cos \theta \quad r \sin \theta \quad f(r)] \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (1-1_b)$$

如果不写单位向量列 $\begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix}$, 上式也可改写成如下列向量的形式:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ f(r) \end{Bmatrix} \quad (1-1_c)$$

显然, 给定 r 、 θ 的一组值, 则由公式 (1-1) 即可决定曲面上的一个点。其中, 当 r 为常量、 θ 变化时, 这个点的轨迹是平行圆; 而当 θ 为常量、 r 变化时, 得到这个点的轨迹是子午线。因此, r 、 θ 可以做为确定旋转曲面上点的坐标参数, 称为曲线坐标。

二、旋转曲面上的弧元

令旋转曲面上任一点 $A(r, \theta)$ 到其无限邻近一点 $B(r + dr, \theta + d\theta)$ 的曲线弧元的长度为 ds , 则由微分 (1-1) 式得

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = [1 + f'^2(r)] dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (1-2)$$

令 (1-2) 式中 $d\theta = 0$, 则得子午线的弧元

$$ds_1 = e \sqrt{1 + f'^2(r)} dr \quad (1-3)$$

这里, $e = 1$ (或 -1), 它的取值应当使沿规定的子午线弧长正方向上 ds_1 为正。令 (1-2) 式中 $dr = 0$, 则得平行圆的弧元为

$$ds_2 = r d\theta \quad (1-4)$$

三、旋转曲面上的活动标架

如图1-2所示, 在旋转曲面上任一点 A , 其子午线的切向量 e_1 与平行圆的切向量 e_2 , 都具有单位长度, 正方向分别为子午线弧长方向与 θ 增加方向。显然, e_1 与 e_2 是正交的。曲面在 A 点的法向量取 $\mathbf{n} = e_1 \times e_2$ 。 e_1 、 e_2 、 $\mathbf{n}$ 三个单位向量组成一个活动标

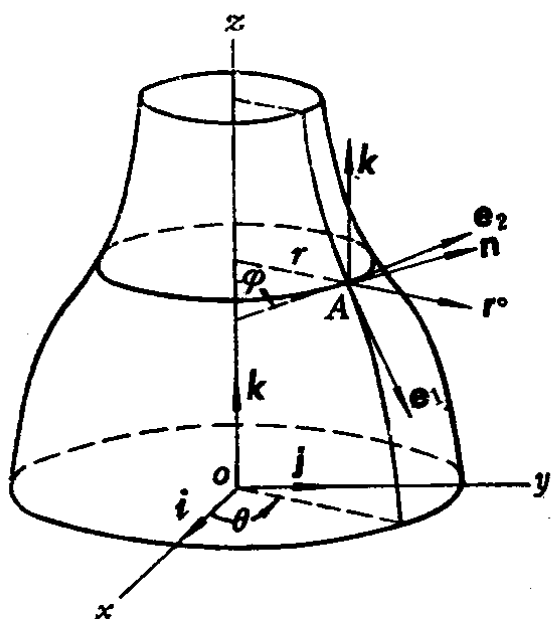


图 1-2 活动标架的坐标向量 但子午线的曲率

架，我们记为 $\{I\}$ 。对于曲面的每一点都有一个这样的标架。

如果用 φ 表示 z 轴与法向量 n 之间的夹角，则 $\frac{dr}{ds_1} = \cos\varphi$ ，故有

$$\left. \begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1}{e\sqrt{1+f'^2(r)}} \\ \sin\varphi &= -\frac{f'(r)}{e\sqrt{1+f'^2(r)}} \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds_1}$$

即 $ds_1 = R d\varphi \quad (1-6)$

故(1-2)式在引进 φ 后可化为

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + r^2 d\theta^2 \quad (1-2_a)$$

为了得到标架 $\{I\}$ 在直角坐标系中的分解，只要对(1-1)式微商并利用(1-5)式，使得

$$e_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_1} = [\cos\varphi \cos\theta \quad \cos\varphi \sin\theta \quad -\sin\varphi] \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix}$$

$$e_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_2} = [-\sin\theta \quad \cos\theta \quad 0] \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{n} = e_1 \times e_2 = [\sin\varphi \cos\theta \quad \sin\varphi \sin\theta \quad \cos\varphi] \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix}$$

把上面三个式子写在一起，得

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n \end{Bmatrix} = [\Delta] \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (1-7_a)$$

$$\begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} = [\Delta]^{-1} \{I\} \quad (1-7_b)$$

式中

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

易于验算

$$[\Delta]^{-1} = [\Delta]^T$$

在今后的讨论中，还要用到另一个活动标架

$$\{II\} = \begin{Bmatrix} k \\ e_2 \\ r^0 \end{Bmatrix}$$

这里， k 为 z 轴上的单位向量， e_2 为平行圆的切向量， r^0 为平行圆半径方向的单位向量（见图1-2）。显然，经过直接投影可得活动标架 $\{I\}$ 与 $\{II\}$ 之间的关系：

$$\left. \begin{aligned} \{I\} &= [T] \{II\} \\ \{II\} &= [T]^{-1} \{I\} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

式中

$$[T] = \begin{bmatrix} -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix}$$

而且

$$[T]^{-1} = [T]$$

四、活动标架 $\{I\}$ 的微商

活动标架 $\{I\}$ 的三个坐标向量沿着子午线或平行圆移动时，

通常它们的方向总要改变。现在，求它们对于弧长的微商，而且将这些微商得到的向量再在活动标架{I}内进行分解。由(1-7_a)式得

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\{I\} = \frac{\partial(\Delta)}{\partial s_1} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial s_2}\{I\} = \frac{\partial(\Delta)}{\partial s_2} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix}$$

再将(1-7_b)式代入上式右端，便得

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\{I\} = [\Delta_1]\{I\} \quad (1-9)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_2}\{I\} = [\Delta_2]\{I\} \quad (1-10)$$

式中

$$[\Delta_1] = \left[\frac{\partial}{\partial s_1}[\Delta] \right] [\Delta]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{R} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Delta_2] = \left[\frac{\partial}{\partial s_2}[\Delta] \right] [\Delta]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\cos \varphi}{r} & 0 \\ -\frac{\cos \varphi}{r} & 0 & -\frac{\sin \varphi}{r} \\ 0 & \frac{\sin \varphi}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

把(1-9)与(1-10)式写成分量的形式，便有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial s_1} &= -\frac{1}{R} \mathbf{n} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial s_2} &= \frac{\cos \varphi}{r} \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial s_1} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial s_2} &= -\frac{\cos \varphi}{r} \mathbf{e}_1 - \frac{\sin \varphi}{r} \mathbf{n} \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s_1} &= \frac{1}{R} \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s_2} &= \frac{\sin \varphi}{r} \mathbf{e}_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

第二节 旋 转 壳 的 变 形

一、旋转曲面的变形

设旋转曲面在变形后每一点获得一个位移向量 $\mathbf{V}$ ，它在活动标架 $\{\mathbf{I}\}$ 中的分解是

$$\mathbf{V} = u^* \mathbf{e}_1 + v^* \mathbf{e}_2 + w^* \mathbf{n} \quad (1-12)$$

变形后，原来由向径 $\mathbf{r}$ 表示的曲面上的点变到了

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{V} \quad (1-13)$$

令曲面上变形前两点 $A(r, \theta)$ 和 $B(r+dr, \theta+d\theta)$ ，在变形后其间的弧元长度为 $d\tilde{s}$ ，则

$$\begin{aligned} (d\tilde{s})^2 &= d\tilde{\mathbf{r}} \cdot d\tilde{\mathbf{r}} = (d\mathbf{r} + d\mathbf{V}) \cdot (d\mathbf{r} + d\mathbf{V}) \\ &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} + 2d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{V} + d\mathbf{V} \cdot d\mathbf{V} \end{aligned}$$

考虑到变形时位移与转动的微小性，略去 $d\mathbf{V}$ 的二次项，得

$$d\tilde{s}^2 = ds^2 + 2d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{V} \quad (1-14)$$

令 ε 为弧元 AB 在变形后获得的相对伸长，则

$$d\tilde{s} = (1 + \varepsilon) ds$$

故有 $d\tilde{s}^2 = (1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2) ds^2$ 。考虑到变形的微小性，略去 ε^2 项，得

$$d\tilde{s}^2 = (1 + 2\varepsilon) ds^2$$

把这个式子与 (1-14) 式相比较, 便得

$$\varepsilon = \frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{V}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{ds} \quad (1-15)$$

如果弧元 AB 取的是子午线或平行圆的弧元, 则这两个方向的应变相应为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_1} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_1} \cdot \mathbf{e}_1 \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_2} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_2} \cdot \mathbf{e}_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

我们知道, 变形前相互垂直的两个向量, 在变形后一般不再保持垂直了。这个夹角的变化即是剪应变。由于变形的微小性, 这个夹角的变化量近似地等于变形后相应两个方向的夹角的余弦, 于是剪应变

$$\omega = \frac{\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial s_2}}{\left| \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial s_1} \right| \left| \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial s_2} \right|} = \frac{\left(\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_1} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_2} \right)}{\sqrt{\left(\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_1} \right)^2 \left(\mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_2} \right)^2}}$$

考虑到变形与转动的微小性, 略去二次项中与 1 相比的小量, 得

$$\omega = \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_2} + \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_1} \quad (1-17)$$

为了把 ε_1 、 ε_2 、 ω 表示为位移分量的表达式, 需要把 (1-12) 式代入 (1-16) 和 (1-17) 式, 并进行微商。微商时, 对于坐标向量的微商需应用 (1-11) 式。经过简单的计算, 便可得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u^*}{\partial s_1} + \frac{w^*}{R} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} + \frac{u^*}{r} \cos \varphi + \frac{w^*}{r} \sin \varphi \\ \omega &= \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} + \frac{\partial v^*}{\partial s_1} - \frac{v^*}{r} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

曲面变形后, 它的法向量一般也不再是 $\mathbf{n}$ 了。现在来看变形后法向量 $\tilde{\mathbf{n}}$ 在活动标架 $\{\mathbf{I}\}$ 中的分解。

由于 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial s_1}$ 与 $\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial s_2}$ 是变形后曲面的两个切向量，所以法向量

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{n}} &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial s_1} \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial s_2} = \left(\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_1} \right) \times \left(\mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_2} \right) \\ &= \mathbf{n} + \mathbf{e}_1 \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_1} \times \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_1} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_2}\end{aligned}$$

考虑到位移与转动的微小性，可略去二阶项（即最后一项），再把（1-12）式代入，求微商并利用（1-11）式，得

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{n}} &= \left(1 + \frac{\partial v^*}{\partial s_1} + \frac{\partial u^*}{\partial s_2} \right) \mathbf{n} + \left(-\frac{\partial w^*}{\partial s_2} + v^* \frac{\sin \varphi}{r} \right) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \left(-\frac{\partial w^*}{\partial s_1} + \frac{u^*}{R} \right) \mathbf{e}_1\end{aligned}$$

与 1 相比，可略去小量，便得

$$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} + \vartheta \mathbf{e}_1 + \psi \mathbf{e}_2 \quad (1-19)$$

式中

$$\left. \begin{aligned}\vartheta &= -\frac{\partial w^*}{\partial s_1} + \frac{u^*}{R} \\ \psi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} + \frac{v^*}{r} \sin \varphi\end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

它们分别代表变形时法向量绕 $\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_1$ 的转角。

二、旋转曲面的平行曲面及其变形

若已经给了以式（1-1）为参数方程的曲面〔以下简称曲面（1-1）〕，现在来考虑由下式所组成的曲面：

$$\mathbf{r}_\zeta = \mathbf{r} + \zeta \mathbf{n} \quad (1-21)$$

式中 ζ 为常量。这张曲面，称为曲面（1-1）的平行曲面。实际上它代表距原来曲面为 ζ 的点所组成的曲面，所以又称为曲面（1-1）的等距曲面。显然平行曲面仍是旋转曲面。

易算得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}_\zeta}{\partial s_1} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_1} + \zeta \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s_1} = \left(1 + \frac{\zeta}{R} \right) \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial \mathbf{r}_\zeta}{\partial s_2} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_2} + \zeta \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s_2} = \left(1 + \frac{\zeta}{r} \sin \varphi \right) \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

由于这两个向量分别与标架 $\{\mathbf{I}\}$ 的两个坐标向量同向，所以，曲

面 (1-1) 和它的平行曲面上对应点的标架 $\{I\}$ 中三个坐标向量 e_1 、 e_2 和 n 都分别同向。而且，平行曲面沿子午线和平行圆的弧元分别为

$$\left. \begin{aligned} ds_1^\zeta &= \left(1 + \frac{\zeta}{R} \right) ds_1 \\ ds_2^\zeta &= \left(1 + \frac{\zeta}{r} \sin \varphi \right) ds_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

我们知道，旋转曲面 (1-1) 在每一点获得一个位移 (如 1-12 式所示)，如果要求在变形后平行曲面上的点与曲面 (1-1) 变形后对应的点仍为等距，而且距离参数 ζ 保持不变 (这就是通常所说的直法线假定)，并且令 V_ζ 表示变形后平行曲面所获得的位移向量，则变形后的平行曲面为

$$\tilde{r}_\zeta = r_\zeta + V_\zeta$$

由于变形前后的等距性，所以

$$V_\zeta = \tilde{r}_\zeta - r_\zeta = (\tilde{r} + \zeta \tilde{n}) - (r + \zeta n) = V + \zeta m \quad (1-23)$$

$$\text{式中} \quad m = \tilde{n} - n = \vartheta e_1 + \psi e_2 \quad (1-24)$$

故有

$$V_\zeta = (u^* + \zeta \vartheta) e_1 + (v^* + \zeta \psi) e_2 + w^* n \quad (1-25)$$

对于平行曲面，重复本节第一段的讨论，并考虑到 (1-22) 式，就可以得到平行曲面的变形分量为

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^\zeta &= \frac{\partial V_\zeta}{\partial s_1^\zeta} \cdot e_1 = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R}} \frac{\partial V_\zeta}{\partial s_1} \cdot e_1 \\ \varepsilon_2^\zeta &= \frac{\partial V_\zeta}{\partial s_2^\zeta} \cdot e_2 = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{r} \sin \varphi} \frac{\partial V_\zeta}{\partial s_2} \cdot e_2 \\ \omega^\zeta &= e_1 \cdot \frac{\partial V_\zeta}{\partial s_2^\zeta} + e_2 \cdot \frac{\partial V_\zeta}{\partial s_1^\zeta} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{r} \sin \varphi} \frac{\partial V_\zeta}{\partial s_2} \cdot e_1 + \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R}} \frac{\partial V_\zeta}{\partial s_1} \cdot e_2 \end{aligned}$$

如果把 (1-23) 式代入上述各式，并考虑 (1-15)、(1-17)

式, 略去 ζ^2 项后得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1' &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{R}} (\varepsilon_1 + \zeta \kappa_1) \\ \varepsilon_2' &= \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{r} \sin \varphi} (\varepsilon_2 + \zeta \kappa_2) \\ \omega' &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{r} \sin \varphi\right)} (\omega + 2\zeta \tau) \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

这里, 引进了下述新的变形分量:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\partial m}{\partial s_2} \cdot e_1 \\ \kappa_2 &= \frac{\partial m}{\partial s_2} \cdot e_2 \\ 2\tau &= \frac{\partial m}{\partial s_1} \cdot e_2 + \frac{\partial m}{\partial s_2} \cdot e_1 + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial V}{\partial s_1} \cdot e_2 + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial s_2} \cdot e_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

如果把 (1-24) 式代入上式, 并且考虑到 (1-20) 式, 则利用 (1-11) 式对标架向量的微商公式, 易于算得

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{\partial^2 w^*}{\partial s_1^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u^*}{\partial s_1} + u^* \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right) \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial w^*}{\partial s_1} + u^* \frac{\cos \varphi}{rR} \\ &\quad + \frac{\sin \varphi}{r^2} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \\ \tau &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w^*}{\partial s_1 \partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} + \frac{1}{rR} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial v^*}{\partial s_1} - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} v^* \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

我们知道, 厚度为 h 的壳体, 是以曲面 (1-1) 为中面, 并取 $-\frac{h}{2} \leq \zeta \leq \frac{h}{2}$ 所包含的全部平行曲面所组成的。通常, 由于壳体是十分薄的, 即 $\frac{h}{R} \ll 1$ 和 $\frac{h \sin \varphi}{r} \ll 1$, 故在 (1-26) 式

中略去与 1 相比的小项，便得到距中面为 ζ 的壳层的应变分量

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^\zeta &= \varepsilon_1 + \zeta \kappa_1 \\ \varepsilon_2^\zeta &= \varepsilon_2 + \zeta \kappa_2 \\ \omega^\zeta &= \omega + 2\zeta \tau \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

式 (1-18) 与 (1-28) 所定义的 ε_1 、 ε_2 、 ω 、 κ_1 、 κ_2 、 τ 六个分量称为壳体的变形分量，它们都是由中面的位移表示的，前三个是中面度量变形分量，后三个是表示中面弯曲变形的分量。

第三节 壳体的内力分量和变形能

一、壳体的内力分量

如果沿子午线和平行圆将壳体剖开，则在剖口之间存在着相互作用的应力。为确定起见，设想沿平行圆及其法线将薄壳剖开。现在来研究剖去的部分在剩下部分上的作用力。

首先，在剖面上每一点都作用着应力： σ_1 ——正应力、 σ_{12} ——与中面平行的切应力。

在中面的平行圆上取一小段弧元 ds_2 ，对应的等距表面上的弧元为 $\left(1 + \frac{\zeta}{r} \sin \varphi\right) ds_2$ 。在弧元 ds_2 与法线所形成的截面积上的合力和合力矩应当是

$$T_1 ds_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 \left(1 + \frac{\zeta}{r} \sin \varphi\right) ds_2 d\zeta$$

$$S_{12} ds_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} \left(1 + \frac{\zeta}{r} \sin \varphi\right) ds_2 d\zeta$$