JING JI GUAN LI SHU XUE JI CHU

# 经济管理数学基础

王松浦 严静娴 冯道黎 主编

经 济 管 理 出 版 社

经 济 管 理 出 版 社

# 经济管理数学基础

王松浦　严静娴　冯道鋆　主编

经济管理出版社

**责任编辑** 陆符铭

# 经济管理数学基础

王松浦 严静娴 冯道鋆 主编

**出版**:经济管理出版社

(北京市新街口六条红园胡同8号 邮编:100035)

**发行**:经济管理出版社总发行 全国各地新华书店经销

**印刷**:北京华文印刷厂

787×1092 毫米 1/16 22.25 印张 564 千字

1997 年 8 月第 1 版 1997 年 8 月北京第 1 次印刷

印数:1—5000 册

ISBN 7-80118-498-X/F·477

定价:30.00 元

# 前 言

高等数学既是成人高等院校各专业的重要基础课，又是成人大学生普遍感到困难的课程，编写一本知识含量与普通高等院校数学教材相当，叙述更加详尽，适合成人特点的教材，是成人高校师生的共同愿望．为实现这个愿望，1991 年，我们总结多年来从事成人数学教学的经验，结合当时的教学大纲，编写了一套适合经济及管理类成人高等院校数学教学要求的讲义在校内各专业试用，根据试用中发现的问题，1993 年又对讲义进行了修改．几年来，讲义屡经讲授，倍受师生欢迎．目前，随着我国社会主义经济建设的发展和经济体制改革的深入，很多成人院校相继增设了一些财经类专业，加强了经济应用数学方面的教学，财经类成人大学生队伍不断壮大，学生队伍的构成和素质也有很大变化．为适应这种形势，我们参照北京市成人高等院校财经类专业《经济应用数学基础》教学大纲的要求，将讲授多年的讲义增删修订正式出版．

本书深入浅出地介绍了微积分、概率统计、线性代数和线性规划的基本概念，详细交待了解决实际问题的基本方法．为适应成人大学生的特点，本教材说理清楚，叙述通俗详尽；在重点和难点上，由浅入深，循序渐进．

本教材分三篇，它覆盖了《经济应用数学基础》教学大纲全部内容．第一篇是微积分基础知识，包括函数的极限与连续，导数和微分，中值定理及导数应用，不定积分和定积分，以及二元函数微分学简介．第二篇是概率论与数理统计基础知识，介绍了随机事件和概率，随机变量及分布，随机变量的数字特征，抽样分布，参数估计及假设检验，回归分析．第三篇是关于线性代数和线性规划的基础知识：内容有矩阵和线性方程组，线性规划问题及单纯形法，对偶线性规划，最后介绍了灵敏度分析．每章后配有相当数量的习题，书末为习题给出了答案．

本书适合作各类成人高等院校经济管理类专业的教材；也可作为高等教育自学考试（财经类）的试用教材；由于本教材说理透彻、例题习题丰富且附有答案，因此，它作为普通大学生的参考书及经济管理类工作者的自学教材也是非常合适的．

本教材由王松浦、严静娴、冯道鋆联合主编，朱儒偕教授主审．其中，第一篇由冯道鋆主编，第二篇由严静娴主编，第三篇由王松浦主编．参加编写的还有汪大明、魏金丽、仲瑛、曹珊、梁瑞梅、李国华、康俐．其中：汪大明编写第一篇第一章，魏金丽编写第一篇第二、三章，冯道鋆编写第一篇第四、五章，仲瑛编写第一篇第六章和第三篇第二章，曹珊编写第二篇第一章，严静娴编写第二篇第二、五、六、七章，梁瑞梅编写第二篇第三章第一至四节，王松浦编写第二篇第三章第五节、第四章和第三篇第三、四章，李国华编写第三篇第一章，康俐编写第三篇第五、六章．

我们特别感谢支持我们修订出版本书的北京煤炭管理干部学院主管教学工作的冯克庄副院长和教务处处长李生盛同志．感谢经济管理出版社的有关领导，对本书的责任编辑和印刷厂的同志们也深表谢意．

本教材是在繁重的教学工作中修订编写的，由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，甚至出现缺点和错误，恳请读者批评指正，以便在再版中修改．

编 者

1997 年 4 月 28 日

# 目　　录

## 第一篇　微积分

# 第二篇 概率论与数理统计

## 第三篇　线性代数与线性规划

# 第一篇　微积分

## 第一章　极限与连续

本章讲授函数的极限与连续性. 在开始学习之前，有必要对全章内容的重点与难点先有一个大致的了解. 本章的重点是复合函数的概念及其复合过程，极限的概念及其运算，连续函数的概念和初等函数的连续性. 本章学习的难点是复合函数的复合过程和极限的定义. 现在把重点和难点开列在前面，以期在学习之始就能引起初学者的注意.

### §1.1　函数

函数是高等数学的重要研究对象. 对于函数，学过初等数学就已十分熟悉了，因为函数是贯穿初等数学的主线之一. 下面先简略回顾一下已学过的函数知识，再加以提高.

**函数的概念**：设有变量 $x$ 和 $y$，其变动区域分别为 $X$ 和 $Y$. 若对 $X$ 中的每个 $x$ 值，都按一定规律有 $Y$ 中确定的 $y$ 值与之对应，就称 $x$ 为自变量，$y$ 为 $x$ 的函数，记作 $y=f(x)$. 分别称区域 $X$ 和 $Y$ 为函数 $f(x)$的定义域和值域.

例如函数 $y=\sqrt{3x-1}$，自变量 $x\in[\frac{1}{3},+\infty)$，函数 $y\in[0,+\infty)$.

初等数学里还讲过函数的如下性质.

**奇偶性**：若函数 $y=f(x)$对定义域内的一切 $x$，满足 $f(-x)=-f(x)$，就称 $f(x)$是奇函数；满足 $f(-x)=f(x)$，就称 $f(x)$为偶函数.

例如函数 $f(x)=x^3+1$，因为 $f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1$，而$-f(x)=-x^3-1$，故 $f(x)\neq f(-x)\neq -f(x)$，所以$f(x)$是非奇非偶函数.

**单调性**：若函数 $f(x)$在区间 $X$ 上有定义，对于 $X$ 上任意两点 $x_1$ 和 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，若总有 $f(x_1)<f(x_2)$，就称 $f(x)$在 $X$ 上是单调增加的函数；若总有 $f(x_1)>f(x_2)$，就称 $f(x)$在 $X$ 上是单调减少的函数.

例如，函数 $y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$. 对任意的 $x_1<x_2\leqslant 0$，都有 $x_1^2>x_2^2$，则 $y=x^2$ 在$(-\infty,0]$单调减少；对任意 $0\leqslant x_1<x_2$，都有 $x_1^2<x_2^2$，则 $y=x^2$ 在$[0,+\infty)$单调增加.

**有界性**：设函数 $f(x)$在区间 $X$ 上有定义，若存在一正数 $M$，使得当 $x\in X$ 时恒有$|f(x)|\leqslant M$，就称 $f(x)$在 $X$ 上有界；反之，若上述 $M$ 不存在，则称 $f(x)$在 $X$ 上无界.

例如函数 $y=\sin x$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$时总满足$|\sin x|\leqslant 1$，因此正弦函数在实数域上有界.

**周期性**：设有函数 $f(x)$，若存在正数 $T$，使得 $f(x\pm T)=f(x)$对定义域内一切 $x$ 值均成

立，则称 $f(x)$ 为周期函数，$T$ 为 $f(x)$ 的周期.

例如，考察函数 $y=\sin 3x$ 的周期. 因为 $y=\sin 3x=\sin(3x+2\pi)=\sin 3(x+\frac{2}{3}\pi)$，所以 $\frac{2}{3}\pi$ 即为所求周期.

学习初等数学时，曾熟悉了一类最简单且最常用的函数，即常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数. 这六种函数现统称为**基本初等函数**.

高等数学所涉及的函数多由基本初等函数构成. 怎样将简单的基本初等函数构成复杂的函数呢? 除了已熟知的加、减、乘、除四则运算外，还有就是复合.

**定义** 1.1 设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，若对于 $x$ 值所对应的 $u$ 值，$y=f(u)$ 有定义，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $x$ 的**复合函数**，$x$ 为自变量，$u$ 称中间变量.

复合函数不一定只复合一次，可以进行多次复合.

**例** 1 由函数 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$ 和 $v=x^2+1$ 进行两次复合，就得到复合函数 $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$.

学习复合函数时，既要会把几个简单函数复合成一个复杂的函数，也要会把一个复杂的函数视为几个简单函数的复合函数.

**例** 2 写出复合函数 $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$ 的复合过程.

**解** 令 $u=1+\sqrt{1+x^2}$，则 $y=\lg u$；令 $v=\sqrt{1+x^2}$，则 $u=1+v$；令 $w=1+x^2$，则 $v=\sqrt{w}$. 可见 $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$ 是由 $y=\lg u$，$u=1+v$，$v=\sqrt{w}$ 和 $w=1+x^2$ 经三次复合而成的，即 $y=\lg u=\lg(1+v)=\lg(1+\sqrt{w})=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$.

正确分析一个复合函数怎样由基本初等函数复合而成，在微积分的学习中特别重要.

注意，并非任何函数都能进行复合.

**例** 3 考察函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$ 是否能够复合成一个复合函数.

**解** 因 $u=x^2+2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[2,+\infty)$，而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$. 对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，对应的 $u$ 值都不属于 $[-1,1]$，因而不能使 $y$ 有意义. 故此二函数不能构成复合函数.

**定义** 1.2 由基本初等函数经有限次的四则运算及复合而构成，并且用一个式子来表示的函数，统称**初等函数**.

初等函数范围很广，是本课程的主要研究对象. 至于用多个式子来表达的所谓分段函数，通常在各段上都是初等函数，但就其整体而言，已不属初等函数了.

**例** 4 设分段函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{当 } x\leqslant 0;\\ \sin 2x, & \text{当 } x<0.\end{cases}$ 求 $f(\pi)$，$f(0)$，$f(-\pi)$ 和 $f(x)$ 的定义域.

**解** $f(\pi)=\pi+1$，$f(0)=0+1=1$，$f(-\pi)=\sin 2(-\pi)=\sin(-2\pi)=-\sin 2\pi=0$，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup[0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$.

最后，举一个特殊的函数例子，以备后面内容之需.

**例** 5 数论函数 $y=[x]=n$，其中 $n$ 为整数，且 $n\leqslant x\leqslant n+1$.

此函数的取值是将自变量 $x$ 视为一个整数与一个 $[0,1)$ 上的实数之和，取 $x$ 的整数部分为函数值，即 $[x]$ 为不超过 $x$ 的最大整数. 如 $[2]=2$，$[1.5]=1$，$[0]=0$，$[-1.5]=-2$ 等等.

## §1.2 数列的极限

数列，这是在中学的数学课里就已学习过的知识，我们就在此基础上来建立起关于数列极

限的概念.

我们业已知道,无穷多个按一定顺序排好的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

就是所谓数列. 数列可以用它的一般项 $x_n$ 作代表,简记为 $\{x_n\}$.

**例 1** 自然数列 $\{n\}$:

$$1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots,$$

数列 $\{2n\}$:

$$2, 4, 6, 8, \cdots, 2n, \cdots,$$

$-1$ 的 $n$ 次幂数列 $\{(-1)^n\}$:

$$-1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots.$$

在几何上,可把数列 $\{x_n\}$ 视为数轴上的一个动点,它依次取到数轴上的 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 诸点,如图 1-1. 换言之,数列中一数,即数轴上一点;而整个数列,即数轴上的一个点列. 这就是数列的几何意义.

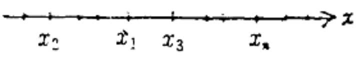

图 1-1

对于数列,在初等数学里主要研究的是其前 $n$ 个项之和;而在高等数学中所要研究的则是当数列的项数 $n$ 趋向无穷大时,数列的变化趋势.

**例 2** 考察数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots,$$

容易看出,当 $n$ 无限增大时,$\frac{1}{n}$ 就无限减小,并充分接近于零. 对此我们可以这样说:当 $n$ 趋向无穷大时,数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 的极限是零.

**例 3** 考察数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots,$$

显然各项分数的分子总比分母小 1,于是当 $n$ 无限增大时,$\frac{n}{n+1}$ 充分接近于 1. 就是说当 $n$ 趋向无穷大时,数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 的极限是 1.

现在提出这样一个问题:是否一个数列总有极限呢?

回答显然是否定的. 这种反例不胜枚举.

**例 4** 考察数列 $\{(-1)\}^{n-1}$:

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots,$$

其中的奇数项为 $x_1 = x_3 = x_5 = \cdots = 1$,而偶数项为 $x_2 = x_4 = x_6 = \cdots = -1$. 可见这是个摆动数列,随着项数 $n$ 的增大,总是 $1, -1$ 地来回摆动. 由于当 $n$ 趋向无穷大时,$(-1)^{n-1}$ 并不是充分地接近某个定值,可知此数列无极限.

**例 5** 考察数列 $\{2n-1\}$:

$$1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, \cdots,$$

这是一个奇数列,显然当 $n$ 无限增大时,$2n-1$ 也随之无限增大. 即当 $n$ 趋向无穷大时,$2n-1$

不会接近某个定值，故此数列不存在极限.

从以上各例可以产生这样的认识：对一数列$\{x_n\}$，如果在 $n$ 无限增大时，$x_n$ 能充分接近一常数 $a$，那末 $a$ 就是数列$\{x_n\}$当 $n$ 趋向无穷大时的极限；否则，$\{x_n\}$不存在极限.

但这不过是一个朴素的极限概念，其中的"无限增大"、"充分接近"等都只是些形象化的描述语言，远非一个数学定义. 因为到底什么是"无限增大"，怎样才算是"充分接近"，并不清楚. 比如"$x_n$ 充分接近某常数 $a$"应如何刻划呢？自然可用$|x_n-a|$来表示 $x_n$ 与 $a$ 接近的程度，即$|x_n-a|$很小就是 $x_n$ 与 $a$ 很接近. 但$|x_n-a|$究竟小到什么程度才能算是"充分"接近呢？小到 0.0001 算不算？如果算，那末 0.000001 比 0.0001 更小，仅是 0.0001 的百分之一，岂不更接近了吗？事实上，即便是$|x_n-a|<10^{-10}$也不能算是 $x_n$ 与 $a$ 充分接近. 只要$|x_n-a|$是小于一个固定的正数，$x_n$ 与 $a$ 之间就还会有一段距离，而算不上是充分接近. 只有当$|x_n-a|$小于任何给定的正数时，才能说是充分接近.

**例 6** 考察数列

$$0.9,\quad 0.99,\quad 0.999,\quad 0.9999,\cdots,$$

各项与 1 的差的绝对值分别是：

$$\begin{aligned}|x_1-1|&=|0.9-1|=0.1,\\|x_2-1|&=|0.99-1|=0.01,\\|x_3-1|&=|0.999-1|=0.001,\\|x_4-1|&=|0.9999-1|=0.0001,\\&\cdots\end{aligned}$$

由此可见：

第一项后的各项与 1 之差的绝对值都小于 0.1，第二项后的各项与 1 之差的绝对值都小于 0.01，第三项后的各项与 1 之差的绝对值都小于 0.001，第四项后的各项与 1 之差的绝对值都小于 0.0001，…

这样，无论预先给定怎样小的正数 $\varepsilon$，在此数列中总可以找到这样的一项——在它以后的各项与 1 之差的绝对值都小于 $\varepsilon$. 如果选取 $\varepsilon=0.000001$，则由$|x_6-1|<\varepsilon$ 知第六项 $x_6$ 后的各项 $x_7,x_8,x_9,\cdots$与 1 之差的绝对值都小于 $\varepsilon$.

现在我们可以给出数列极限的定义了.

**定义 1.3** 一个数列$\{x_n\}$，若对任意给定的正数 $\varepsilon$，总存在一个正整数 $N$，使得当 $n>N$ 时，就有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称当 $n$ 趋于无穷大时，数列$\{x_n\}$的极限为 $a$，记作

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=a,$$

或

$$x_n\to a\quad(n\to+\infty).$$

有时，我们也把数列$\{x_n\}$的极限为 $a$ 称为 $x_n$ 趋于 $a$ 或$\{x_n\}$收敛到 $a$；而当$\{x_n\}$不存在极限，即 $x_n$ 不趋于某常数时，我们又称数列$\{x_n\}$发散.

我们已经用数学的语言毫不含糊地给出了数列极限的确切定义. 为了进一步加深对数列极限这个概念的理解，让我们再看下面的例子.

**例 7** 设有数列

$$2+1,2+\frac{1}{2},2+\frac{1}{3},\cdots,2+\frac{1}{n},\cdots,$$

(1) 写出各项与 2 之差的绝对值;

(2) 第几项后面的所有各项与 2 的差的绝对值都小于 0.1,0.0001,0.00003?

(3) 第几项后面的所有各项与 2 的差的绝对值都小于任何预先指定的正数 $\varepsilon$?

(4) 2 是不是这个数列的极限?

**解** (1) $\left\{2+\frac{1}{n}\right\}$中各项与 2 之差的绝对值依次为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$

(2) 要使$\left|\left(2+\frac{1}{n}\right)-2\right|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}<0.1$,只需要 $n>10$,则第 10 项后各项与 2 之差的绝对值都小于 0.1.

要使$\frac{1}{n}<0.0001$,只要 $n>10000$,则第 10000 项 $x_{10000}$后各项与 2 之差的绝对值都小于 0.0001.

要使$\frac{1}{n}<0.00003$,只要 $n>\frac{1}{0.00003}=33333\frac{1}{3}$,则第 33333 项 $x_{33333}$后各项与 2 之差的绝对值都小于 0.00003.

(3) 要使$\frac{1}{n}<\varepsilon$,只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$即可. 于是取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$,则第$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 项 $x_{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1}$后各项与 2 之差的绝对值都小于 $\varepsilon$(这里的$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,详见第一章 § 1.1 中讲过的数论函数).

(4) 由以上(3)的分析,据极限的定义,可知 2 是数列$\left\{2+\frac{1}{n}\right\}$的极限,即

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2.$$

**例** 8 求数列 $-5,-5,-5,\cdots$的极限.

**解** 因为 $x_n=-5,n=1,2,3,\cdots$, 所以 $|x_n-(-5)|=|-5-(-5)|=0$.

于是对任给的 $\varepsilon>0$ 和任何自然数 $n$,都有$|x_n-(-5)|<\varepsilon$,据定义得数列极限为$-5$. 由此例推而广之,可知任一常数列的极限就是该常数.

现在从几何上来解释一下 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ 的意义. 为此,先将定义中的不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

改写成

$$-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon,$$

即

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon.$$

我们知道,这三个不等式是等价的. 最后一个不等式表明,如果把数列$\{x_n\}$中各项及作为其极限的常数 $a$ 都用它们在数轴上所对应的点表示出来,我们就会看到:当序号 $n$ 超过定义中的自然数 $N$ 以后,所有的点 $x_n$ 就都进入开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$即 $a$ 点的 $\varepsilon$ 邻域内. 换句话说,就是当 $n>N$ 时,数轴上的点列$\{x_n\}$中有无限多个点都进入$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$这个长仅为 $2\varepsilon$ 的开区间内,而只有有限个(顶多有 $N$ 个)点在区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$之外. 如图 1-2 所示.

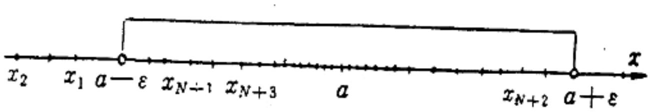


图 1-2

为了把数列极限的定义写得简单些,我们引进两个符号:用符号∀ 表示“任给”,用符号∃

表示"存在". 这样就能将数列极限的定义简写为：

如果$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N$,使得当$n>N$时,就有$|x_n-a|<\varepsilon$,则称数列$\{x_n\}$的极限为$a$.

数列极限的这种定义也称为所谓"$\varepsilon$-$N$"定义. 对此有三点需要再加以说明.

第一,定义中的正数$\varepsilon$既是任意的,又是给定的. 规定$\varepsilon$是任意的,因为只有这样才能保证$|x_n-a|$充分的小. 一个符合定义的数列$\{x_n\}$,不论我们预先给出一个多么小的正数,由$\varepsilon$的任意性,总能够比所给出的数还小. 于是就会在某项之后保证$|x_n-a|$小于预先所给的数,这样才可以说$x_n$与$a$充分接近;说$\varepsilon$又是给定的,是指$\varepsilon$一旦给出,在$\varepsilon$任意变化过程里的这一瞬间,给出的$\varepsilon$又是相对固定的. 这样才能根据它去找$N$.

第二,定义中的自然数$N$是根据给定的正数$\varepsilon$找出的,它与$\varepsilon$有关.

第三,定义中的$N$不唯一. 事实上,若存在符合定义要求的$N_1$,另有$N_2>N_1$,显然当$n>N_2$时同样会有$|x_n-a|<\varepsilon$. 因此只要找出一个符合定义要求的$N$,就证明了极限的存在.

下面通过一个例子来看看如何根据定义证明数列的极限.

**例** 9　试证当$n$趋向无穷大时,数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的极限为零.

**证明**　$\forall\ \varepsilon>0$,要使$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$,即要

$$\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

就要

$$n>\frac{1}{\varepsilon},$$

所以只要取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当$n>N$时,就有

$$n>\frac{1}{\varepsilon},$$

也就有

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

据极限定义,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

这里所用的方法是证明极限的基本方法. 用定义证明$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$,就是要证明对任给的正数$\varepsilon$,可以求得定义中提到的数列项的序号$N$,使得当$n>N$时,不等式$|x_n-a|<\varepsilon$能成立. 因此寻找这样的$N$就成了问题的中心. 找$N$的方法应由不等式$|x_n-a|<\varepsilon$入手,从中解出$n$大于某数,就取该数的整数部分加1作为$N$,这样当$n>N$时就必定有$|x_n-a|<\varepsilon$. 可见找$N$是关键,而一旦$N$找到了,问题也就证完了.

## §1.3　函数的极限

本节要讲的是函数的极限,但实际上我们在上一节中讨论数列极限时就已经接触到了函数的极限. 这是因为数列也可以看成是自变量取正整数$n$的函数:$x_n=f(n)$,所以数列的极限也是函数极限的一种类型. 这种类型就是当自变量$n$取正整数而无限增大($n\to+\infty$)时,函数$x_n=f(n)$的极限.

现在讲函数极限的其它一些类型,主要是研究这样两种情况:一是自变量$x$的绝对值$|x|$无限增大即趋向无穷大时,对应的函数值$f(x)$的变化情形;一是自变量$x$任意地接近常数$x_0$

即趋向有限值 $x_0$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形. 在这两种情形中，自变量 $x$ 都是在数轴上连续取值的，可正也可负，可取有理数也可取无理数，而不再象数列那样限定自变量只能取自然数，呈离散状态.

**1. 自变量趋向无穷时函数的极限**

**例 1** 考察函数 $y=\dfrac{1}{x}$.

函数的图象见图 1-3. 容易看出当自变量 $x$ 沿着 $x$ 轴的正向或负向趋向无穷远时，作为 $x$ 的倒数函数的 $y$ 就充分接近于零. 零就是函数 $y$ 在自变量 $x$ 的这种变化趋势下的极限.

可见函数的极限和已讲过的数列极限有相似的地方，也是在自变量的某种趋势下，函数值充分接近某常数，此常数就是函数的极限了.

我们先来看 $x$ 趋向正无穷时函数 $f(x)$ 的极限：

首先设函数 $f(x)$ 对无论怎样大的 $x$ 值均有定义，如果在 $x\to+\infty$ 的过程里，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个定值 $A$，我们就把 $A$ 称为 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限. 确切地说，就是：

**定义 1.4** 对于函数 $f(x)$，若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>0$，使得当 $x>X$ 时，就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

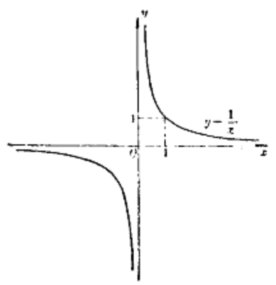


图 1-3

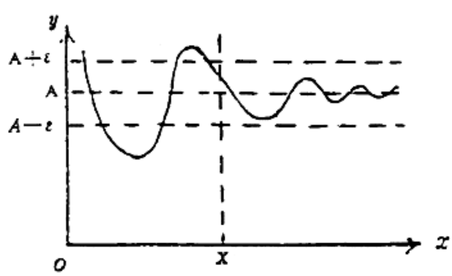


图 1-4

则称函数 $f(x)$ 当 $x$ 趋向正无穷时的极限为 $A$，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,$$

或

$$f(x)\to A\ (x\to+\infty).$$

不难看出，定义中所叙述的这种情况几乎就和数列的极限一样.

在几何上，极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的意义可以这样解释：$\forall\ \varepsilon>0$，作两条直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$，在 $x$ 轴上总存在一点 $X$，在 $X$ 点的右侧函数 $f(x)$ 的图象都被夹在 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$ 两直线之间. 如图 1-4 所示.

既然定义 1.4 和数列极限的定义相仿，可以想见，用定义 1.4 来证明函数极限的方法也和数列极限的证法相仿，所不同的不过是在找定义 1.4 的 $X$ 时不再象找数列中的 $N$ 那样仅限于取正整数了.

**例 2** 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} 10^{-x}=0$.

**证明** $\forall\ \varepsilon>0$，要使 $|10^{-x}-0|=10^{-x}<\varepsilon$，两边同取常用对数，得

$$\lg 10^{-x}<\lg\varepsilon,$$

即
$$-x\lg 10<\lg\varepsilon,$$
亦即
$$-x<\lg\varepsilon,$$
则
$$x>-\lg\varepsilon.$$
于是取 $X=-\lg\varepsilon$，则当 $x>X$ 时，就有
$$|10^{-x}-0|<\varepsilon$$
据定义 1.4
$$\lim_{x\to+\infty}10^{-x}=0.$$

与定义 1.4 类似，我们不难得出当自变量 $x$ 趋向负无穷时函数 $f(x)$ 的极限定义

**定义** 1.5　对函数 $f(x)$，若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X<0$，使得当 $x<X$ 时，就有
$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$
就称当 $x$ 趋向负无穷时，$f(x)$ 的极限为 $A$，记作
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A,$$
或 $f(x)\to A\quad(x\to-\infty)$.

图 1-5 表明 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的几何意义：对 $\forall\ \varepsilon>0$，在 $x$ 轴上总存在一点 $X<0$，当 $x<X$ 时，$f(x)$ 的图象不会超出两条直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$ 之间.

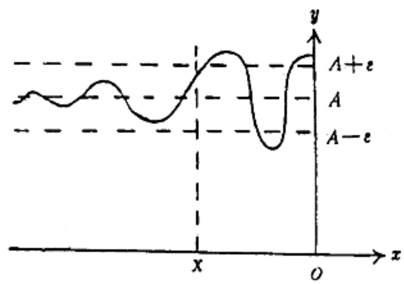

图 1-5

**例** 3　试证
$$\lim_{x\to-\infty}10^{x}=0.$$

**证明**　$\forall\ \varepsilon>0$，要使 $|10^x-0|=10^x<\varepsilon$，两边同时取常用对数，得
$$\lg 10^x<\lg\varepsilon,$$
即
$$x\lg 10<\lg\varepsilon,$$
亦即
$$x<\lg\varepsilon.$$
于是取 $X=\lg\varepsilon$，则当 $x<X$ 时，就有
$$|10^x-0|<\varepsilon.$$
据定义 1.5
$$\lim_{x\to-\infty}10^x=0,$$

最后还有一种自变量趋于无穷的情况，就是 $x$ 取值可正、可负，而其绝对值趋向无穷的情形，其定义如下.

**定义** 1.6　对于函数 $f(x)$，若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>0$，使得当 $|x|>X$，就有
$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$
则称当 $x$ 趋向无穷时函数 $f(x)$ 的极限为 $A$，记作
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,$$
或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

在几何上，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的意义是：$\forall\ \varepsilon>0$，在 $x$ 轴总存在一正数 $X$，使得当 $x>X$ 或 $x<-X$ 时，$f(x)$ 的图象总位于两直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$ 之间，如图 1-6 所示.

**例** 4　求证$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

**证明**　$\forall\,\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{1}{x}-0\right|=\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$,只须

$$|x|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

于是取$X=\dfrac{1}{\varepsilon}$,则当$|x|>X$时，就有

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

据定义 2.4，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

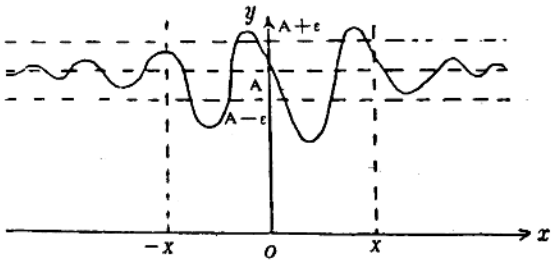

图 1-6

此例的几何意义见例 1 及图 1-3，这里$\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,我们就将直线$y=0$即$x$轴称为函数$y=\dfrac{1}{x}$的水平渐近线.

一般地，如果$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=C$,则直线$y=C$就是函数$y=f(x)$的水平渐近线.

**2. 自变量趋向有限值时函数的极限**

在本节一开始，我们曾提到有关函数极限的两种情形. 我们已经讲了其中自变量趋向无穷时函数极限的情形，现在再来看自变量趋向有限值的函数极限情形. 这也是最重要的一种情形，而且还与前几种情形区别较大.

先看一个简单的例子.

**例** 5　考察函数$y=x^2$.

函数的图象图 1-7. 当自变量$x$趋向 1 时函数的变化趋势，无论从$y=x^2$的数量上还是图象上都容易看出，函数值同样也趋向 1，1 也就是函数$y$在$x$的这种趋向定值 1 的变化趋势下的极限.

现在考虑当$x$趋向有限值$x_0$时函数$f(x)$的极限情况：首先设函数$f(x)$在定点$x_0$附近有定义，如果在自变量$x$充分地接近有限值$x_0$的过程中，对应的函数值$f(x)$无限地接近于一个定值$A$,我们就把这个$A$称之为$f(x)$当$x\to x_0$时的极限. 当然，这样描述极限还只是粗浅的、不确切的.

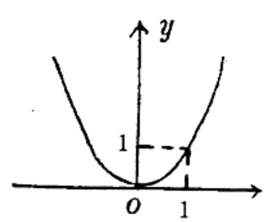

图 1-7

为得出精确的定义，还需要进一步分析. 上述极限情况，简言之，就是一句话："当$x$充分接近$x_0$时，$f(x)$就充分接近$A$."这里，后半句"$f(x)$充分接近$A$"意即$|f(x)-A|$能任意地小. 这和前几种极限的情形都是相同的，同样能用$\forall\,\varepsilon>0$，$|f(x)-A|<\varepsilon$来表示. 而前半句"当$x$充分接近$x_0$时"就和前几种情形不同了，$x$不再是趋向无限值而是趋向有限值了. 要表示$x$与定值$x_0$充分接近，自然是用$|x-x_0|$小于某数来表示. 这里必须强调的是这个数显然和$\varepsilon$有关，因为$|f(x)-A|<\varepsilon$这件事并非在任意时候都能成立，而是仅在$|x-x_0|$比这个数小时才成立. 通常是$\varepsilon$越小，这个数就越小，它是由$\varepsilon$来确定出的.