数字网络与噪声网络

成都电讯工程学院

陈尚勤 魏鸿骏 编著

国防工业出版社

内容简介

本书分为两篇，第一篇讨论数字网络，包括离散信号系统理论与正交变换理论等基础知识、数字滤波网络及正交变换网络的分析、设计；第二篇讨论噪声网络，包括随机过程理论的基础知识、随机信号通过线性、非线性网络的分析及最佳检测和估值网络的设计。书末附有十一个附录，其中包括阅读本书有关的补充基础知识。

本书由浅入深，推导过程一般均较仔细，便于自学。除作为"通信及无线电技术"等同类专业高年级学生教材外，也可作为研究生教材，并可供有关工程技术人员或科研人员参考。

数字网络与噪声网络

成都电讯工程学院

陈尚勤　魏鸿骏　编著

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$787\times1092\ 1/16$　印张 $32\ 1/2$　759千字

1981年2月第一版　1981年2月第一次印刷　印数：0,001—6,300册

统一书号：15034·2148　　定价：3.30元

前　言

本书系高等学校工科电子类“通信与无线电技术”专业统编教材之一。

数字网络（或称离散信号网络、离散信号系统）及噪声网络（或称随机信号网络）是近代网络学发展的两大分支。它们在通信、雷达及各类信号的处理方面有着广泛的应用。本书着重于论述这两类网络的物理概念、分析和设计方法，以及有关的数学工具，并举有一些应用例子，以期达到上述目的。

数字网络与噪声网络这两部分内容有一定的交叉和衔接。在一些具体问题中，往往需要同时用到这两方面的概念和方法，它们都是十分重要的，是互相紧密联系着的两个分支。为了论述方便，本书分为两篇。

第一篇是数字网络，它分为三个部分，即：

（1）有关基础理论部分，包括第一、二、三及九章；

（2）数字滤波网络部分，包括第四到第八章。第四章讨论滤波网络的分析方法，后面四章讨论各型数字网络的设计理论和方法；

（3）正交变换网络部分，包括第十到十三章。

第二篇是噪声网络，主要研究在存在噪声且信号为随机信号的情况下，网络（电路或系统）的分析、设计方法。本篇分为四个部分：

（1）随机过程理论基础，包括第十四章；

（2）随机信号通过线性网络的分析，包括第十五章；

（3）在信号随机或存在噪声情况下，非线性网络的分析，包括第十六到十八章；

（4）在存在噪声的情况下，能实现最佳检测和估值的网络的设计。第十九章讨论假设和检测的判决准则，第二十、二十一、二十二章讨论检测设计问题，第二十三到二十五章讨论估值设计问题（包括参量估值与波形估值）。

为了与前继课程紧密衔接，并对某些内容有所补充，书末还设有附录Ⅰ～Ⅺ。

讲授全书约需90学时，如因学时数限制也可根据需要予以取舍。本书在安排上提供了一定的灵活性，也可以单独使用其中一部分。

本书除作为“通信及无线电技术”专业或其它同类型专业高年级学生的教材外，也可作为研究生的教材，并可作为有关科研人员或工程技术人员的参考书籍。为了便于自学和容易阅读，一般推导过程比较详细。

我们期望通过本书的阅读，对掌握近代网络学两大分支的基本概念、基本理论、基本分析和设计方法以及相互的初步联系有所助益，以适应电子技术的迅速发展。

本书由华中工学院刘华志、卢延寿同志主审，华南工学院、哈尔滨工业大学、西北电讯工程学院、上海交通大学参加了审稿工作。在此，我们对上述单位和个人表示衷心感谢。

我们恳请读者惠予批评指正。

编　著　者

目　录

第一篇　数字网络

第二篇 噪声网络

第一篇　数字网络

第一章　离散信号、差分方程和数字滤波器

§1-1　离散信号和序列

在工程系统中所要处理的信号可以分为连续信号和离散信号两大类。所谓时域的离散信号是指在离散时刻上才出现的信号，它的数学表示方式是"序列"。而所谓"序列"，是指自变量只能取离散值的函数。如下式就代表一个序列：

$$y_1(n)=\begin{cases}2^n & 当\ n\geqslant 0\\ 0 & 当\ n<0\end{cases}$$

它也可用图形表示出来（见图 1-1）。又如

$$y_2(n)=y_1(n+1)=\begin{cases}2^{n+1} & 当\ n\geqslant -1\\ 0 & 当\ n<-1\end{cases}$$

$$y_3(n)=\sin\omega n=\sin 2\pi fn=\sin\frac{2\pi}{T}n$$

式中，ω、f、T 为常数，它们都代表序列，其图形分别如图 1-2 和图 1-3 所示。

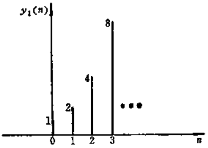

图1-1　函数$y_1(n)$的图形

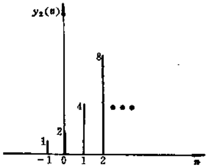

图1-2　函数$y_2(n)$的图形

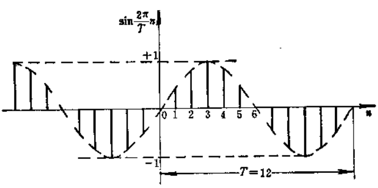

图1-3　函数$\sin\frac{2\pi}{T}n$的图形

§1-2 差分和差分方程

在含离散信号的工程系统中，主要处理的对象是"序列"。序列间的关系往往以"差分方程"这种数学模型出现（类似于连续系统中变量间的关系常以微分方程的形式出现）。因此对于差分方程的定义、分类、特性等必须弄清楚。

一、差分的定义

类似于连续函数定义

$$dy(t) \triangleq [y(t)-y(t-\Delta t)]_{\Delta t\to 0} \tag{1-1}$$

为 $y(t)$ 在 t 处的"一阶微分"那样，我们定义

$$\Delta y(n) \triangleq y(n)-y(n-1) \tag{1-2}$$

为序列 $y(n)$ 在 n 处的"一阶差分"。

同样，定义 $y(n)$ 在 n 处的"二阶差分"〔用 $\Delta^2 y(n)$ 来表示〕为

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(n) &\triangleq \Delta[\Delta y(n)] \overset{(1-2)}{=} \Delta[y(n)-y(n-1)] = \Delta y(n)-\Delta y(n-1)\\ &\overset{(1-2)}{=} \underbrace{[y(n)-y(n-1)]}_{\Delta y(n)} - \underbrace{[y(n-1)-y(n-2)]}_{\Delta y(n-1)}\\ &= y(n)-2y(n-1)+y(n-2)\end{aligned} \tag{1-3}$$

$y(n)$ 在 n 处的三阶差分〔$\Delta^3 y(n)$〕等的定义可仿此类推。

二、差分方程的定义

（1）我们把

$$F[n,\ y(n),\ \Delta y(n),\ \Delta^2 y(n)]=0 \tag{1-4}$$

这类形式的方程称为差分方程。如

$$\Delta y(n)+3y(n)=2n+1 \tag{1-5}$$

即为差分方程之一例。

（2）为了处理方便，将式（1-2）代入式（1-5），则得

$$4y(n)-y(n-1)=2n+1 \tag{1-6}$$

据此，我们可将差分方程的定义式改为与之等效的另一种形式，即

$$F_1[n,\ y(n),\ y(n-1),\ y(n-2),\cdots]=0 \tag{1-7}$$

（3）若将方程中的变量 n 作数学上的变量替换，这并不改变所代表的物理现象的实质。如将式（1-6）中的 $n-1$ 代以 n'，则有

$$4y(n'+1)-y(n')=2n'+3 \tag{1-8}$$

从中可看出，差分方程在形式上还可出现如 $[y(n+k)]_{k>0}$ 的项(其中 k 可为任意整数)，故差分方程的定义式在形式上还可改变为

$$F_2[n,\ \cdots,\ y(n-2),\ y(n-1),\ y(n),\ y(n+1),\ y(n+2),\cdots]=0 \tag{1-9}$$

本书所采用的定义式就是这种形式。当然，除去式（1-9）中〔 〕内的 $[y(n+k)]_{k>0}$ 或 $[y(n+k)]_{k<0}$ 型之一，在实质上都并不失去通用性。

三、差分方程的阶

差分方程中存在着各个 $y(n+k)$ 型项，方程内的 $y(n+k)$ 型项中最大的 k 值与最小的 k 值之差，称为这差分方程的“阶”。如对于方程

$$y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0 \tag{1-10}$$

其阶为 $0-(-2)=2$；对于方程式（1-6），其阶为 $0-(-1)=1$；对于方程式（1-8）其阶为 $1-0=1$。

方程式（1-6）、（1-8）同阶是意料中的事，因为如前所述，它们所代表的物理现象实质上是相同的。

四、线性差分方程

在某差分方程中，若各个 $y(n+k)$ 型项都只有一次幂，且不存在此类型彼此相乘的项，则称这类差分方程为“线性差分方程”。如

$$n^2y(n+2)-(n+1)y(n+1)+y(n)=n^3-1 \tag{1-11}$$

式（1-6）、（1-8）、（1-10）等也属这类方程。若其中各 $y(n+k)$ 型项的系数都是常数，则称之为“常系数线性差分方程”。如式（1-6）、（1-8）、（1-10）都属此类型。系数中若含有 n，则称为“变系数线性差分方程”。如式（1-11）即属此类型。

若将非 $y(n+k)$ 型项都移到方程的右侧，则该侧等于零的一类方程，称为“齐次差分方程”，否则称为“非齐次差分方程”。如式（1-10）就是齐次差分方程，而式（1-6）、（1-8）等则为“非齐次差分方程”。

五、非线性差分方程

若差分方程中的 $y(n+k)$ 型项中具有高于一次的幂或具有它们彼此相乘的项，则称此方程为“非线性差分方程”。如

$$8y(n+1)+8y(n+1)y^2(n)-8y^2(n)=3 \tag{1-12}$$

就属于此类方程。

代表一个完整的物理现象的差分方程是附有“边界条件”的。如对于式（1-8），可设 $y(0)=1$ 或其它定值。但应注意，所给的边界条件数应该等于方程的阶数，才能得到唯一的解。

六、差分方程与其对应的数字滤波器间的关系

我们称输入、输出信号都是离散信号的网络为离散信号网络（或“离散网络”或“数字网络”），并将具有滤波（或均衡）性能的数字网络称为“数字滤波器”。给出数字滤波器结构，可以据之求出表征它的性能的差分方程。如有滤波器如图 1-4 所示的结构，则我们

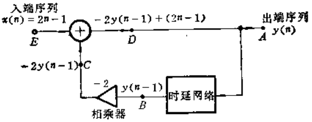

图1-4　一种数字滤波器结构

时延网络——延迟一个序列间隔时间，现间隔时间为 1。

可以由信号为$y(n)$的A点出发，按图推出B、C、D各点的数学表示量，如图 1-4 中所注。又由于D点即是A点，故有

$$y(n)=-2y(n-1)+(2n-1) \tag{1-13}$$

此式就是表征这一滤波器性能的差分方程。

反之，若是给出了差分方程〔例如式（1-13)〕，我们也不难根据所掌握的知识，反过来推出它所表征的网络结构。为了使输入为序列时输出也是序列，故所讨论的数字滤波器与模拟滤波器不同，它只是由相加、相乘和时延器所组成（参见图1-4)。

§1-3　数字滤波器滤波作用的物理解释

数字滤波器可以完成模拟滤波器所完成的滤波（或均衡）任务。下面以RC模拟滤波器〔见图 1-5(a)〕为例来说明数字与模拟滤波器间的对应关系。

图1-5(a) 电路的输出、输入信号$y(t)$、$x(t)$显然满足关系：

$$RC\frac{dy}{dt}=x(t)-y(t) \tag{1-14}$$

如将上式中的dt近似为抽样时间间隔T，$y(t)$、$x(t)$ 分别近似为$y(n)$、$x(n)$，dy近似为$\Delta y(n)$，并将式（1-2）代入，则式（1-14）成为

$$RC\left[\frac{y(n)-y(n-1)}{T}\right]=x(n)-y(n)$$

或

$$y(n)=\frac{1}{1+(RC/T)}x(n)+\frac{1}{1+(T/RC)}y(n-1) \tag{1-15}$$

由上式可见，该式相应的网络如图1-5(b) 所示，而此网络就是只由相加、相乘、时延器所构成的数字滤波器。也就是说，这种数字滤波器是可以近似地完成图1-5(a) 模拟滤波器的作用的。有关数字滤波器进一步的分析将在后面各章中进行。这里只是一个初步的解释。

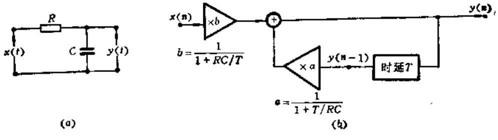

图1-5　模拟滤波器与数字滤波器的对应关系
(a) 模拟RC滤波器；(b) 与图(a) 相应的数字滤波器。

第二章　差分方程的经典解法、矩阵解法和递归解法

§2-1　经典解法

常系数差分方程的经典解法，是矩阵解法和递归解法的基础。在解决某些类型的差分方程时，此种方法有着清晰简便的优点。下面介绍其思路及解题步骤。

一、齐次差分方程的解法

齐次常系数线性差分方程的一般形式可写成

$$c_0y(n)+c_1y(n-1)+\cdots+c_ry(n-r)=0 \tag{2-1}$$

式中 c_0，c_1，…，c_r 为常数，式子右侧为零。

解式（2-1)的思路与解齐次微分方程的思路类似，先假设一个有希望的形式的解，即

$$y(n)=A\lambda^n \tag{2-2}$$

式中 A、λ 都是与 n 无关的参数。以此式代入式（2-1)，则得到

$$c_0A\lambda^n+c_1A\lambda^{n-1}+\cdots+c_rA\lambda^{n-r}=0$$

即
$$A\lambda^{n-r}[c_0\lambda^r+c_1\lambda^{r-1}+\cdots+c_r]=0$$

或
$$c_0\lambda^r+c_1\lambda^{r-1}+\cdots+c_r=0 \tag{2-3}$$

如将上式的根称为 λ_1，λ_2，…，λ_r（暂设各 λ 值是互异的)，则由式（2-2）可知 $y(n)=A_1\lambda_1^n$，$y(n)=A_2\lambda_2^n$，…，$y(n)=A_r\lambda_r^n$ 都是式（2-1）的解（式中 A_1，A_2，…，A_r 为任意常数)。所以 $y(n)$ 的一般解为

$$y(n)=A_1\lambda_1^n+A_2\lambda_2^n+\cdots+A_r\lambda_r^n \tag{2-4}$$

当给定边界条件后，上式中的 A_1，…，A_r 就可以被确定。因此式（2-3）被称为式（2-1）差分方程的“特征方程”，而 λ_1，…，λ_r 则称为它的“特征根”。

通过上述分析，我们归纳出如下的解题步骤：

（1）由给出的差分方程〔见式（2-1)〕写出其特征方程〔见式（1-3)〕，它是一个代数方程。

（2）解特征方程，得到各特征根 λ_1，λ_2，…，λ_r，由此可以得到如式（2-4）所示形式的一般解。

（3）将边界条件〔$y(0)$ 为某给定值，$y(1)$ 为某给定值……共 r 个条件〕代入式(2-4)，求得 A_1，A_2，…，A_r，然后再将它们代回式（2-4）则求解完毕。

例 2-1　设有差分方程

$$y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0 \tag{2-5}$$

其边界条件为

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(1)=1 \end{cases} \tag{2-6}$$

试求其解?

解

（1）由式（2-5）得知现在的 $r=2$，故参照式（2-3），可写出式（2-5）的特征方程为

$$\lambda^2-\lambda-1=0 \tag{2-7}$$

（2）解式（2-7），得特征根：

$$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\qquad \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{2-8}$$

参见式（2-4）可得式（2-5）的一般解为

$$y(n)=A_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{2-9}$$

（3）将式（2-6）代入式（2-9），得

$$\begin{cases} y(0)=0=A_1+A_2 & (2\text{-}10)\\ y(1)=1=A_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+A_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & (2\text{-}11)\end{cases}$$

将上面二式联立解得

$$\begin{cases} A_1=1/\sqrt{5}\\ A_2=-1/\sqrt{5}\end{cases}$$

将它们代回式（2-9），即得方程的一般解为

$$y(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{2-12}$$

二、非齐次线性差分方程的解法

非齐次线性差分方程可写成如下形式：

$$\begin{aligned} &c_0y(n)+c_1y(n-1)+\cdots+c_ry(n-r)\\ &=E_0x(n)+E_2x(n-1)+\cdots+E_mx(n-m)\end{aligned} \tag{2-13}$$

式中，c_0，c_1，…，E_0，E_1，…为给定常数；$x(n)$为给定的序列〔随之 $x(n-1)$ 等也成为已知，例如给出 $x(n)=n^2$，则 $x(n-1)=(n-1)^2$〕。如

$$y(n)+2y(n-1)=x(n)-x(n-1) \tag{2-14}$$

即属此类方程之一例。

解题的思路与解非齐次微分方程的思路相似，即将一般解分为“齐次解”与“特解”两部分。前者为式（2-13）的齐次方程（即令其右侧为零的方程）之解。而后者则为任意一个能满足式（2-13）的 $y(n)$的函数。

求解“齐次解”的方法，步骤前面已讨论过。至于求特解，在较简单的情况下可用“观察法”，或者用查表的方法，即查根据积累的经验而建立的特解对照表（见表2-1）。

通过上述分析，可归纳出如下的解题步骤：

（1）参照§2-1一求出齐次解；

（2）按上述求特解方法得到特解，并与齐次解相加即得到一般解；

（3）按给出的边界条件，求出一般解中的各待定常数。

表2-1　特解对照表

	式(2-13)型差分方程右侧的形式	特解的形式(P_1，P_2，…，P_{k+1}为常数)
1	$\alpha_1 n^k+\alpha_2 n^{k-1}+\cdots+\alpha_k$，($\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 为常数)	$P_1 n^k+P_2 n^{k-1}+\cdots+P_{k+1}$
2	a^n(a 为常数)	（1）若差分方程的特征根都$\neq a$，则用Pa^n （2）若特征根互异，且其一为a，则用 $P_1 na^n+P_2 a^n$ （3）若a为差分方程的某$k-1$重特征根之一，则用$P_1 n^{k-1}a^n+P_2 n^{k-2}a^n+\cdots+P_k a^n$

例 2-2　设有差分方程$y(n)+2y(n-1)=n^2-(n-1)^2$，即

$$y(n)+2y(n-1)=2n-1 \tag{2-15}$$

其边界条件为

$$y(0)=1 \tag{2-16}$$

试求其解？

解

（1）由式（2-15）可得特征方程$\lambda+2=0$，解此特征方程得特征根$\lambda=-2$。因此式（2-15）的齐次解为

$$y(n)=A(-2)^n \tag{2-17}$$

（2）用查表的方法求特解，式（2-15）右侧的形式属于表2-1中第一行（现$k=1$，$\alpha_1=2$，$\alpha_2=-1$，其余$\alpha=0$），故可得其特解为

$$y(n)=P_1 n+P_2 \tag{2-18}$$

将它代入式（2-15），则得

$$(P_1 n+P_2)+2[P_1(n-1)+P_2]=2n-1$$

即

$$3P_1 n+3P_2-2P_1=2n-1$$

或

$$n(3P_1-2)+(3P_2-2P_1+1)=0$$

由于n不恒为零，故有

$$\begin{cases}3P_1-2=0\\3P_1-2P_1+1=0\end{cases}$$

由此二式可联立解得$P_1=2/3$，$P_2=1/9$。以此代入式（2-18），即得出特解

$$y(n)=(2/3)n+1/9$$

由上式及式（2-17）即可得出含待定系数的一般解，即

$$y(n)=A_1(-2)^n+(2/3)n+1/9 \tag{2-19}$$

（3）将边界条件$y(0)=1$代入式（2-19），得到$1=A_1+1/9$，即$A_1=8/9$。将此值代回式（2-19），即得所要求的一般解为

$$y(n)=(8/9)(-2)^n+(2/3)n+1/9$$

注意：前面所讨论的齐次解的形式，仅限于差分方程的特征根互异的情况。当特征根中有k重根λ_1时，所设的齐次解的形式应有所改变，即它应含有$(A_1 n^{k-1}+A_2 n^{k-2}+\cdots+A_k)\lambda_1^n$型项（其中各$A$为待定常数）。例如某差分方程的特征根为$-2$、$-2$、$3$，即它含

有 k（= 2）重根 − 2，则其齐次解的形式应为

$$y(n)=(A_1n+A_2)(-2)^n+A_3(3)^n$$

又如某差分方程的特征根为 − 2、− 2、− 2、3，即它含有 k（= 3）重根 − 2，则其齐次解的形式应为

$$y(n)=(A_1n^2+A_2n+A_3)(-2)^n+A_4(3)^n$$

§2-2 矩阵解法

矩阵解法常用来求解常系数线性差分联立方程组。假定方程组为

$$\begin{cases} x_1(n+1)=a_{11}x_1(n)+a_{12}x_2(n) \\ x_2(n+1)=a_{21}x_1(n)+a_{22}x_2(n) \end{cases} \tag{2-20}$$

其边界条件为

$$\begin{cases} x_1(0)=\text{某定值} \\ x_2(0)=\text{某定值} \end{cases} \tag{2-21}$$

那么，可以把它写成矩阵的形式：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{X}(n+1)}=\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{X}(n)} \tag{2-22}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{X}(0)}=\underbrace{\begin{bmatrix} \text{某定值} \\ \text{某定值} \end{bmatrix}}_{\text{某给定的列矩阵}} \tag{2-23}$$

式下标注的黑体字代表矩阵的简写形式。化为矩阵形式后，就能较方便和紧凑地进行处理。

求解的思路：利用“线性代数”中有关矩阵的知识找出矩阵$\boldsymbol{A}$的特征根（现用λ_1、λ_2表示，并设其值各异）和相应的特征向量（现用列向量$\boldsymbol{V}_1$、$\boldsymbol{V}_2$表示），而它们之间具有下式所示的关系：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1=\lambda_1\boldsymbol{V}_1 \tag{2-24}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_2=\lambda_2\boldsymbol{V}_2 \tag{2-25}$$

我们知道，各特征向量是线性无关的，故可将代表边界条件的任何列向量$\boldsymbol{X}(0)$用$\boldsymbol{V}_1$、$\boldsymbol{V}_2$的线性组合表示，即有

$$\boldsymbol{X}(0)=\alpha_1\boldsymbol{V}_1+\alpha_2\boldsymbol{V}_2 \tag{2-26}$$

式中α_1、α_2为标量〔也就是$\boldsymbol{X}(0)$以$\boldsymbol{V}_1$、$\boldsymbol{V}_2$为基底时的坐标〕。

我们又由式（2-22）得知：若以 $n=0$ 代入式（2-22），则有

$$\boldsymbol{X}(1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(0) \tag{2-27}$$

若以 $n=1$ 代入式（2-22），则有

$$\boldsymbol{X}(2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(1) \tag{2-28}$$

以式（2-27）代入式（2-28），可得$\boldsymbol{X}(2)=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}(0)$。依此类推，可推导出一个带普遍

性的公式，即

$$X(n)=A^nX(0) \tag{2-29}$$

现将式（2-26）代入上式，即得

$$\begin{aligned}X(n)&=A^n\alpha_1V_1+A^n\alpha_2V_2=\alpha_1A^{n-1}(AV_1)+\alpha_2A^{n-1}(AV_2)\\&\overset{(2-24)(2-25)}{=\!=\!=}\alpha_1A^{n-1}(\lambda_1V_1)+\alpha_2A^{n-1}(\lambda_2V_2)=\alpha_1A^{n-2}\lambda_1(AV_1)\\&\quad+\alpha_2A^{n-2}\lambda_2(AV_2)\\&\overset{(2-24)(2-25)}{=\!=\!=}\alpha_1A^{n-2}\lambda_1^2V_1+\alpha_2A^{n-2}\lambda_2^2V_2=\cdots\cdots=\alpha_1A^{n-n}\lambda_1^nV_1\\&\quad+\alpha_2A^{n-n}\lambda_2^nV_2=\alpha_1I\lambda_1^nV_1+\alpha_2I\lambda_2^nV_2=\alpha_1\lambda_1^nV_1+\alpha_2\lambda_2^nV_2\end{aligned} \tag{2-30}$$

在上式倒数第二步的推导中，曾用到$A^0=I$(单位阵）的关系。由已知的A可以求出V_1、V_2，并可按边界条件得到α_1、α_2，然后将它们代入式（2-30），就可以得到所需要的$X(n)$，也就是所需要的解。

通过前面的分析，我们可归纳出如下的解题步骤：

（1）由给出的A，按“线性代数”中所述方法求出其特征根λ_1、λ_2及相应的特征向量V_1、V_2；

（2）由式（2-26）及给出的$X(0)$，解出α_1、α_2值；

（3）由式（2-30）及求出的λ_1、λ_2、V_1、V_2、α_1、α_2，即得到所要求的解。

例 2-3 设有差分方程，其矩阵形式为

$$\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(n+1)\\x_2(n+1)\end{bmatrix}}_{X(n+1)}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\-2&3\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(n)\\x_2(n)\end{bmatrix}}_{X(n)} \tag{2-31}$$

而其边界条件为

$$X(0)=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} \tag{2-32}$$

试求其解？

解

（1）为了求出A的特征根，先列出其特征多项式。A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\2&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)+2=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

即

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2 \tag{2-33}$$

参见式（2-24）、(2-25)，由

$$\begin{cases}AV_1(=\lambda_1V_1)=V_1 & (2-34)\\AV_2(=\lambda_2V_2)=2V_2 & (2-35)\end{cases}$$

按“线性代数”中所述方法（如〔15〕第六章），可找出一组V_1、V_2值，即

$$V_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix};\quad V_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \tag{2-36}$$

注意：式（2-36）所示的解不是唯一的，下面列出其具体解法。由式(2-34)知$AV_1=$

IV_1 或$(I-A)V_1=0$。现令 $V_1 \triangleq \begin{bmatrix} v_1' \\ v_1'' \end{bmatrix}$，将它及已知的$A$阵代入上式，即有

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} v_1' \\ v_1'' \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

或

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_1'' \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

也即

$$\begin{cases} v_1' - v_1'' = 0 & (2\text{-}37) \\ 2v_1' - 2v_1'' = 0 & (2\text{-}38) \end{cases}$$

下面解上述联立方程组。由于式（2-37）、(2-38) 是线性相关的，故可先任设一个 v_1' 值。为简单起见，设$v_1'=1$，将此代入式（1-37)，可解得$v_1''=1$。故知：

$$V_1 \triangleq \begin{bmatrix} v_1' \\ v_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

同样，由式（2-35）知 $AV_2=2IV_2$，或$[2I-A]V_2=0$。现令 $V_2 \triangleq \begin{bmatrix} v_2' \\ v_2'' \end{bmatrix}$，将它及已知的$A$代入上式，即有

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2' \\ v_2'' \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

或

$$\begin{cases} 2v_2' - v_2'' = 0 & (2\text{-}39) \\ 2v_2' - v_2'' = 0 & (2\text{-}40) \end{cases}$$

下面解式（2-39)、(2-40)。由于此二式是线性相关的，故可先任设一个v_2'值。现设$v_2'=1$，将它代入式（2-39)，即得 $v_2''=2$。故知：

$$V_2 \triangleq \begin{bmatrix} v_2' \\ v_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

（2）将式（2-36)、(2-32）代入式（2-26)，可得

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ -2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{cases}$$

由此二式可联立解得

$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = -3 \qquad (2\text{-}41)$$

（3）将式（2-33)、(2-36)、(2-41）代入式（2-30）即得所需要求的解，即