

# 数字网络与噪声网络

成都电讯工程学院

陈尚勤 魏鸿骏 编著



国防工业出版社

### 内 容 简 介

本书分为两篇，第一篇讨论数字网络，包括离散信号系统理论与正交变换理论等基础知识、数字滤波网络及正交变换网络的分析、设计；第二篇讨论噪声网络，包括随机过程理论的基础知识、随机信号通过线性、非线性网络的分析及最佳检测和估值网络的设计。书末附有十一个附录，其中包括阅读本书有关的补充基础知识。

本书由浅入深、推导过程一般均较仔细，便于自学，除作为“通信及无线电技术”等同类专业高年级学生教材外，也可作为研究生教材，并可供有关工程技术人员或科研人员参考。

### 数字网络与噪声网络

成都电讯工程学院  
陈尚勋 魏鸿毅 编著

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售  
国防工业出版社印刷厂印装

787×1092<sup>1</sup>/<sub>16</sub> 印张 32<sup>1</sup>/<sub>2</sub> 759千字

1981年2月第一版 1981年2月第一次印刷 印数：0,091—6,900册

统一书号：15034·2148 定价：3.30元

# 前 言

本书系高等学校工科电子类“通信与无线电技术”专业统编教材之一。

数字网络（或称离散信号网络、离散信号系统）及噪声网络（或称随机信号网络）是近代网络学发展的两大分支。它们在通信、雷达及各类信号的处理方面有着广泛的应用。本书着重于论述这两类网络的物理概念、分析和设计方法，以及有关的数学工具，并举有一些应用例子，以期达到上述目的。

数字网络与噪声网络这两部分内容有一定的交叉和衔接。在一些具体问题中，往往需要同时用到这两方面的概念和方法，它们都是十分重要的，是互相紧密联系着的两个分支。为了论述方便，本书分为两篇。

第一篇是数字网络，它分为三个部分，即：

（1）有关基础理论部分，包括第一、二、三及九章；

（2）数字滤波网络部分，包括第四到第八章。第四章讨论滤波网络的分析方法，后面四章讨论各型数字网络的设计理论和方法；

（3）正交变换网络部分，包括第十到十三章。

第二篇是噪声网络，主要研究在存在噪声且信号为随机信号的情况下，网络（电路或系统）的分析、设计方法。本篇分为四个部分：

（1）随机过程理论基础，包括第十四章；

（2）随机信号通过线性网络的分析，包括第十五章；

（3）在信号随机或存在噪声情况下，非线性网络的分析，包括第十六到十八章；

（4）在存在噪声的情况下，能实现最佳检测和估值的网络的设计。第十九章讨论假设和检测的判决准则，第二十、二十一、二十二章讨论检测设计问题，第二十三到二十五章讨论估值设计问题（包括参量估值与波形估值）。

为了与前继课程紧密衔接，并对某些内容有所补充，书末还设有附录 I~M。

讲授全书约需90学时，如因学时数限制也可根据需要予以取舍。本书在安排上提供了一定的灵活性，也可以单独使用其中一部分。

本书除作为“通信及无线电技术”专业或其它同类型专业高年级学生的教材外，也可作为研究生的教材，并可作为有关科研人员或工程技术人员的参考书籍。为了便于自学和容易阅读，一般推导过程比较详细。

我们期望通过本书的阅读，对掌握近代网络学两大分支的基本概念、基本理论、基本分析和设计方法以及相互的初步联系有所助益，以适应电子技术的迅速发展。

本书由华中工学院刘华志、卢延寿同志主审，华南工学院、哈尔滨工业大学、西北电讯工程学院、上海交通大学参加了审稿工作。在此，我们对上述单位和个人表示衷心感谢。

我们恳请读者惠予批评指正。

编 著 者

# 目 录

## 第一篇 数字网络

第一章 离散信号、差分方程和数字滤波器	1
§ 1-1 离散信号和序列	1
§ 1-2 差分 and 差分方程	2
§ 1-3 数字滤波器滤波作用的物理解释	4
第二章 差分方程的经典解法、矩阵解法和递归解法	5
§ 2-1 经典解法	5
§ 2-2 矩阵解法	8
§ 2-3 递归解法	11
第三章 差分方程的 $z$ 变换解法	13
§ 3-1 $z$ 变换的引出	13
§ 3-2 $z$ 变换的定义及其绝对收敛区	14
§ 3-3 $z$ 反变换	23
§ 3-4 $z$ 变换的一些基本性质	28
§ 3-5 单边 $z$ 变换的定义及其性质	31
§ 3-6 差分方程的 $z$ 变换解法	37
第四章 数字滤波网络的分析方法	40
§ 4-1 数字滤波网络的时域分析方法	40
§ 4-2 序列卷和的 $z$ 变换	42
§ 4-3 用 $z$ 传输函数分析网络的步骤	43
§ 4-4 正弦抽样信号通过数字滤波器的分析	46
第五章 无限冲激响应型数字滤波器的设计	62
§ 5-1 概述	62
§ 5-2 双线性变换法	64
§ 5-3 冲激响应不变法	72
§ 5-4 阶跃响应不变法	74
§ 5-5 冲激响应不变法、阶跃响应不变法的物理意义及与双线性变换法的比较	76
§ 5-6 带通数字滤波器的设计	77
第六章 有限冲激响应型数字滤波器的设计	84
§ 6-1 FIR型滤波器的基本特性	84
§ 6-2 FIR型滤波器的设计思路	85
§ 6-3 设计步骤和设计例题	87
§ 6-4 $A_e(f)$ 展开式只含正弦项时的设计	88
§ 6-5 傅氏级数取有限项数引起的频率特性失真及其改进方法——窗函数技术	91
第七章 有限字长对数字滤波器的影响	98

§ 7-1	概述	98
§ 7-2	输入量化噪声	98
§ 7-3	运算量化噪声	100
<b>第八章</b>	<b>二维滤波网络</b>	<b>105</b>
§ 8-1	二维序列与二维网络	105
§ 8-2	二维 $z$ 变换及二维网络的 $z$ 域描述	109
§ 8-3	二维数字滤波网络设计概述	115
§ 8-4	二维 FIR 网络窗函数设计技术	118
§ 8-5	二维 FIR 网络变化法设计技术	123
<b>第九章</b>	<b>正交函数系与离散傅氏变换</b>	<b>129</b>
§ 9-1	正交函数系	129
§ 9-2	一维离散傅氏变换	137
§ 9-3	二维离散傅氏变换	153
§ 9-4	离散傅氏变换与连续傅氏变换的关系	157
<b>第十章</b>	<b>快速傅氏变换</b>	<b>164</b>
§ 10-1	DFT 快速算法的必要性与可能性	164
§ 10-2	以 2 为基的算法的推导	166
§ 10-3	任意基算法的推导	179
§ 10-4	各种算法的比较	190
<b>第十一章</b>	<b>沃尔什函数及其特性</b>	<b>192</b>
§ 11-1	雷德马赫正交函数系	192
§ 11-2	沃尔什函数的定义	196
§ 11-3	沃尔什函数的基本特性	206
<b>第十二章</b>	<b>离散沃尔什变换和其它正交变换</b>	<b>212</b>
§ 12-1	沃尔什级数展开与沃尔什变换	212
§ 12-2	快速沃尔什变换	216
§ 12-3	沃尔什谱的物理概念	228
§ 12-4	其它正交变换	239
§ 12-5	二维正交变换	250
<b>第十三章</b>	<b>正交变换网络</b>	<b>251</b>
§ 13-1	变换网络的基本概念	251
§ 13-2	一维变换网络在数据压缩中的应用	253
§ 13-3	二维变换网络在数据压缩中的应用	259

## 第二篇 噪声网络

<b>第十四章</b>	<b>有关概率和随机过程的知识</b>	<b>261</b>
§ 14-1	概率、随机变量、特征函数和平均	261
§ 14-2	随机过程	273
§ 14-3	窄带信号	284
§ 14-4	高斯随机变量及高斯随机过程	303
<b>第十五章</b>	<b>随机信号通过线性网络的分析方法</b>	<b>318</b>
§ 15-1	由 $S_x(\omega)$ [或 $R_x(\tau)$ ] 及 $H(j\omega)$ [或 $h(t)$ ] 求 $S_y(\omega)$ [或 $R_y(\tau)$ ]	318

§ 15-2	由 $S_n(\omega)$ 及出入端的时域关系式求 $S_y(\omega)$ .....	326
§ 15-3	由输入概密函数求输出概密函数 .....	327
第十六章	随机信号通过无惯性非线性网络处理方法之一——直接法 .....	329
§ 16-1	直接法的思路和数学工具 .....	329
§ 16-2	用直接法处理双边平方律检波器 .....	330
第十七章	随机信号通过无惯性非线性网络处理方法之二——变换法 .....	336
§ 17-1	变换法的思路和步骤 .....	336
§ 17-2	用变换法及矩母函数求输出波的自相关函数或谱密度 .....	343
第十八章	随机干扰下非线性网络的分析方法 .....	346
§ 18-1	概密函数解法 .....	346
§ 18-2	大范围线性化解法 .....	360
第十九章	假设和检测准则 .....	364
§ 19-1	假设和简单似然比检测准则 .....	364
§ 19-2	贝叶斯准则 .....	368
§ 19-3	多次测量情况下的检测 .....	369
§ 19-4	复合假设情况下的检测准则 .....	391
第二十章	确定信号的检测 .....	394
§ 20-1	噪声带宽有限情况下的最佳接收机 .....	395
§ 20-2	噪声带宽无限情况下的最佳接收机 .....	396
第二十一章	有色噪声下信号的检测 .....	404
§ 21-1	有色噪声下信号检测的思路和步骤 .....	404
§ 21-2	利用傅氏变换的积分方程近似解法 .....	408
§ 21-3	有理核情况下的解法 .....	409
§ 21-4	随机过程的分解 .....	415
§ 21-5	用频域抽样观点分析有色噪声下的相关接收机 .....	421
§ 21-6	积分方程的“广义傅氏级数”解法 .....	425
§ 21-7	有色噪声下最佳接收的抽样离散化解法 .....	426
第二十二章	随机参量信号的检测 .....	430
第二十三章	信号参量的估值 .....	435
§ 23-1	贝叶斯估依准则 .....	435
§ 23-2	最大后验估值 .....	437
§ 23-3	最大似然估值 .....	437
§ 23-4	估值有效程度的判别准则 .....	438
§ 23-5	在高斯噪声下最大似然估值的计算式 .....	441
§ 23-6	在高斯白噪声下的振幅估值 .....	441
§ 23-7	在高斯白噪声下的相位估值 .....	444
第二十四章	信号波形的估值 .....	446
§ 24-1	第二类贝叶斯波形估值 .....	446
§ 24-2	最大似然估值 .....	450
§ 24-3	最大后验估值 .....	455
第二十五章	卡尔曼估值问题——卡尔曼滤波器 .....	456
§ 25-1	离散卡尔曼滤波器 .....	456

§ 25-2 连续卡尔曼滤波器 .....	464
-----------------------	-----

## 附录

附录 I 复数级数及复数幂级数的一些基本概念 .....	472
附录 II 数字网络的符号因果性及稳定性 .....	473
附录 III 常用的拉氏变换关系表 .....	476
附录 IV 混合型网络的分析 .....	477
§ IV-1 分析时应用的规律 .....	477
§ IV-2 混合型网络的分析例子 .....	480
附录 V 模拟滤波器的有关特性及其设计 .....	483
§ V-1 模拟滤波器的设计步骤 .....	483
§ V-2 利用“低通-带通变换法”设计带通滤波器 .....	487
附录 VI 数的二进制表示及并元加运算 .....	490
附录 VII 速率失真函数的初步概念 .....	495
附录 VIII 线性代数补充知识 .....	499
§ VIII-1 有关定义式 .....	499
§ VIII-2 有关定理和关系式 .....	501
附录 IX 用变分法求极值的问题 .....	506
附录 X 广义维纳滤波网络 .....	509
附录 XI 第二十五章有关公式的证明 .....	510
参考资料 .....	511

# 第一篇 数字网络

## 第一章 离散信号、差分方程和 数字滤波器

### § 1-1 离散信号和序列

在工程系统中所要处理的信号可以分为连续信号和离散信号两大类。所谓时域的离散信号是指在离散时刻上才出现的信号，它的数学表示方式是“序列”。而所谓“序列”，是指自变量只能取离散值的函数。如下式就代表一个序列：

$$y_1(n) = \begin{cases} 2^n & \text{当 } n \geq 0 \\ 0 & \text{当 } n < 0 \end{cases}$$

它也可用图形表示出来（见图 1-1）。又如

$$y_2(n) = y_1(n+1) = \begin{cases} 2^{n+1} & \text{当 } n \geq -1 \\ 0 & \text{当 } n < -1 \end{cases}$$

$$y_3(n) = \sin \omega n = \sin 2\pi f n = \sin \frac{2\pi}{T} n$$

式中， $\omega$ 、 $f$ 、 $T$ 为常数，它们都代表序列，其图形分别如图 1-2 和图 1-3 所示。

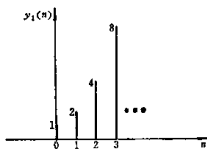


图1-1 函数  $y_1(n)$  的图形

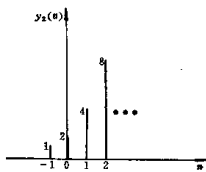


图1-2 函数  $y_2(n)$  的图形

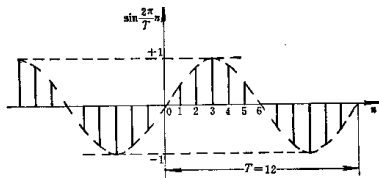


图1-3 函数  $\sin \frac{2\pi}{T} n$  的图形



## § 1-2 差分 and 差分方程

在含离散信号的工程系统中，主要处理的对象是“序列”。序列间的关系往往以“差分方程”这种数学模型出现（类似于连续系统中变量间的关系常以微分方程的形式出现）。因此对于差分方程的定义、分类、特性等必须弄清楚。

### 一、差分的定义

类似于连续函数定义

$$dy(t) \triangleq [y(t) - y(t - \Delta t)]_{\Delta t \rightarrow 0} \quad (1-1)$$

为  $y(t)$  在  $t$  处的“一阶微分”那样，我们定义

$$\Delta y(n) \triangleq y(n) - y(n-1) \quad (1-2)$$

为序列  $y(n)$  在  $n$  处的“一阶差分”。

同样，定义  $y(n)$  在  $n$  处的“二阶差分”[用  $\Delta^2 y(n)$  来表示]为

$$\begin{aligned} \Delta^2 y(n) &\triangleq \Delta [\Delta y(n)] \stackrel{(1-2)}{\Delta} [y(n) - y(n-1)] = \Delta y(n) - \Delta y(n-1) \\ &\stackrel{(1-2)}{\Delta} \underbrace{[y(n) - y(n-1)]}_{\Delta y(n)} - \underbrace{[y(n-1) - y(n-2)]}_{\Delta y(n-1)} \\ &= y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) \end{aligned} \quad (1-3)$$

$y(n)$  在  $n$  处的三阶差分  $[\Delta^3 y(n)]$  等的定义可仿此类推。

### 二、差分方程的定义

(1) 我们把

$$F[n, y(n), \Delta y(n), \Delta^2 y(n)] = 0 \quad (1-4)$$

这类形式的方程称为差分方程。如

$$\Delta y(n) + 3y(n) = 2n + 1 \quad (1-5)$$

即为差分方程之一例。

(2) 为了处理方便，将式 (1-2) 代入式 (1-5)，则得

$$4y(n) - y(n-1) = 2n + 1 \quad (1-6)$$

据此，我们可将差分方程的定义式改为与之等效的另一种形式，即

$$F_1[n, y(n), y(n-1), y(n-2), \dots] = 0 \quad (1-7)$$

(3) 若将方程中的变量  $n$  作数学上的变量替换，这并不改变所代表的物理现象的实质。如将式 (1-6) 中的  $n-1$  代以  $n'$ ，则有

$$4y(n'+1) - y(n') = 2n' + 3 \quad (1-8)$$

从中可看出，差分方程在形式上还可出现如  $[y(n+k)]_{k>0}$  的项(其中  $k$  可为任意整数)，故差分方程的定义式在形式上还可改变为

$$F_2[n, \dots, y(n-2), y(n-1), y(n), y(n+1), y(n+2), \dots] = 0 \quad (1-9)$$

本书所采用的定义式就是这种形式。当然，除去式 (1-9) 中  $[\ ]$  内的  $[y(n+k)]_{k>0}$  或  $[y(n+k)]_{k<0}$  型之一，在实质上都不失去通用性。

### 三、差分方程的阶

差分方程中存在着各个  $y(n+k)$  型项，方程内的  $y(n+k)$  型项中最大的  $k$  值与最小的  $k$  值之差，称为这差分方程的“阶”。如对于方程

$$y(n) - y(n-1) - y(n-2) = 0 \quad (1-10)$$

其阶为  $0 - (-2) = 2$ ；对于方程式 (1-6)，其阶为  $0 - (-1) = 1$ ；对于方程式 (1-8) 其阶为  $1 - 0 = 1$ 。

方程式 (1-6)、(1-8) 同阶是意料中的事，因为如前所述，它们所代表的物理现象实质上是相同的。

### 四、线性差分方程

在某差分方程中，若各个  $y(n+k)$  型项都只有一次幂，且不存在此类型彼此相乘的项，则称这类差分方程为“线性差分方程”。如

$$n^2 y(n+2) - (n+1)y(n+1) + y(n) = n^2 - 1 \quad (1-11)$$

式 (1-6)、(1-8)、(1-10) 等也属这类方程。若其中各  $y(n+k)$  型项的系数都是常数，则称之为“常系数线性差分方程”。如式 (1-6)、(1-8)、(1-10) 都属此类型。系数中若含有  $n$ ，则称为“变系数线性差分方程”。如式 (1-11) 即属此类型。

若将非  $y(n+k)$  型项都移到方程的右侧，则该侧等于零的一类方程，称为“齐次差分方程”，否则称为“非齐次差分方程”。如式 (1-10) 就是齐次差分方程，而式 (1-6)、(1-8) 等则为“非齐次差分方程”。

### 五、非线性差分方程

若差分方程中的  $y(n+k)$  型项中具有高于一次的幂或具有它们彼此相乘的项，则称此方程为“非线性差分方程”。如

$$8y(n+1) + 8y(n+1)y^2(n) - 8y^2(n) = 3 \quad (1-12)$$

就属于此类方程。

代表一个完整的物理现象的差分方程是附有“边界条件”的。如对于式 (1-8)，可设  $y(0) = 1$  或其它定值。但应注意，所给的边界条件数应该等于方程的阶数，才能得到唯一的解。

### 六、差分方程与其对应的数字滤波器间的关系

我们称输入、输出信号都是离散信号的网络为离散信号网络（或“离散网络”或“数字网络”），并将具有滤波（或均衡）性能的数字网络称为“数字滤波器”。给出数字滤波器结构，可以据之求出表征它的性能的差分方程。如有滤波器如图 1-4 所示的结构，则我们

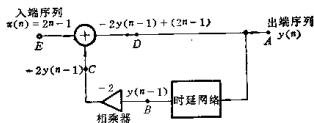


图 1-4 一种数字滤波器结构

时延网络——延迟一个序列间隔时间，现间隔时间为 1。

可以由信号为  $y(n)$  的  $A$  点出发, 按图推出  $B$ 、 $C$ 、 $D$  各点的数学表示量, 如图 1-4 中所注。又由于  $D$  点即是  $A$  点, 故有

$$y(n) = -2y(n-1) + (2n-1) \quad (1-13)$$

此式就是表征这一滤波器性能的差分方程。

反之, 若是给出了差分方程(例如式 (1-13)), 我们也不难根据所掌握的知识, 反过来推出它所表征的网络结构。为了使输入为序列时输出也是序列, 故所讨论的数字滤波器与模拟滤波器不同, 它只是由相加、相乘和时延器所组成(参见图1-4)。

### § 1-3 数字滤波器滤波作用的物理解释

数字滤波器可以完成模拟滤波器所完成的滤波(或均衡)任务。下面以  $RC$  模拟滤波器(见图 1-5(a))为例来说明数字与模拟滤波器间的对应关系。

图1-5(a)电路的输出、输入信号  $y(t)$ 、 $x(t)$  显然满足关系:

$$RC \frac{dy}{dt} = x(t) - y(t) \quad (1-14)$$

如将上式中的  $dt$  近似为抽样时间间隔  $T$ ,  $y(t)$ 、 $x(t)$  分别近似为  $y(n)$ 、 $x(n)$ ,  $dy$  近似为  $\Delta y(n)$ , 并将式 (1-2) 代入, 则式 (1-14) 成为

$$RC \left[ \frac{y(n) - y(n-1)}{T} \right] = x(n) - y(n)$$

或

$$y(n) = \frac{1}{1+(RC/T)} x(n) + \frac{1}{1+(T/RC)} y(n-1) \quad (1-15)$$

由上式可见, 该式相应的网络如图1-5(b)所示, 而此网络就是只由相加、相乘、时延器所构成的数字滤波器。也就是说, 这种数字滤波器是可以近似地完成图1-5(a)模拟滤波器的作用的。有关数字滤波器进一步的分析将在后面各章中进行。这里只是一个初步的解释。

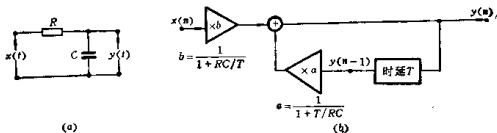


图1-5 模拟滤波器与数字滤波器的对应关系  
(a) 模拟  $RC$  滤波器; (b) 与图(a) 相应的数字滤波器。

## 第二章 差分方程的经典解法、矩阵解法和递归解法

### § 2-1 经典解法

常系数差分方程的经典解法，是矩阵解法和递归解法的基础。在解决某些类型的差分方程时，此种方法有着清晰简便的优点。下面介绍其思路及解题步骤。

#### 一、齐次差分方程的解法

齐次常系数线性差分方程的一般形式可写成

$$c_0 y(n) + c_1 y(n-1) + \cdots + c_r y(n-r) = 0 \quad (2-1)$$

式中  $c_0, c_1, \dots, c_r$  为常数，式子右侧为零。

解式 (2-1) 的思路与解齐次微分方程的思路类似，先假设一个有希望的形式解，即

$$y(n) = A\lambda^n \quad (2-2)$$

式中  $A, \lambda$  都是与  $n$  无关的参数。以此式代入式 (2-1)，则得到

$$c_0 A\lambda^n + c_1 A\lambda^{n-1} + \cdots + c_r A\lambda^{n-r} = 0$$

即

$$A\lambda^{n-r}(c_0\lambda^r + c_1\lambda^{r-1} + \cdots + c_r) = 0$$

或

$$c_0\lambda^r + c_1\lambda^{r-1} + \cdots + c_r = 0 \quad (2-3)$$

如将上式的根称为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  (假设各  $\lambda$  值是互异的)，则由式 (2-2) 可知  $y(n) = A_1\lambda_1^n, y(n) = A_2\lambda_2^n, \dots, y(n) = A_r\lambda_r^n$  都是式 (2-1) 的解 (式中  $A_1, A_2, \dots, A_r$  为任意常数)。所以  $y(n)$  的一般解为

$$y(n) = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n + \cdots + A_r\lambda_r^n \quad (2-4)$$

当给定边界条件后，上式中的  $A_1, \dots, A_r$  就可以被确定。因此式 (2-3) 被称为式 (2-1) 差分方程的“特征方程”，而  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  则称为它的“特征根”。

通过上述分析，我们归纳出如下的解题步骤：

(1) 由给出的差分方程 [见式 (2-1)] 写出其特征方程 [见式 (2-3)]，它是一个代数方程。

(2) 解特征方程，得到各特征根  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ，由此可以得到如式 (2-4) 所示形式的一般解。

(3) 将边界条件 ( $y(0)$  为某给定值， $y(1)$  为某给定值……共  $r$  个条件) 代入式 (2-4)，求得  $A_1, A_2, \dots, A_r$ ，然后再将它们代入式 (2-4) 则求解完毕。

例 2-1 设有差分方程

$$y(n) - y(n-1) - y(n-2) = 0 \quad (2-5)$$

其边界条件为

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad (2-6)$$

试求其解?

解

(1) 由式 (2-5) 得知现在的  $r = 2$ , 故参照式 (2-3), 可写出式 (2-5) 的特征方程为

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad (2-7)$$

(2) 解式 (2-7), 得特征根:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (2-8)$$

参见式 (2-4) 可得式 (2-5) 的一般解为

$$y(n) = A_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + A_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (2-9)$$

(3) 将式 (2-6) 代入式 (2-9), 得

$$\begin{cases} y(0) = 0 = A_1 + A_2 & (2-10) \\ y(1) = 1 = A_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + A_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) & (2-11) \end{cases}$$

将上面二式联立解得

$$\begin{cases} A_1 = 1/\sqrt{5} \\ A_2 = -1/\sqrt{5} \end{cases}$$

将它们代入式 (2-9), 即得方程的一般解为

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (2-12)$$

## 二、非齐次线性差分方程的解法

非齐次线性差分方程可写成如下形式:

$$\begin{aligned} c_0 y(n) + c_1 y(n-1) + \dots + c_r y(n-r) \\ = E_0 x(n) + E_1 x(n-1) + \dots + E_m x(n-m) \end{aligned} \quad (2-13)$$

式中,  $c_0, c_1, \dots, E_0, E_1, \dots$  为给定常数;  $x(n)$  为给定的序列 [随之  $x(n-1)$  等也成为已知, 例如给出  $x(n) = n^2$ , 则  $x(n-1) = (n-1)^2$  ]。如

$$y(n) + 2y(n-1) = x(n) - x(n-1) \quad (2-14)$$

即属此类方程之一例。

解题的思路与解非齐次微分方程的思路相似, 即将一般解分为“齐次解”与“特解”两部分。前者为式 (2-13) 的齐次方程 (即令其右侧为零的方程) 之解。而后者则为任意一个能满足式 (2-13) 的  $y(n)$  的函数。

求解“齐次解”的方法, 步骤前面已讨论过。至于求特解, 在较简单的情况下可用“观察法”, 或者用查表的方法, 即查根据积累的经验面建立的特解对照表 (见表 2-1)。

通过上述分析, 可归纳出如下的解题步骤:

- (1) 参照 § 2-1 一求出齐次解;
- (2) 按上述求特解方法得到特解, 并与齐次解相加即得到一般解;

(3) 按给出的边界条件, 求出一般解中的各待定常数。

表2-1 特解对照表

	式(2-13)型差分方程右侧的形式	特解的形式( $P_1, P_2, \dots, P_{k-1}$ 为常数)
1	$\alpha_1 n^k + \alpha_2 n^{k-1} + \dots + \alpha_k$ , ( $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 为常数)	$P_1 n^k + P_2 n^{k-1} + \dots + P_{k-1}$
2	$a^n$ ( $a$ 为常数)	(1) 若差分方程的特征根都不 $\neq a$ , 则用 $P a^n$ (2) 若特征根互异, 且其一为 $a$ , 则用 $P_1 n a^n + P_2 a^n$ (3) 若 $a$ 为差分方程的某 $k-1$ 重特征根之一, 则用 $P_1 n^{k-1} a^n + P_2 n^{k-2} a^n + \dots + P_k a^n$

例 2-2 设有差分方程  $y(n) + 2y(n-1) = n^2 - (n-1)^2$ , 即

$$y(n) + 2y(n-1) = 2n - 1 \quad (2-15)$$

其边界条件为

$$y(0) = 1 \quad (2-16)$$

试求其解?

解

(1) 由式 (2-15) 可得特征方程  $\lambda + 2 = 0$ , 解此特征方程得特征根  $\lambda = -2$ 。因此式 (2-15) 的齐次解为

$$y(n) = A(-2)^n \quad (2-17)$$

(2) 用查表的方法求特解, 式 (2-15) 右侧的形式属于表 2-1 中第一行 (现  $k=1$ ,  $\alpha_1=2$ ,  $\alpha_2=-1$ , 其余  $\alpha=0$ ), 故可得其特解为

$$y(n) = P_1 n + P_2 \quad (2-18)$$

将它代入式 (2-15), 则得

$$(P_1 n + P_2) + 2[P_1(n-1) + P_2] = 2n - 1$$

即

$$3P_1 n + 3P_2 - 2P_1 = 2n - 1$$

或

$$n(3P_1 - 2) + (3P_2 - 2P_1 + 1) = 0$$

由于  $n$  不恒为零, 故有

$$\begin{cases} 3P_1 - 2 = 0 \\ 3P_2 - 2P_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

由此二式可联立解得  $P_1 = 2/3$ ,  $P_2 = 1/9$ 。以此代入式 (2-18), 即得出特解

$$y(n) = (2/3)n + 1/9$$

由上式及式 (2-17) 即可得出含待定系数的一般解, 即

$$y(n) = A_1(-2)^n + (2/3)n + 1/9 \quad (2-19)$$

(3) 将边界条件  $y(0) = 1$  代入式 (2-19), 得到  $1 = A_1 + 1/9$ , 即  $A_1 = 8/9$ 。将此值代入式 (2-19), 即得所要求的一般解为

$$y(n) = (8/9)(-2)^n + (2/3)n + 1/9$$

注意: 前面所讨论的齐次解的形式, 仅限于差分方程的特征根互异的情况。当特征根中有  $k$  重根  $\lambda_1$  时, 所设的齐次解的形式应有所改变, 即它应含有  $(A_1 n^{k-1} + A_2 n^{k-2} + \dots + A_k) \lambda_1^n$  型项 (其中各  $A$  为待定常数)。例如某差分方程的特征根为  $-2$ 、 $-2$ 、 $3$ , 即它含

有  $k (= 2)$  重根  $-2$ , 则其齐次解的形式应为

$$y(n) = (A_1 n + A_2)(-2)^n + A_3(3)^n$$

又如某差分方程的特征根为  $-2$ 、 $-2$ 、 $-2$ 、 $3$ , 即它含有  $k (= 3)$  重根  $-2$ , 则其齐次解的形式应为

$$y(n) = (A_1 n^2 + A_2 n + A_3)(-2)^n + A_4(3)^n$$

## § 2-2 矩阵解法

矩阵解法常用来求解常系数线性差分联立方程组。假定方程组为

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) \\ x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) \end{cases} \quad (2-20)$$

其边界条件为

$$\begin{cases} x_1(0) = \text{某定值} \\ x_2(0) = \text{某定值} \end{cases} \quad (2-21)$$

那么, 可以把它写成矩阵的形式:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix}}_{X(n+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}}_{X(n)} \quad (2-22)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}}_{X(0)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{某定值} \\ \text{某定值} \end{bmatrix}}_{\text{某给定的列矩阵}} \quad (2-23)$$

式下标注的黑体字代表矩阵的简写形式。化为矩阵形式后, 就能较方便和紧凑地进行处理。

求解的思路: 利用“线性代数”中有关矩阵的知识找出矩阵  $A$  的特征根 (现用  $\lambda_1, \lambda_2$  表示, 并设其值各异) 和相应的特征向量 (现用列向量  $V_1, V_2$  表示), 而它们之间具有下式所示的关系:

$$\begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ AV_2 = \lambda_2 V_2 \end{cases} \quad (2-24)$$

$$\quad \quad \quad (2-25)$$

我们知道, 各特征向量是线性无关的, 故可将代表边界条件的任何列向量  $X(0)$  用  $V_1, V_2$  的线性组合表示, 即有

$$X(0) = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 \quad (2-26)$$

式中  $\alpha_1, \alpha_2$  为标量 (也就是  $X(0)$  以  $V_1, V_2$  为基底时的坐标)。

我们又由式 (2-22) 得知: 若以  $n=0$  代入式 (2-22), 则有

$$X(1) = AX(0) \quad (2-27)$$

若以  $n=1$  代入式 (2-22), 则有

$$X(2) = AX(1) \quad (2-28)$$

以式 (2-27) 代入式 (2-28), 可得  $X(2) = A^2 X(0)$ 。依此类推, 可推导出一个带普遍

性的公式, 即

$$X(n) = A^n X(0) \quad (2-29)$$

现将式 (2-26) 代入上式, 即得

$$\begin{aligned} X(n) &= A^n \alpha_1 V_1 + A^n \alpha_2 V_2 = \alpha_1 A^{n-1} (AV_1) + \alpha_2 A^{n-1} (AV_2) \\ &\stackrel{(2-24)(2-25)}{=} \alpha_1 A^{n-1} (\lambda_1 V_1) + \alpha_2 A^{n-1} (\lambda_2 V_2) = \alpha_1 A^{n-2} \lambda_1 (AV_1) \\ &\quad + \alpha_2 A^{n-2} \lambda_2 (AV_2) \\ &\stackrel{(2-24)(2-25)}{=} \alpha_1 A^{n-2} \lambda_1^2 V_1 + \alpha_2 A^{n-2} \lambda_2^2 V_2 = \cdots = \alpha_1 A^{n-n} \lambda_1^n V_1 \\ &\quad + \alpha_2 A^{n-n} \lambda_2^n V_2 = \alpha_1 I \lambda_1^n V_1 + \alpha_2 I \lambda_2^n V_2 = \alpha_1 \lambda_1^n V_1 + \alpha_2 \lambda_2^n V_2 \quad (2-30) \end{aligned}$$

在上式倒数第二步的推导中, 曾用到  $A^0 = I$  (单位阵) 的关系。由已知的  $A$  可以求出  $V_1, V_2$ , 并可按边界条件得到  $\alpha_1, \alpha_2$ , 然后将它们代入式 (2-30), 就可以得到所需要的  $X(n)$ , 也就是所需要的解。

通过前面的分析, 我们可归纳出如下的解题步骤:

(1) 由给出的  $A$ , 按“线性代数”中所述方法求出其特征根  $\lambda_1, \lambda_2$  及相应的特征向量  $V_1, V_2$ ;

(2) 由式 (2-26) 及给出的  $X(0)$ , 解出  $\alpha_1, \alpha_2$  值;

(3) 由式 (2-30) 及求出的  $\lambda_1, \lambda_2, V_1, V_2, \alpha_1, \alpha_2$ , 即得到所要求的解。

**例 2-3** 设有差分方程, 其矩阵形式为

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix}}_{X(n+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}}_{X(n)} \quad (2-31)$$

而其边界条件为

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

试求其解?

**解**

(1) 为了求出  $A$  的特征根, 先列出其特征多项式。  $A$  的特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\text{即} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \quad (2-33)$$

参见式 (2-24)、(2-25), 由

$$\begin{cases} AV_1 (= \lambda_1 V_1) = V_1 \\ AV_2 (= \lambda_2 V_2) = 2V_2 \end{cases} \quad (2-34)$$

$$\quad (2-35)$$

按“线性代数”中所述方法 (如 [15] 第六章), 可找出一组  $V_1, V_2$  值, 即

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2-36)$$

注意: 式 (2-36) 所示的解不是唯一的, 下面列出其具体解法。由式 (2-34) 知  $AV_1 =$



$IV_1$  或  $(I-A)V_1=0$ 。现令  $V_1 \triangleq \begin{bmatrix} v_1' \\ v_1'' \end{bmatrix}$ ，将它及已知的  $A$  阵代入上式，即有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_1'' \end{bmatrix} = 0$$

或

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_1'' \end{bmatrix} = 0$$

也即

$$\begin{cases} v_1' - v_1'' = 0 & (2-37) \\ 2v_1' - 2v_1'' = 0 & (2-38) \end{cases}$$

下面解上述联立方程组。由于式 (2-37)、(2-38) 是线性相关的，故可先任设一个  $v_1'$  值。为简单起见，设  $v_1' = 1$ ，将此代入式 (1-37)，可解得  $v_1'' = 1$ 。故知：

$$V_1 \triangleq \begin{bmatrix} v_1' \\ v_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

同样，由式 (2-35) 知  $AV_2 = 2IV_2$ ，或  $(2I-A)V_2 = 0$ 。现令  $V_2 \triangleq \begin{bmatrix} v_2' \\ v_2'' \end{bmatrix}$ ，将它及已知的  $A$  代入上式，即有

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2' \\ v_2'' \end{bmatrix} = 0$$

或

$$\begin{cases} 2v_2' - v_2'' = 0 & (2-39) \\ 2v_2' - v_2'' = 0 & (2-40) \end{cases}$$

下面解式 (2-39)、(2-40)。由于此二式是线性相关的，故可先任设一个  $v_2'$  值。现设  $v_2' = 1$ ，将它代入式 (2-39)，即得  $v_2'' = 2$ 。故知：

$$V_2 \triangleq \begin{bmatrix} v_2' \\ v_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(2) 将式 (2-36)、(2-32) 代入式 (2-26)，可得

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ -2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{cases}$$

由此二式可联立解得

$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = -3 \quad (2-41)$$

(3) 将式 (2-33)、(2-36)、(2-41) 代入式 (2-30) 即得所要求的解，即