

初中数学

龙门 专题

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 + x + 3y - 1 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$y = 2x - 1$$

$$15x^2 - 23x + 8 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{8}{15} \\ y_2 = \frac{1}{15} \end{cases}$$

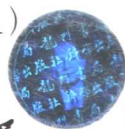
一元二次方程

南秀全
主编

(修订版)



龍門書局



龙门题

龙门题

一元二次方程

作者：[美] 詹姆斯·H. 史密斯
译者：[中] 王明

出版：[中] 人民教育出版社

1997年12月第1版
1997年12月第1次印刷

ISBN 7-107-01000-0



一元二次方程

(修订版)

主 编 南秀全

本册主编 祝友明

余 梦



龍門書局

版权所有 翻印必究

本书封面贴有科学出版社、龙门书局激光防伪标志，
凡无此标志者均为非法出版物。

举报电话：(010)64033640 13501151303 (打假办)

邮购电话：(010)64000246



(修订版)

一元二次方程

南秀全 主编

责任编辑 王 敏 乌 云

龙门书局 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

北京人卫印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2002年3月修 订 版 开本：890×1240 A5

2002年3月第三次印刷 印张：9

印数：50 001 - 70 000 字数：333 000

ISBN 7-80160-128-9/G·164

定 价：10.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

参考书几乎是每一位学生在学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用,使学生阅读后,能更透彻、迅速地明晰重点、难点,在掌握基本的解题思路和方法的基础上,举一反三、触类旁通,这是编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学、生物四个学科共计 55 种,其中初中数学 12 种,高中数学 12 种,初中物理 5 种,高中物理 7 种,初中化学 4 种,高中化学 10 种,高中生物 5 种。

本套书在栏目设置上,主要体现了循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——“基础篇”和“综合应用篇”(高中为“3+X”综合应用篇)。“基础篇”中的每节又分为“知识点精析与应用”、“视野拓展”两个栏目。其中“知识点精析与应用”着眼于把基础知识讲透、讲细,帮助学生捋清知识脉络,牢固掌握知识点,为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。“视野拓展”则是在牢固掌握基础知识的前提下,为使学生成绩“更上一层楼”而准备的。需要强调的是,这部分虽然名为“拓展”,但仍然立足于教材本身,主要针对教材中因受篇幅所限言之不详,但却是高(中)考必考内容的知识点(这类知识点,虽然不一定都很难,但却一直是学生在考试中最易丢分的内容),另外还包括了一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高(中)考形势,综合题与应用题越来越多,试行“3+X”高考模式以后,这一趋势更加明显。“综合应用篇”正是为顺应这种形势而设,旨在提高学生的综合能力与应用能力,使学生面对纷繁多样的试题,能够随机应变,胸有成竹。

古人云:授人以鱼,只供一饭之需;授人以渔,则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局最新推出的《龙门专题》,有以下几个特点:

1. 以“专”为先 本套书共计 55 种,你尽可以根据自己的需要从

中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释,读过一本后,可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2. 讲解细致完备 由于本套书是就某一专题进行集中、全面的剖析,对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识,能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小,更易于理解和记忆。

3. 省时增效 由于“专题”内容集中,每一本书字数相对较少,学生可以有针对性地选择,以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

4. 局限性小 与教材“同步”与“不同步”相结合。“同步”是指教材中涉及的知识点本套书都涉及,并分别自成一册;“不同步”是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排,而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题,即“点、线、面、体”和“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系,从而自然地连点成线,从“专题”中体味“万变不离其宗”的含义,以减小其随教材变动的局限性。

5. 主次分明 每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例,使学生能够根据自己的情况,权衡轻重,提高效率。

本套书的另一特点是充分体现“减负”的精神。“减负”的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才,它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言,只有提高教学质量,提高效率,才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出,讲、练到位,对于提高学生对某一专题学习的相对效率,大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖,编写难度很大,又受作者水平所限,书中难免有疏漏之处,敬请不吝指正。

编者

2001年11月1日

编委会

(初中数学)

(修订版)

执行编委

王敏

余石

南山

余曙光

黄振国

编委

肖九河

付东峰

主编

南秀全

总策划

龙门书局



目 录

第一篇 基础篇	(1)
第一章 一元二次方程	(2)
1.1 一元二次方程	(2)
1.2 一元二次方程的解法——直接开平方法	(10)
1.3 一元二次方程的解法——配方法	(15)
1.4 一元二次方程的解法——公式法	(22)
1.5 一元二次方程的解法——因式分解法	(29)
1.6 一元二次方程的根的判别式	(44)
1.7 一元二次方程的根与系数的关系	(66)
1.8 二次三项式的因式分解	(85)
1.9 一元二次方程的应用问题	(98)
第二章 可化为一元二次方程的方程或方程组	(119)
2.1 分式方程	(119)
2.2 列分式方程解应用问题	(142)
2.3 无理方程	(159)
2.4 由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的 方程组	(179)
2.5 由一个二元二次方程和一个可以分解为两个二元一次 方程的方程组成的方程组	(201)

第二篇 综合应用篇 (221)

方程与根的判别式、根与系数的关系有关的问题 (221)

方程与直线形 (235)

方程与圆 (245)

方程与三角函数 (262)

方程与生产、生活及市场经济有关的应用问题 (271)

第一篇 基础篇

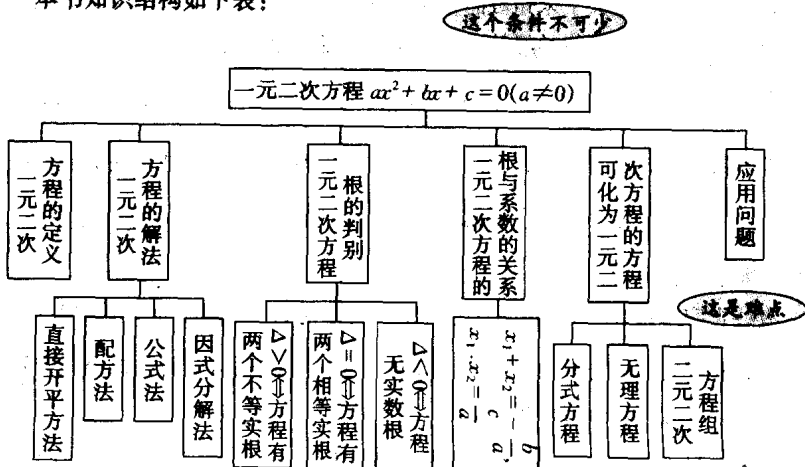
一元二次方程是中学数学的主要内容之一,在初中代数中占有重要的地位,本书知识的学习,在全部代数知识的学习中起着承上启下的作用.它既是对已学过的知识(实数、整式、分式、根式和一元一次方程)的巩固和加深,又是为今后学习指数、对数、三角方程、不等式、函数等内容奠定基础.

本书各章节主要知识在全国各地的中考试卷中所占分数比例大约如下表:

内 容	与一元二次方程解法有关的问题	一元二次方程根的判别式及根与系数的关系	分式方程和无理方程	应用问题
所占分数百分比	1%~1.5%	3.5%~8%	2%~8%	3%~11%

一元二次方程知识,主要是一元二次方程的解法.在求解过程中,我们发现有的方程有解,而有的方程无解,于是引入了一元二次方程根的判别式和根与系数的关系.能列方程解应用题.对于一些特殊的方程和方程组,可以转化为一元二次方程求解,如分式方程、无理方程、二元二次方程组等.本书的重点是一元二次方程的解法,由于一元二次方程与一元一次方程形式上发生了改变,因此,本书以讨论一元二次方程的解法为核心,从简单到复杂,从一般到特殊.本书的难点是:配方法;列方程解应用题;分式方程和无理方程的增根及验根问题.学好本书的关键是熟练掌握一元二次方程的解法,特别是公式法.

本书知识结构如下表:





第一章 一元二次方程

1.1 一元二次方程



知识梳理

本节的重点是整式方程和一元二次方程的定义、一般形式,难点是对一元二次方程的一般形式的正确理解及其各项系数的确定.

本节的学习要求是了解整式方程和一元二次方程的概念,知道一元二次方程的一般形式,会把一元二次方程化成一般形式.

知识点精析与应用

【知识点精析】

1. 整式方程的概念

方程的两边都是关于未知数的整式,这样的方程叫做整式方程.如我们已学过的一元一次方程和即将学习的一元二次方程都是整式方程.

例如, $x^2 + 3x - \frac{1}{7} = 0$, $3x - 8y = 4$, $x^2 - \sqrt{2} = 0$, $3x + \frac{1}{\sqrt{7}} = 0$, 方程两边都是关于未知数的整式(注意 $-\frac{1}{7}$, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{7}}$ 也是整式), 所以它们都是整式方程. 而 $\frac{1}{x} = 3$, $\sqrt{2x^2 - 1} + x = 6$, $\frac{x}{x-1} = 3$, 因方程中 $\frac{1}{x}$, $\sqrt{2x^2 - 1}$, $\frac{x}{x-1}$ 均不是整式, 所以它们都不是整式方程.

有些含字母系数的方程, 尽管分母中含有字母, 但只要分母中不含未知数, 这样的方程仍是整式方程. 如 $3x^2 + \frac{b}{a}x + c = 0 (a \neq 0)$ 就是关于 x 的整式方程.

2. 一元二次方程的定义

定义 只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一

元二次方程. 因此, 由一元二次方程的定义可知, 只有同时满足三个条件: (1) 是整式方程; (2) 含有一个未知数; (3) 未知数的最高次数是 2, 这样的方程才是一元二次方程, 否则, 不满足其中任何一个条件的方程都不是一元二次方程.

例如, 方程 $3x^2 + 4x - 7 = 0$ 、 $\frac{y}{\sqrt{5}} - y^2 = 0$ 、 $-\frac{7}{3}y^2 = 0$ 、 $\frac{1}{\sqrt{5}+1}x^2 - 1 = 0$ 都是一元二次方程. 而方程 $y^4 - 2y^2 - 3 = 0$ 、 $y^3 - 4y^2 = 0$ 、 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 = 0$ 、 $(x^2 + 1)^2 - x - 2 = 0$ 、 $\sqrt{x^2 - 4x} + 7 - 3x = 0$ 都不是一元二次方程.

3. 一元二次方程的一般形式

一元二次方程的一般形式是 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ①, 它的特征是: 等式左边是一个关于未知数的二次三项式, 右边是零. 其中 ax^2 叫做二次项, a 叫做二次项系数; bx 叫做一次项, b 叫做一次项系数; c 叫做常数项.

在任何一个一元二次方程中, 二次项是必不可少的项, 因此方程①中加有 $a \neq 0$ 的条件.

一定要注意这一点

4. 不完全的一元二次方程

我们把缺一次项或常数项的一元二次方程称为不完全的一元二次方程. 一元二次方程可分类如下:

$$\text{一元二次方程 } \left\{ \begin{array}{l} \text{完全的一元二次方程 } \left\{ \begin{array}{l} ax^2 + bx + c = 0 (b \neq 0, c \neq 0) \\ \text{不完全的一元二次方程 } \left\{ \begin{array}{l} ax^2 + c = 0 (\text{缺一次项}, b = 0, c \neq 0) \\ ax^2 + bx = 0 (\text{缺常数项}, b \neq 0, c = 0) \\ ax^2 = 0 (\text{缺一次项和常数项}, b = 0, c = 0) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \\ ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$

5. 把一元二次方程化成一般形式

任何一个一元二次方程经过整理(去括号、移项、合并同类项)都可以化成一般形式. 需要特别指出的是在确定二次项系数、一次项系数和常数项时, 必须把一元二次方程化成一般形式, 这是因为二次项系数、一次项系数和常数项都是在方程为一般形式的前提下定义的. 另外还应注意各项系数和常数项除了数值外, 还必须带符号. 例如, $3x^2 - 7x - 4 = 0$ 中, $a = 3, b = -7, c = -4$.

【解题方法指导】

【例 1】判断下列关于 x 的方程是不是一元二次方程:

$$(1) \frac{2}{x^2+5} = 3; (2) x^2 - 5x = 0; (3) x^2 - 2xy - 3 = 0; (4) \sqrt{x} + x = 5; (5) 2x(x - 3) = 2x^2 + 1; (6) \frac{1}{x} + 3x = x - 3; (7) \frac{1}{x^2+1} = 2x; (8) abx^2 + (a+b)x + 1 = 0;$$

$$(9) x^2 - 3\sqrt{3}x + 4 = 0; (10) px^2 + qx + m = 0 (p \neq 0).$$

分析 一元二次方程必须具备下列三个条件:(1)是整式方程;(2)只含有一个未知数;(3)未知数的最高次数是2.用上述三条标准去判断是否是一元二次方程.

解 方程(1)、(6)、(7)的左边是分式,不属于整式方程,故不是一元二次方程.

方程(3)含有两个未知数,不是一元二次方程.

方程(4)的左边不是整式,它不是一元二次方程.方程(5)经整理后,得 $-6x = 1$,不是一元二次方程.方程(8)中,未明确 $ab \neq 0$,它不是一元二次方程.

因此,只有方程(2)、(9)、(10)是一元二次方程.

说明 判定是否是一元二次方程,关键要将题目中各方程化为一般形式,然后再根据一元二次方程的定义进行判别.

【例2】 关于 x 的方程:

$$(1)(2m-1)x^2 - (m-1)x = 5m; (2)(m^2+1)x^2 + mx - 3 = 0.$$

若都是一元二次方程,分别求出 m 的取值范围.

分析 这是考查一元二次方程的一般形式附加条件的问题,只要二次项系数不为0就行了.

解 (1)由 $2m-1 \neq 0$, 得 $m \neq \frac{1}{2}$.

二次项系数不等于零

(2) $\because m^2 \geq 0, \therefore m^2 + 1 > 0$. 即 $m^2 + 1 \neq 0. \therefore m$ 可以为一切实数.

【例3】 将下列关于 x 的一元二次方程化成一般形式,再写出它的二次项系数、一次项系数及常数项.

$$(1) 2x(x-1) = 3(x+5) - 4;$$

$$(2) (ax-b)^2 - (a-bx)^2 = a^2 + b^2 (a \neq b, ab \neq 0).$$

分析 一元二次方程的一般形式是等号左边是关于未知数的降幂排列,右边为零.根据题设,方程(2)中的 a, b 均为常数.

解 (1)去括号,得 $2x^2 - 2x = 3x + 15 - 4$.

移项,合并同类项,得方程的一般形式:

$$2x^2 - 5x - 11 = 0.$$

不要漏掉了各项系数的符号

$\therefore$ 二次项系数是2,一次项系数是-5,常数项是-11.

$$(2) \text{去括号,得 } a^2x^2 - 2abx + b^2 - a^2 + 2abx - b^2x^2 = a^2 + b^2.$$

移项,合并同类项,得方程的一般形式:

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2a^2 = 0.$$

若缺哪一项则说明该项的系数为0

$\therefore$ 二次项系数是 $a^2 - b^2$,一次项系数是0,常数项是 $-2a^2$.

说明 一元二次方程中各项的系数均是相对于一元二次方程的一般形式而言的.要确定方程的各项系数应先将方程化为一般形式.在指出方程中的各项系

数时一定要注意符号. 如方程(1)中的一次项的系数是 -5 , 切不可认为是 5 .

【达标跟踪训练】

一、选择题

- 下列方程是一元二次方程的是 ()
 - $x^2 + 2x - y = 3$
 - $\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{3}$
 - $(3x^2 - 1)^2 - 3 = 0$
 - $\sqrt{5}x^2 - 8 = \sqrt{3}x$
 - 一元二次方程的一般形式是 ()
 - $x^2 + bx + c = 0$
 - $ax^2 + bx + c = 0$
 - $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$
 - 以上答案都不对
 - 下列方程中, 是未知数 x 的整式方程是 ()
 - $\frac{1}{x} = x$
 - $\sqrt{x-1} = 1$
 - $\frac{1}{\sqrt{x-1}} = 2$
 - $x^2 - 4x = 0$
 - 方程 $5x^2 = 6x - 8$ 化为一元二次方程一般形式后, 二次项系数、一次项系数、常数项分别为 ()
 - $5, 6, -8$
 - $5, -6, -8$
 - $5, -6, 8$
 - $6, 5, -8$
 - $ax^2 + bx + c = 0$ 是一元二次方程的条件是 ()
 - a, b, c 为任意实数
 - a 与 b 不同时为零
 - a 取不为零的实数
 - b 与 c 不同时为零
 - 一元二次方程 $-5x^2 + 16x + 3 = 0$, 把二次项系数变为正数, 且使方程的根不变的是 ()
 - $5x^2 + 16x + 3 = 0$
 - $5x^2 - 16x - 3 = 0$
 - $5x^2 + 16x - 3 = 0$
 - $5x^2 - 16x + 3 = 0$
 - 方程 $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) + (2x + 1)^2 = x - 2$ 的常数项是 ()
 - 5
 - 3
 - -3
 - 0
- #### 二、填空题
- 一元二次方程的一般形式是_____.
 - 方程 $3x^2 + 8 = 0$ 的一次项系数是_____.
 - 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - a(3x - 2a + b) - b^2 = 0$ 中, 常数项是_____.
 - 若方程 $kx^2 + x = 3x^2 + 1$ 是一元二次方程, 则 k 的取值范围是_____.
 - 当 m _____时, 方程 $(m - 1)x^2 - (2m - 1)x + m = 0$ 是关于 x 的一元一次方程; 当 m _____时, 上述方程才是关于 x 的一元二次方程.
 - 方程 $4x^2 = 0$ 是_____元_____次方程, 二次项系数是_____, 一次项系数是_____, 常数项是_____.

14. 已知方程 $(2m-1)x^2 + (m+1)x - 1 = 0$, 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 这个方程是 _____ 元 _____ 次方程; 当 $m = 1$ 时, 原方程是 _____ 元 _____ 次方程, 这时二次项系数是 _____, 一次项系数是 _____.

三、解答题

15. 判断下列方程是否为一元二次方程:

(1) $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$; (2) $-\sqrt{3}x^2 = 0$; (3) $(2x-1)^2 = (x-1)(4x+3)$; (4) $(3-x)^2 = -1$; (5) $ax^2 + bx + c = 0$.

16. 把方程 $(x+3)(x-1) = x(1-x)$ 整理成一般形式, 再算出 $b^2 - 4ac$ 及 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 的值.

17. 当 a 为何值时, 方程 $ax^2 + bx = 5x^2 - 4$ 是关于 x 的一元二次方程?

【答案与提示】

不能忽视了这一条件

1. D 2. C 3. D 4. C 5. C 6. B 7. D
8. $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 9. 0 10. $2a^2 - ab - b^2$ 11. $k \neq 3$ 12. $1, \neq 1$ 13. 一, 二, 4, 0, 0 14. 一, 一, 一, 二, 1, 2 15. (1)、(3)、(5) 不是, (2)、(4) 是一元二次方程 16. 一般形式为 $2x^2 + x - 3 = 0$, 其中 $a = 2, b = 1, c = -3, b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 1 + 24 = 25, \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm 5}{2 \times 2} = \frac{-1 \pm 5}{4} = 1$ 或 $-\frac{3}{2}$ 17. 当 $a \neq 5$ 时, 原方程为一元二次方程.

视野拓展

【释疑解难】

1. $a \neq 0$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的重要组成部分

因为方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 只有当 $a \neq 0$ 时才叫做一元二次方程. 当 $a = 0, b \neq 0$ 时, 它是一元一次方程. 如果题设已明确指出方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 是一元二次方程, 那么 a 必定不等于零, 这时, $a \neq 0$ 的条件就被隐含在题设中.

2. 判断是否是一元二次方程, 还应注意不能看表面现象. 例如, $3x^2 - 2xy + 2x + 2xy + \frac{1}{3} = 0$, 不仔细看一定认为它是二元的, 但经过合并同类项后为 $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$, 所以它实质上是一元二次方程. 又如, 方程 $(x+3)^2 = -2 + x^2$, 表面上看像一元二次方程, 但我们不能被表面迷惑, 因原方程整理后得 $6x + 11 = 0$, 显然不是一元二次方程. 因此, 判定一个方程是否是一元二次方程, 常常要在合并同类项进行整理之后, 看是否满足三个条件才能确定.

3. 如果条件是用“关于 x 的一元二次方程”这样的语句表述的, 那么它就隐含了二次项系数不为零的条件. 如“关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 3(x-1) = 2x^2 + x$ ”, 这时题目中隐含了 $a \neq 2$ 的条件. **这一点容易忽视, 一定要引起重视**

4. 方程中含有字母系数的 x^2 项, 且出现“关于 x 的方程”这样的语句, 就要对方程中的字母系数进行讨论. 如“关于 x 的方程 $(a-1)x^2 -$ **这一条很重要, 要掌握好**

$3(x-1) = 3x^2 - 4$ ”, 这就有两种可能的情形. 当 $a=4$ 时, 它是一元一次方程; 当 $a \neq 4$ 时, 它是一元二次方程, 解题时就会有不同的结果.

5. 对于等式 $b^2 - 2b + a - 3 = 0$, 我们如果说 b 是未知数, 那么它是一个关于 b 的一元二次方程; 如果转换角度, 说 a 是未知数, 则是一个关于 a 的一元一次方程 (则 b 表示常数). 因此, 识别方程是否是一元二次方程, 首先要判别方程左右两边是否是整式; 其次, 判别未知数的系数和次数是否满足条件.

【典型例题导析】

不要只看表面, 要看实质

【例 4】下列方程是关于 x 的一元二次方程的是 ()

A. $ax^2 + bx + c = 0$

B. $kx + 5k + 6 = 0$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}x^3 - \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{1}{2} = 0$

D. $(m^2 + 3)x^2 + \sqrt{3}x - 2 = 0$

分析 所谓“关于 x 的方程”, 就是指方程中只有 x 是未知数, 而其他字母都是字母系数, 可看做是已知数. 根据一元二次方程的定义或一般形式分析如下: A 不一定是一元二次方程, 因为 $a=0$ 时, 它不是一元二次方程, 所以将 A 排除掉; B 中未知数最高次数为 1, B 不是一元二次方程; C 中未知数的最高次数为 3, C 也不是; D 符合一元二次方程的一般形式的特点, 且二次项系数 $m^2 + 3$ 一定不等于零. 所以 D 是一元二次方程.

【例 5】当 m 为何值时, 方程 $(m+1)x^{|4m|-2} + 27mx + 5 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程?

分析 根据一元二次方程的定义求解.

解 由 $|4m| - 2 = 2$, 得 $|4m| = 4$. $\therefore m = \pm 1$.

但当 $m = -1$ 时, $m+1=0$, 应舍去. $\therefore m = 1$.

不仅要考虑指数是 2, 还要考虑二次项系数不等于 0

【例 6】当 m 取何值时, 方程 $(m-3)x^{m^2-m-4} + mx + 10 = 0$ 为一元二次方程?

这一点不要忽略

解 当 $m^2 - m - 4 = 2$ 且 $m-3 \neq 0$ 时, 方程为一元二次方程.

由 $m^2 - m - 4 = 2$, 得 $m^2 - m - 6 = 0$

即 $(m-3)(m+2) = 0$. $\therefore m_1 = 3, m_2 = -2$.

又 $\because m-3 \neq 0$, 即 $m \neq 3$. $\therefore m = -2$.

$\therefore$ 当 $m = -2$ 时原方程为一元二次方程.

【例 7】 判断关于 x 的方程 $x^2 - mx(2x - m + 1) = x$ 是不是一元二次方程. 如果是, 指出其二次项系数, 一次项系数及常数项.

分析 先把方程化为一般形式, 再判断.

解 去括号, 得 $x^2 - 2mx^2 + m^2x - mx = x$.

移项, 合并同类项, 得 $(1-2m)x^2 + (m^2 - m - 1)x = 0$.

当 $1-2m=0$, 即 $m = \frac{1}{2}$ 时, 原方程为 $-\frac{5}{4}x = 0$, 不是一元二次方程;

当 $1-2m \neq 0$, 即 $m \neq \frac{1}{2}$ 时, 原方程是一元二次方程, **注意考虑这两种情形**

其中二次项系数为 $1-2m$, 一次项系数是 $m^2 - m - 1$, 常数项为 0.

说明 审题要特别注意题目的说法, 例如: “已知关于 x 的方程 $(1-2m)x^2 + (m^2 - m - 1)x = 0$ ” 与 “已知关于 x 的二次方程 $(1-2m)x^2 + (m^2 - m - 1)x = 0$ ” 是不同的, 后者已知条件中有隐含条件 $1-2m \neq 0$.

【例 8】 若 $x^{2a+b} - 2x^{a-b} + 3 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程, 求 a, b 的值.

分析 这是比前两例更难, 但类型相同的问题. 我们把两个同学的错解先剖析一下再提供正确解法.

$$\begin{array}{ll} \text{甲解: 由题意} \begin{cases} 2a+b=2, \\ a-b=1, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=1, \\ b=0. \end{cases} & \text{乙解: 由题意} \begin{cases} 2a+b=1, \\ a-b=2; \end{cases} \\ \begin{cases} 2a+b=2, \\ a-b=1; \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=1, \\ b=-1; \end{cases} & \begin{cases} a=1, \\ b=0. \end{cases} \end{array}$$

乙同学考虑得周到些, 但还是不够全面, 因为 x^{2a+b} 和 x^{a-b} 的指数至少一个为 2 就行了, 共有五种情况. **不要遗漏了其中的每一种可能情形**

解 由上分析, 当 $\begin{cases} 2a+b=2, \\ a-b=2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2a+b=2, \\ a-b=1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2a+b=2, \\ a-b=0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2a+b=0, \\ a-b=2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2a+b=1, \\ a-b=2 \end{cases}$ 时, 原方程为 x 的一元二次方程, 因此得:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{4}{3}, \\ b_1 = -\frac{2}{3}; \end{cases} \begin{cases} a_2 = 1, \\ b_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} a_3 = \frac{2}{3}, \\ b_3 = \frac{2}{3}; \end{cases} \begin{cases} a_4 = \frac{2}{3}, \\ b_4 = -\frac{4}{3}; \end{cases} \begin{cases} a_5 = 1, \\ b_5 = -1. \end{cases}$$

【思维拓展训练】

一、选择题

1. 无论 a 为何实数, 以下各方程是关于 x 的一元二次方程的是 ()