

CAILIAO
LI XUE

周之桢 主编

材料力学

第二册 国防科技大学出版社

材 料 力 学

第 二 册

周之桢 主 编
责任编辑 老 亮
装帧设计 侯 云

*

国防科技大学出版社 出版

湖 南 省 新 华 书 店 发 行
国 防 科 技 大 学 印 刷 厂 印 装

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 12 字数: 270 千字
1988年1月第一版 1988年1月第一次印刷 印数: 1-3 000 册

统一书号: 15415·031

ISBN 7-81024-015-3

TB·2 定价 2.00 元

目 录

第七章 组合变形

§ 7.1 斜弯曲	2
§ 7.2 拉伸(压缩)与弯曲的组合 偏心拉伸(压缩)	7
§ 7.3 扭转与弯曲的组合	12
思考题	24
习 题	25

第八章 变形能法

§ 8.1 变形能的计算	33
§ 8.2 卡氏定理	39
§ 8.3 单位载荷法	43
§ 8.4 图形互乘法	46
§ 8.5 功互等定理 位移互等定理	50
*§ 8.6 虚位移原理(虚功原理)	52
§ 8.7 能量法解冲击问题	57
思考题	62
习 题	63

第九章 超静定系统

§ 9.1 简单超静定梁	70
§ 9.2 简单超静定刚架及桁架	75
§ 9.3 力法及正则方程	81
§ 9.4 连续梁 三弯矩方程	89
思考题	93
习 题	94

第十章 压杆的稳定性和纵横弯曲

§10.1 压杆稳定性的概念	100
§10.2 细长压杆的临界载荷 欧拉公式	101
§10.3 应力超过比例极限时压杆的稳定性	107
§10.4 压杆的稳定性校核	112
§10.5 用能量法求压杆的临界力	117
*§10.6 直杆的纵横弯曲	122
思考题	128
习 题	129

第十一章 交变应力

§11.1 基本概念	133
§11.2 材料的疲劳限及其测定方法	135
§11.3 材料的疲劳限图	138
§11.4 影响构件疲劳限的主要因素	139
§11.5 对称循环下构件的疲劳强度计算	142
§11.6 非对称循环下构件的疲劳强度计算	144
§11.7 构件在扭转组合时的疲劳强度计算	150
§11.8 提高构件疲劳强度的措施	151
思考题	153
习 题	153

附录 计算机应用

第一部分 一般解法	156
§ I .1 梁的内力及变形	156
§ I .2 平面图形几何性质	162
§ I .3 应力应变分析	169
§ I .4 超静定结构	171
第二部分 矩阵传递法	178
§ I .5 梁的矩阵分析	178
§ I .6 压杆稳定	184

第七章 组 合 变 形

前几章我们讨论了杆件的几种基本变形的强度与刚度计算，即杆件在外力作用下只产生一种最简单的变形形式，如简单拉伸或压缩、剪切、扭转以及平面弯曲等。在工程实际中，外力引起杆件的变形，通常是两种或两种以上基本变形的组合，形成杆件的组合变形。本章着重讨论组合变形的强度计算，关于组合变形的刚度计算，将在下一章中讨论。

工程中常见的组合变形有以下几种：

- 1. 斜弯曲——两个平面弯曲的组合。如图7.1(a)，斜放在屋架上的顶板，受铅垂向下载荷，这时力线与横截面的任一形心主轴都不重合，所产生的变形不是平面弯曲，而是斜弯曲，它是两个平面弯曲的组合。
- 2. 拉伸（或压缩）与弯曲的组合，以及偏心拉、压。如图7.1(b)，钻床在零件上钻孔时，心柱A上的压力，在床架截面B内引起拉力与弯矩，使床架产生拉伸与弯曲的组合变形。
- 3. 扭转与弯曲或扭转与拉伸（压缩）的组合。如图7.1(c)的机件在操作时，转轴和曲柄等都产生弯、扭组合变形；又如图(d)传动轴上的锥齿轮所受的载荷，可分解

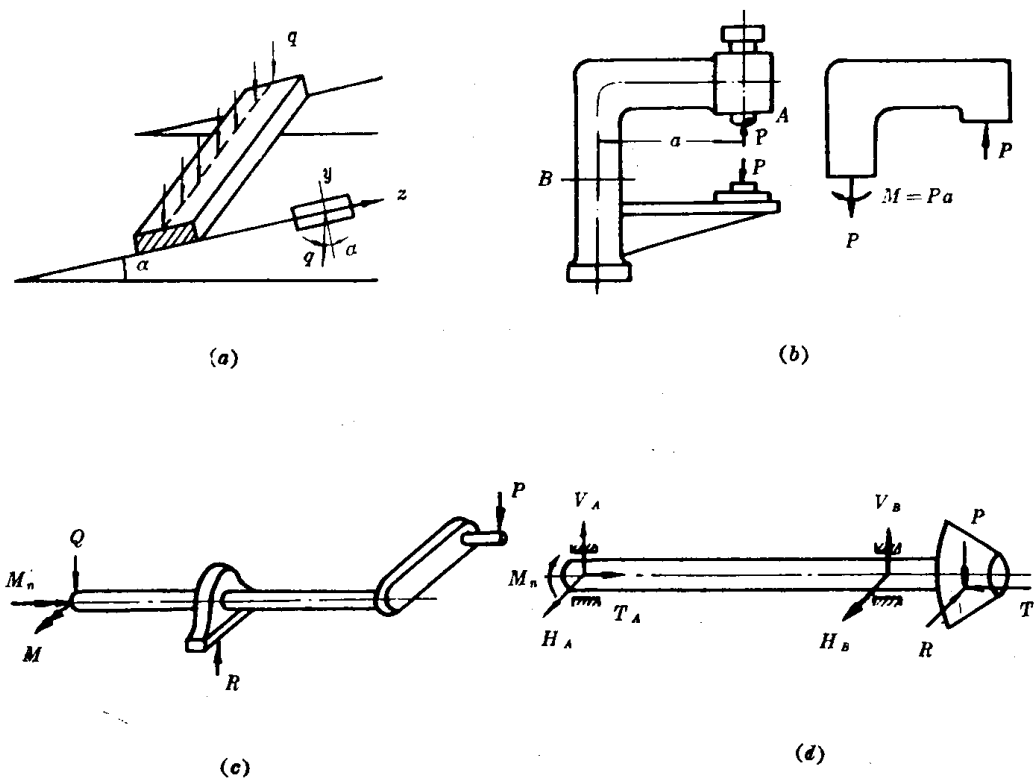


图 7.1

为三个分力；偏心纵向力 T 使轴受到压缩与弯曲；偏心横向力 P 使轴受到扭转与弯曲；通过轴心的横向力 R 使轴受到弯曲，所以它是压、弯、扭的组合变形。

组合变形的计算，通常以叠加原理为基础。运用截面法，把杆件横截面上的内力分解成几个内力图，每一个内力图与一种基本变形相应，于是按以前各章所讲公式，分别算出各个内力图所产生的应力或变形，然后适当叠加，求出总的应力或变形。这个计算方法的基础，是由于“力的作用的独立性”：即杆件在变形后，每一载荷引起的变形和内力不受其他载荷的影响。实验证明，只有应力不超过弹性范围并且变形很小时，这个方法才符合实际情况。*

§ 7.1 斜 弯 曲

第五章我们着重研究了杆件在平面弯曲的情况，限制条件是：外力的作用线必须平行于杆横截面的某一形心主轴，并通过所在横截面的弯心。如果外力作用线虽然通过横截面的弯心，但不与形心主轴平行或重合（例如图7.2a），杆件将要发生斜弯曲。这时不能直接用第五章推导出来的平面弯曲的应力和变形公式。我们可以根据叠加原理，把外力分解为平行于两个形心主轴的分力，认为杆件受到两个主轴平面内弯曲的复合作用；在分别算出这两个平面弯曲所引起的应力及变形以后，将结果叠加，即可求得总应力及变形。

为了说明斜弯曲时的应力及变形的计算方法，我们以矩形截面的悬臂梁为例，设在自由端受一集中载荷 P ，力平面与形心主轴平面 xoy 的夹角为 φ ，如图7.2(a)所示。下

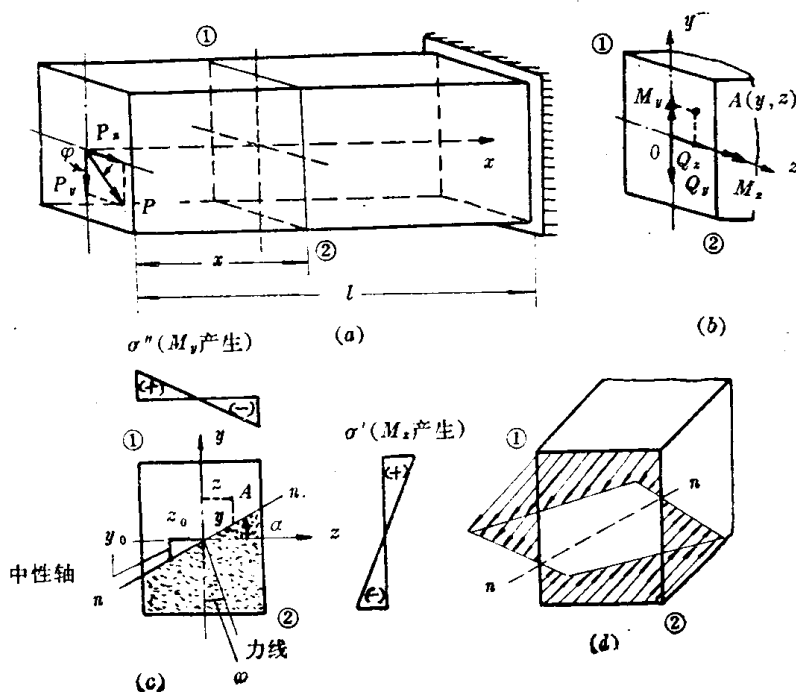


图 7.2

* 对于一般的开口薄壁截面来说，尚须考虑约束扭转产生的应力，可参看有关开口薄壁杆件弯曲与扭转的专著。

面依次对这个问题进行分析。

(一) 内力及应力的计算 把力 P 沿主轴 y, z 的方向分解, 得到分力 P_y 及 P_z , 于是:

$$P_y = P \cos \varphi, \quad P_z = P \sin \varphi;$$

它们在距自由端为 x 处的横截面上分别引起下列内力 (图7.2b):

$$Q_y = P \cos \varphi, \quad M_z = P_y x = P x \cos \varphi;$$

$$Q_z = P \sin \varphi, \quad M_y = P_z x = P x \sin \varphi.$$

横截面上任一点 $A(y, z)$ 处的正应力由两部分组成: 由于 xoy 平面内的弯曲, 即弯矩 M_z 所产生的正应力 σ' 为

$$\sigma' = \frac{M_z}{I_z} y,$$

判断 σ' 为拉为压时, 可根据 M_z 矢量的方向及点 A 所在位置由直接观察决定。在本例中, 第一、四象限中各点受拉, 第二、三象限中各点受压 (见图7.2c)。同理, 由于 xoz 平面内的弯曲, 即弯矩 M_y 产生的正应力 σ'' 为

$$\sigma'' = \frac{M_y}{I_y} z,$$

在第一、二象限中各点受压, 第三、四象限中各点受拉。若点 $A(y, z)$ 取在第一象限, 并以拉应力为正, 则 A 点的正应力为

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z, \quad (7.1)$$

上式表示横截面上任一点的正应力, 但必须用坐标的代数值代入公式中 (也可由 M_y, M_z 的方向来确定应力的符号)。从图7.2(c)上可以看出, 由于 M_z 和 M_y 的共同作用, 最大正应力的绝对值应当发生在点①或②的位置。

(二) 中性轴及截面上危险点的位置 从式 (7.1) 可以获得横截面上的应力分布规律。若在各点垂直于横截面引作纵坐标, 表示该点的 σ 值, 就可以得出一个表明应力分布情况的应力面。由于式 (7.1) 为一次方程, 可知应力面 $\sigma(y, z)$ 为一个平面 (图7.2d), 所以它和横截面相交为一直线。直线上各点处的 σ 值都等于零, 因而这一直线就是斜弯曲时的中性轴, 中性轴的方程可由该轴上任一点 (y_0, z_0) 处正应力为零的条件来求得, 即

$$-\frac{M_y}{I_y} z_0 + \frac{M_z}{I_z} y_0 = 0, \quad (7.2)$$

以 $M_z = P x \cos \varphi, M_y = P x \sin \varphi$ 代入, 得

$$-\frac{\sin \varphi}{I_y} z_0 + \frac{\cos \varphi}{I_z} y_0 = 0, \quad (7.2a)$$

这是 y_0, z_0 的一次方程式, 式中并无常数项, 表示中性轴是过截面形心的一条直线。对于本例题, 满足方程式的坐标 y_0, z_0 必须具有相同的符号, 因而中性轴通过第一、第三象限, 如图7.2(c)、(d)中的 $n-n$, 设中性轴与 z 轴所成的倾角为 α , 则

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0}{z_0} = \frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \varphi, \quad (7.3)$$

上式表示 α 角与 φ 角之间的关系。一般地讲, $I_z \neq I_y$, 所以两角 α , φ 并不相等, 表示中性轴与力平面不相垂直, 这是斜弯曲和平面弯曲显著不同的地方。只有在截面的两个主惯矩 I_y 及 I_z 相等 (例如圆形、正方形及所有正多边形) 的特殊情况, α 与 φ 两角恒等, 因而此时不论力平面如何倾斜, 中性轴始终与力平面垂直。中性轴 $n-n$ 将截面分为两部分 (图 7.2 c), 一部分受拉, 另一部分受压 (图中阴影部分), 并且 绝对值最大的应力发生于离中性轴最远的各点。在图中的点①处发生最大拉应力, 点②处发生最大压应力。根据这个性质可以决定截面上危险点的位置。

(三) 挠度的计算 受到斜弯曲的杆件在任一横截面 x 的挠度也可根据叠加原理来计算。对于上述例子, 先算出 $P_y = P \cos \varphi$ 所产生的 y 轴方向的挠度 v , 利用第五章的方法或查梁的挠度公式表得

$$v(x) = -\frac{P \cos \varphi \cdot l^3}{6EI_z} \left(2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3} \right),$$

挠度 v 在 y 轴的负方向。同理, 算出 $P_z = P \sin \varphi$ 所产生的 z 轴方向的挠度 w 为

$$w(x) = \frac{P \sin \varphi \cdot l^3}{6EI_y} \left(2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3} \right),$$

挠度 w 在 z 轴的正方向。由挠度矢量的几何相加, 可求得任一横截面上的总挠度 δ 的大小为

$$\delta = \sqrt{v^2 + w^2}, \quad (7.4)$$

如图 7.3(c), 设总挠度 δ 与 y 轴负向的夹角为 β , 则

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{w}{v} \right| = \frac{I_z}{I_y} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \varphi, \quad (7.5)$$

对比公式 (7.3) 及 (7.5), 可知

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta, \quad \therefore \alpha = \beta,$$

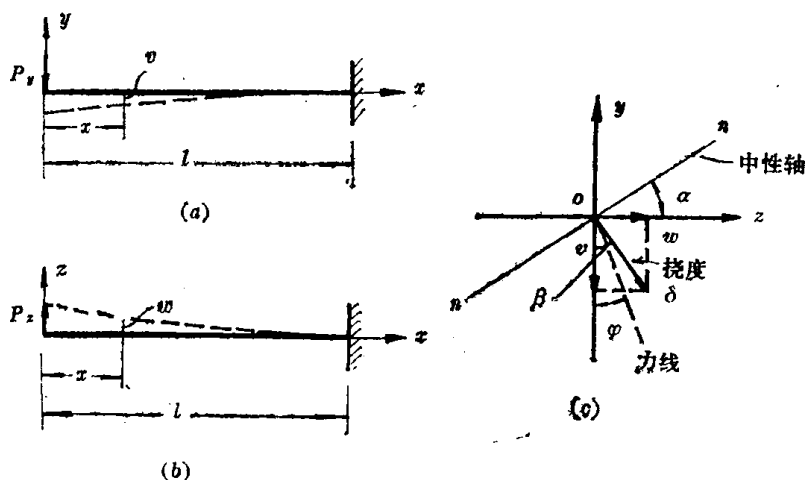


图 7.3

上式的 α 为中性轴与 z 轴的夹角, β 为挠度与 y 轴负向的夹角,因而斜弯曲时,挠度与中性轴互相垂直,这和平面弯曲时一样。

由于 $\alpha \neq \varphi$,亦即 $\beta \neq \varphi$,表明任一截面处的挠度与作用力不在同一方向,因而挠曲轴线并不保留在力平面内。这一点和平面弯曲时不同,也就是“斜弯曲”命名的来由。

(四) 斜弯曲时的强度核算 计算危险应力,最主要的是确定危险截面和危险点。当所有载荷作用在同一平面内时,危险截面的位置,与平面弯曲时毫无区别,因而对于等截面杆可直接从 M 图上看出来。至于危险点的位置,对于轮廓为多角形的各种截面(如矩形、三角形、工形、槽形等),通常不外乎在角顶上。而其他形状截面,要先定出中性轴的位置,然后平行中性轴绘制截面轮廓的切线,所得切点就是危险点,因为它离开中性轴最远(如图7.4所示)。

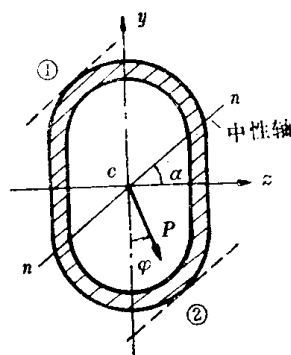


图 7.4

倘若引起弯矩的几个外力并不在同一平面内,那么确定危险截面时应先把载荷分解成两个主轴平面内的分力,分别作出弯矩图 M_y 和 M_z ,再根据它们来加以判断。由于 $\frac{M_y}{M_z} =$

$\tan \varphi$ 不是常量,因而 $\tan \beta$ (表示挠度的方向)也不是一个常

量,挠曲轴线将是一根空间曲线,而复合弯矩($M_w = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$)最大的截面不一定是危险截面,往往必须算几个截面(通常在集中力加力点处)内的最大正应力,才能确定危险截面和危险点。

确定了危险截面上危险点的位置(设在坐标 y_1, z_1 点处),即可利用公式(7.1)算出最大应力

$$\sigma_{\max} = \left[\frac{M_z}{I_z} y_1 - \frac{M_y}{I_y} z_1 \right]_{\max}.$$

截面上除了正应力之外,还作用有剪应力。计算剪应力分量 τ_{xy} 及 τ_{xz} 时,可应用第五章中的剪应力公式,即

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z}{I_z b_z}, \quad \tau_{xz} = \frac{Q_z S_y}{I_y b_y}.$$

对于实心截面,剪应力一般可不考虑。相应的强度条件是

$$\sigma_{\max} = \left[\frac{M_z}{I_z} y_1 - \frac{M_y}{I_y} z_1 \right]_{\max} \leq [\sigma]. \quad (7.6)$$

对于具有凸角的各种常用的对称截面,如矩形、工字形、口字形、T字形、槽形等,危险点不外乎在某一凸角点处。对于有双对称轴的截面,由于

$$|y_1| = |y_2| = y_{\max} \text{ 及 } |z_1| = |z_2| = z_{\max},$$

所以危险点更是在对称轴任一边的某一凸角处,令

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}},$$

可得到下式

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (7.7)$$

例题 7.1 设悬臂梁长 $l = 1\text{m}$, 截面为28a工字钢, 在自由端受到载荷 $P = 20\text{kN}$ 的作用, 试计算 $\varphi = 0^\circ$ 及 $\varphi = 5^\circ$ 时 (图7.5) 梁内产生的最大正应力及挠度对铅直轴的倾角 β .

[解] 从附表得截面的几何性质为:

$$I_z = 7114\text{cm}^4, \quad I_y = 345\text{cm}^4,$$

$$W_z = 508\text{cm}^3, \quad W_y = 56.6\text{cm}^3.$$

若 $\varphi = 0^\circ$, 即力 P 沿 y 轴作用, 梁内的最大正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{20 \times 1000 \times 1}{508} = 39.4\text{MPa}.$$

若 $\varphi = 5^\circ$, 则在梁的固定端截面内产生:

$$M_z = P_y l = 20 \times 1000 \times 0.9962 \times 1 = 19920\text{N}\cdot\text{m},$$

$$M_y = P_z l = 20 \times 1000 \times 0.0872 \times 1 = 1744\text{N}\cdot\text{m},$$

最大正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{19920}{508} + \frac{1744}{56.6} = 39.2 + 30.8 = 70\text{MPa},$$

即 $\varphi = 5^\circ$ 时比 $\varphi = 0^\circ$ 时, 最大应力几乎增加一倍。挠度对 y 轴的倾角 β 为

$$\tan \beta = \frac{I_z}{I_y} \tan \varphi = \frac{7114}{345} \times 0.0875 = 1.80, \quad \beta = 61^\circ.$$

中性轴与 z 轴的夹角 α 也是 61° 。

由此可见, 用这一类梁 (I_z/I_y 值很大的截面) 来抵抗斜弯曲或抵抗方向不太固定的外力, 是很不相宜的。

例题 7.2 Z形截面的悬臂梁, 受竖直力 P , 如图7.6 所示。截面图中尺寸单位为

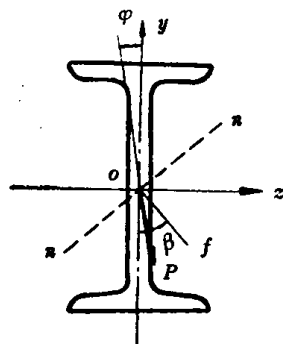


图 7.5

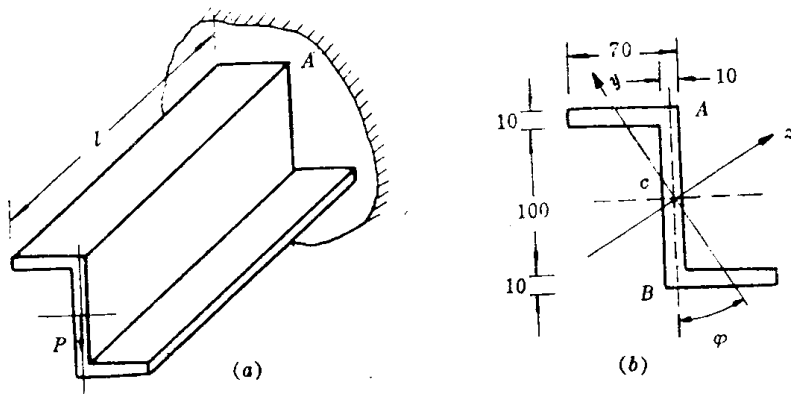


图 7.6

mm, 已知两形心主轴的惯矩 $I_z=628\text{cm}^4$, $I_y=64\text{cm}^4$, $\varphi=27^\circ 29'$, 载荷 $P=2\text{kN}$, $l=1\text{m}$, 试求此梁的最大正应力。

[解] 由于分力 $P\cos\varphi$ 在截面上 z 轴上部引起拉应力, 分力 $P\sin\varphi$ 在 y 轴右侧引起拉应力, 所以固定端截面的 A 点作用着最大拉应力, B 点作用着同数值的最大压应力。我们计算 A 点的正应力

$$\sigma_A = \frac{P\cos\varphi \cdot l}{I_z} y_A + \frac{P\sin\varphi \cdot l}{I_y} z_A,$$

式中 y_A , z_A 是 A 点坐标的绝对值, 即

$$y_A = 6\cos 27^\circ 29' - 0.5\sin 27^\circ 29' = 5.32 - 0.23 = 5.09\text{cm},$$

$$z_A = 6\sin 27^\circ 29' + 0.5\cos 27^\circ 29' = 2.77 + 0.44 = 3.21\text{cm},$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_A &= \frac{2000 \times 0.887 \times 1 \times 5.09 \times 10^{-2}}{628 \times 10^{-8}} + \frac{2000 \times 0.462 \times 1 \times 3.21 \times 10^{-2}}{64 \times 10^{-8}} \\ &= 14.4 \times 10^6 + 46.3 \times 10^6 = 60.7\text{MPa}. \end{aligned}$$

§ 7.2 拉伸(压缩)与弯曲的组合 偏心拉伸(压缩)

(一) 拉伸(压缩)与弯曲的组合 当杆件上的外力通过横截面的弯心但对杆轴倾斜某一角度时, 杆将受到弯曲与拉(压)的联合作用。例如图7.7所示斜置的梁, 在 AC 段受轴向力 $P_x = P\sin\alpha$ 的压缩与横向力 $P_y = P\cos\alpha$ 的弯曲联合作用。图7.8所示托架中的 AB 杆, 要受拉伸与弯曲的联合作用。

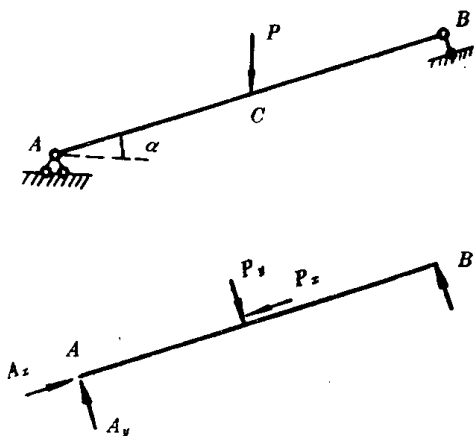


图 7.7

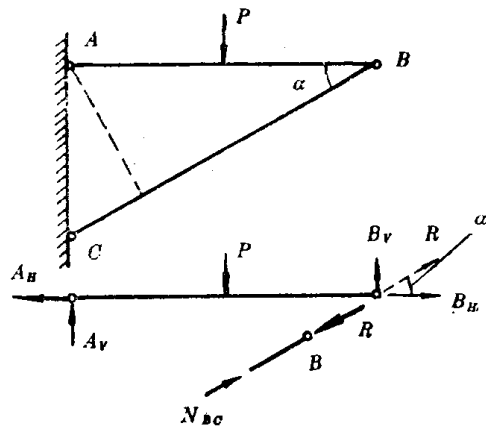


图 7.8

对于大刚度杆件, 外力所引起的弯曲变形非常微小, 轴向力对于这种微弯的轴线所引起的附加弯矩及附加挠度可以忽略不计*, 因而横截面上的正应力可以利用叠加原理来计算。

设图7.9(a)所示杆的横截面的形心主轴为 y, z 轴, 其上三种内力素 N, M_y, M_z 已经

* 对于小刚度杆件必须考虑拉(压)力所引起的附加弯矩及挠度, 叠加原理不再适用。详见第十章中的“梁柱”问题。

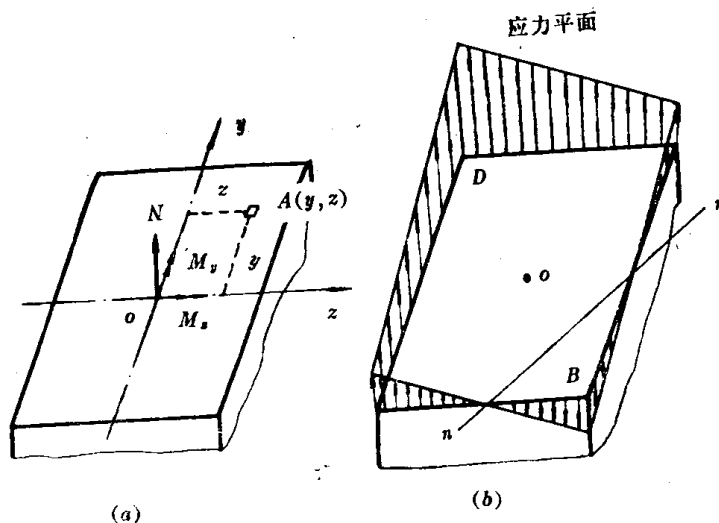


图 7.9

求得，它们分别作用时，在任意点 $A(y, z)$ 所引起的正应力为：

$$\frac{N}{A}, \quad -\frac{M_y z}{I_y}, \quad \frac{M_z y}{I_z},$$

应力符号可以从示力图上直观地加以判断，以拉应力为正值。由于三种内力素同时作用， A 点的正应力等于上列三值叠加：

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z}, \quad (7.8)$$

由上式所表示的应力面 $\sigma(y, z)$ 也是一个平面，它和横截面的交线（正应力值为零）就是中性轴，如图7.9(b)中的 $n-n$ ，中性轴的方程式是

$$\frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} z_0 + \frac{M_z}{I_z} y_0 = 0,$$

式中 y_0 及 z_0 是中性轴上的坐标值，它是一根不通过形心的直线。距离中性轴最远的点，如图中的 D 点，正应力最大，即为危险点。如果图7.9(a)所示的截面是危险截面，则其强度条件为

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_D + \frac{M_z}{I_z} y_D \leq [\sigma], \quad (7.9)$$

对于有凸角并有两个对称轴的截面来说，强度条件可简化为

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (7.10)$$

(二) 偏心压缩(或拉伸)的计算 当轴向外力不通过截面形心而是“偏心”地加在直杆上时，就形成杆件的偏心压缩(或拉伸)的受力情况。这时杆将产生弯曲与压缩(或拉伸)变形的联合作用。对于大刚度杆，在计算时同样认为轴向力对弯曲变形的附加影响可以略去不计。

图7.10(a)表示顶端受到偏心力作用的大刚度杆。设 y, z 为截面的形心主轴，力 P

的偏心距（即着力点 A 的坐标）为 (e_y, e_z) 。在任一横截面上的内力素（图7.10b）为：

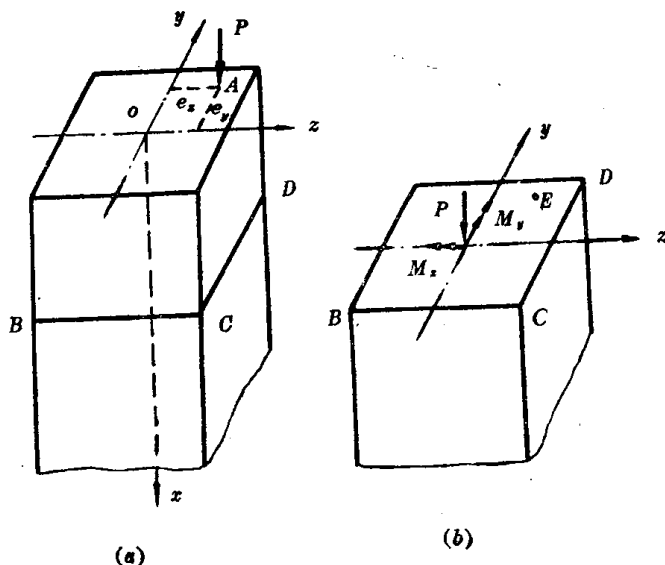


图 7.10

轴力 $N = P$ ；弯矩 $M_y = Pe_z$ ， $M_z = Pe_y$ 。它们和所取截面位置 x 无关。杆件除加力点附近外，受力情况与上节讨论的没有差别。截面上任一点 $E(y, z)$ 处的正应力的算式是

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{Pe_y}{I_z}y - \frac{Pe_z}{I_y}z, \quad (7.11)$$

可见在各截面上的应力分布是基本相同的。利用惯矩 I_y, I_z 与惯性半径 i_y, i_z 的关系式：

$$I_y = Ai_y^2, \quad I_z = Ai_z^2,$$

代入式 (7.11) 得

$$\sigma = -\frac{P}{A}\left(1 + \frac{e_y}{i_z^2}y + \frac{e_z}{i_y^2}z\right). \quad (7.12)$$

在横截面的中性轴上，正应力等于零，用 (y_0, z_0) 表示中性轴上任一点的坐标，则中性轴方程式为

$$1 + \frac{e_y}{i_z^2}y_0 + \frac{e_z}{i_y^2}z_0 = 0. \quad (7.13)$$

可见，中性轴是一条不通过形心的直线，如图7.11所示。中性轴把截面分为受压与受拉两部分，受压区与受拉区内离中性轴最远的点，就是压应力与拉应力达最大值的危险点（如图7.11中的 b 及 c 点），用式 (7.11) 求出该点的应力，即可进行杆件的强度计算，与上节的公式完全相似。

必须指出，某些工程材料，如砖、石、混凝土等做的立柱、堤坝，只宜抗压不宜抗拉，这就必须使外力与构件自重等的合力作用在截面上某个适当范围，使得杆件整个截面上只受压力不受拉力。从图7.11可以看出，只要力 P 作用点 A 靠近形心 O 的适当范围，中性轴就将移到截面周边（如 c 点等）以外。这样使整个截面只受压应力不受拉应力的作

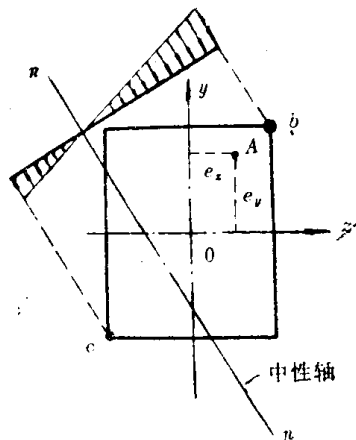


图 7.11

用力的范围，工程上就称为截面核心。

例题7.3 悬臂式起重机的水平钢杆AB，长 $l = 4\text{m}$ ，A端用销钉固定，B端用倾斜 $\alpha = 20^\circ$ 的钢索CB拉住（图7.12）。AB杆截面由两个18a号槽钢组成（槽钢由缀条焊接在一起），在其下翼缘上有移动的挂重载荷 P ，最大值为 30kN ，材料的 $[\sigma] = 140\text{MPa}$ ， $E = 200\text{GPa}$ ，求AB杆内的最大应力。

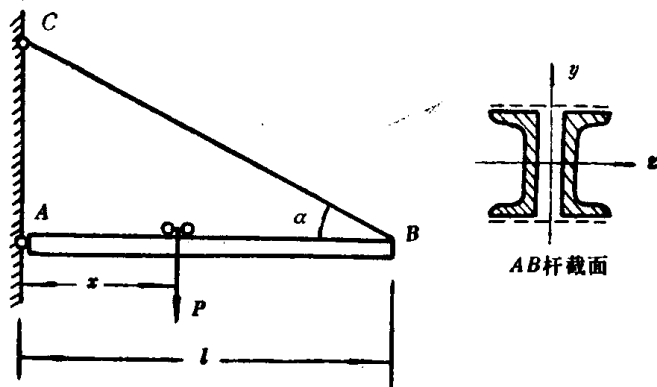


图 7.12

[解] 重物在结点B时，杆AB内产生最大轴向压力，即

$$N_{\max} = P \cot \alpha = 30 \times 2.747 = 82.4\text{kN},$$

但此时杆AB不受弯曲，因此对这个情形的强度校核不起决定性作用（读者可自行核算）。

重物在跨度中央时，杆AB内弯矩最大为

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} = 30\text{kN}\cdot\text{m},$$

此时杆内受到压力

$$N = \frac{1}{2} P \cot \alpha = 41.2\text{kN}.$$

采用叠加原理，可以算出AB杆内最大压应力。由型钢表查得两个槽钢的

$$A = 2 \times 25.7 = 51.4\text{cm}^2, W = 2 \times 141.4 = 282.8\text{cm}^3,$$

$$\therefore \sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{41.2 \times 10^3}{51.4 \times 10^{-4}} + \frac{30 \times 10^3}{282.8 \times 10^{-6}} = (8 + 106) \times 10^6 = 114\text{MPa},$$

此应力值比许用应力 $[\sigma] = 140\text{MPa}$ 小，故安全。

因为水平杆AB是较为细长的，最好近似地估算一下因杆的挠度引起的轴向力 N 的附加弯矩。单独由横向载荷 P 引起的跨度中点的挠度为

$$f = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{30 \times 10^3 \times (4)^3}{48 \times 200 \times 10^9 \times 1273 \times 10^{-8} \times 2} = 0.00786\text{m},$$

轴向力的附加弯矩近似地（因未考虑轴向力对挠度的影响）等于

$$\Delta M = Nf = 41.2 \times 0.00786 = 0.324\text{kN}\cdot\text{m},$$

约为横向载荷产生弯矩的1.1%，因此 ΔM 只对上面算得的横向载荷引起的挠度产生极

小的变化, 所以这个情形可采用叠加原理进行计算。

例题 7.4 设支柱下面的地基受有沿柱轴的载荷 $P_1 = 300\text{kN}$ (包括柱及基础的重量), 以及作用于支柱刚性突出部分上的压力 $P_2 = 100\text{kN}$, P_2 的作用线离开支柱轴线为 $c = 0.5\text{m}$ (图7.13)。设地基受压许用应力 $[\sigma] = 0.25\text{MPa}$, 拉应力是不容许的, 试确定正方形基础的边长 a 。

[解] 地基上所受的力计有:

$$N = P_1 + P_2 = 400\text{kN},$$

$$M = P_2 c = 100 \times 0.5 = 50\text{kN}\cdot\text{m},$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_{\max} &= \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{400}{a^2} + \frac{6 \times 50}{a^3} \leq [\sigma] \\ &= 0.25\text{MPa} = 250 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}. \end{aligned}$$

$$\therefore a^3 - 1.6a \geq 1.2,$$

用试算法解三次方程式, 即

$$a \geq \sqrt[3]{1.2 + 1.6a}, \quad (a)$$

取 $a_1 = 1.5$, 代入式(a), 得

$$a'_1 \geq \sqrt[3]{1.2 + 1.6 \times 1.5} = 1.53;$$

取 $a_2 = 1.54$, 代入式(a), 得

$$a'_2 \geq 1.542,$$

此解合适。

选用边长 $a = 1.6\text{m}$ 。

本例受载情况, 相当于一个偏心载荷 400kN , 具有偏心距

$$e = \frac{M}{P} = \frac{50}{400} = 0.125\text{m}$$

的情况, 由于偏心距 $e < \frac{a}{6} = 0.267\text{m}$ (参阅习题7.13的证明), 所以基础上不存在拉应力。

例题 7.5 截面 $40 \times 5\text{mm}$ 的杆, 承受轴向拉力 $P = 12\text{kN}$, 试求此杆的容许切口深度 d (图7.14)。对于未考虑应力集中的偏心拉伸情况, 正应力不得超过 $[\sigma] = 100\text{MPa}$ 。在求得 d 后, 画出被削弱截面内的正应力分布图。

[解] 对于切口处的横截面来说, P 是偏心拉力, 其偏心距为 $\frac{d}{2}$, 故切口横截面内存在:

$$\text{轴力} \quad N = P = 12\text{kN},$$

$$\text{弯矩} \quad M = P \cdot \frac{d}{2} = 6d \text{ kN}\cdot\text{cm} = 0.06d \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

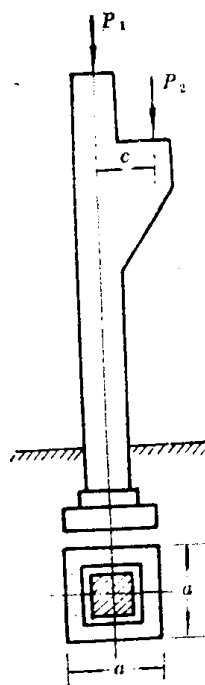


图 7.13

在截面边缘点 A, B 的正应力为

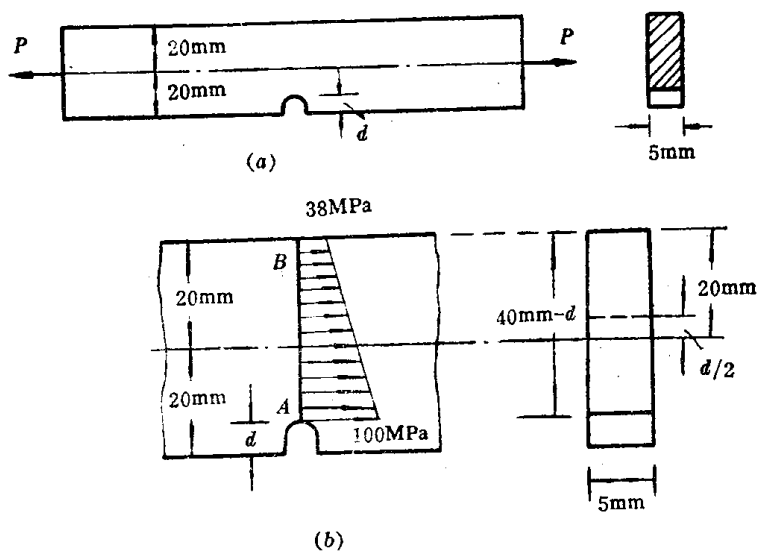


图 7.14

$$\sigma_{A,B} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} = \frac{12000}{0.5(4-d) \times 10^{-4}} \pm \frac{6 \times 0.06d \times 1000}{0.5(4-d)^2 \times 10^{-6}}, \quad (a)$$

使切口底点 A 的最大正应力等于容许值，得

$$\sigma_A = \frac{12000 \times 10^4}{0.5(4-d)} + \frac{360d \times 10^6}{0.5(4-d)^2} = 100 \times 10^6,$$

$$\therefore d = 0.52 \text{ cm}.$$

以 d 值代入式(a)，可求得横截面边缘点的应力值：

$$\sigma_A = 100 \text{ MPa}, \quad \sigma_B = 38 \text{ MPa}.$$

在截面上的正应力是按直线分布的，如图7.14 (b)。

§ 7.3 扭转与弯曲的组合

(一) 圆截面杆的扭弯组合 现以图7.15(a)所示圆轴为例，轴的左端有一重 Q 的皮带轮，皮带在水平方向的拉力为 T 及 t (设 $T > t$)；右端曲柄上作用着水平力 P 。讨论圆杆受扭弯组合时的强度计算。

(1) 外力向截面形心简化 将各外力移至杆件截面的形心，可以简化成图7.15(b)所表示的形式。把一个轴承当做铰座，另一个当做滚座；轴的左端受有铅垂力 Q 、水平力 $(T + t)$ 及扭转力偶 $(T - t)R$ ，在右端受有水平力 P 及扭转力偶 Pc 。可以看出，铅垂力 Q 及水平力 $(T + t)$ 与 P 都要使轴弯曲，而力偶 $(T - t)R$ 及 Pc 则使轴扭转，因而轴受到扭转与弯曲的组合变形。

(2) 画内力图确定危险截面 根据受力简图，分别按扭转力偶 $(T - t)R$ 及 Pc ，铅垂力 Q 及水平力 $(T + t)$ 与 P 作出扭矩图 M_n 及弯矩图 M_x 和 M_y ，如图7.16所示。

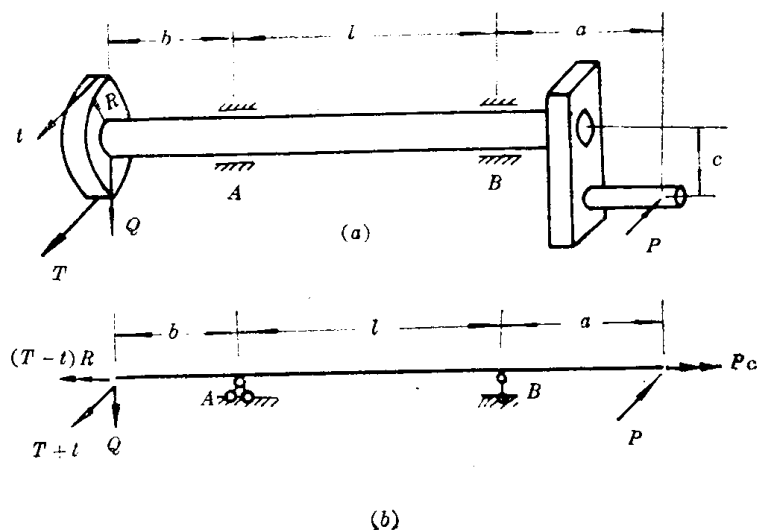


图 7.15

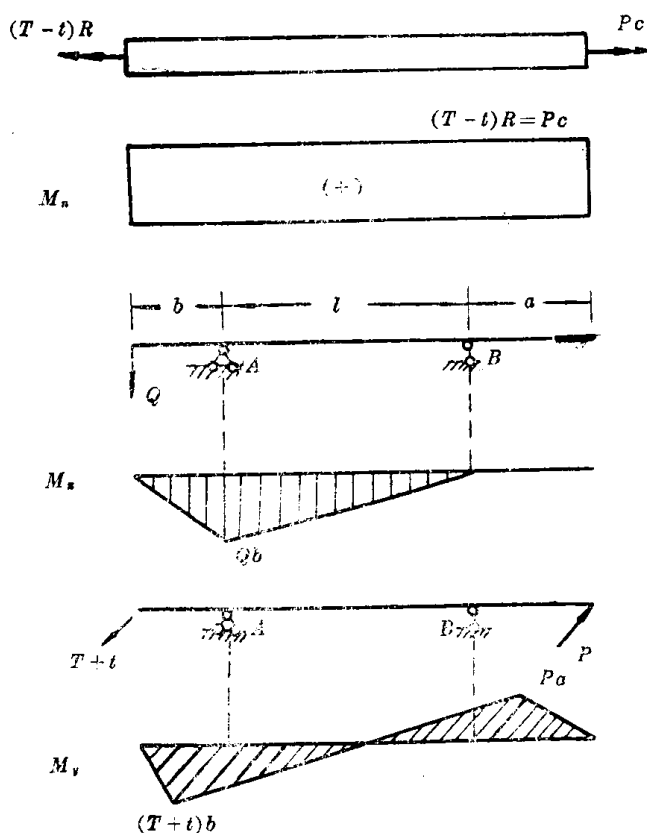


图 7.16

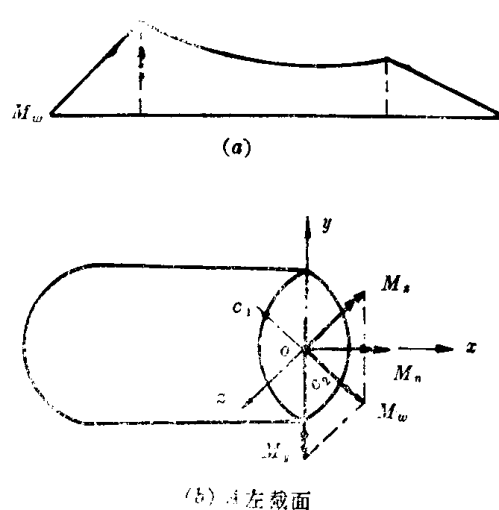


图 7.17

设轴以等角速转动，则 $\Sigma M_x = (T-t)R - Pc = 0$ ，所以轴内任一横截面上的扭矩 $M_x = (T-t)R = Pc$ 为一常量，危险截面由弯矩图 M_z 及 M_y 所决定（剪力的影响，一般可忽略不计）。由于截面为圆形，通过圆心的任何直径都是主轴，所以圆轴在两向弯曲时可以先直接求出合成弯矩，然后按平面弯曲计算其应力。因此为了确定危险截面，我们可以求出截面上的合弯矩 M_w 为

$$M_w = \sqrt{M_z^2 + M_y^2},$$