高等几何讲义

苏步青编

上海科学技术出版社

高等几何講义

苏步青 編

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是編者多年来讲授高等几何时用的讲义，計分：变换、运动、仿射变换；平面和空間射影几何；射影变换和二次曲綫、二次曲面；变换群和附属的几何学等四章，系統地闡述了高等几何中最基本的內容，可作为高等院校数学专业的高等几何教本.

高 等 几 何 讲 义

苏 步 青 編

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷三厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32　印張 4 10/32　排版字数 103,000

1964 年 4 月第 1 版　1964 年 4 月第 1 次印刷　印数 1—10,000

統一书号 13119·565　定价（十四）0.74 元

y11

緒　言

本讲义是应复旦大学数学系数学、計算数学和力学等专业教学的需要編成的，內容可供一学期每周两小时讲課和一小时习題課之用．全书分四章，第一章除一部分內容外，純系补习性质，对学过解析几何这門基础課的学生来說，应該可以略去不讲或尽量少讲．如果教学时間有多余，希望讲課教师能在第四章內容的基础上多加讲解，可以多举一些实例，也可以放慢进度，使学生学到手，并且以后在各門数学、物理等課程学习中发揮作用．因为，原来編者在教学中限于时数和学生的程度，只能叙述变换群和附属几何的大意，內容不是很細致的，甚至有些还是很粗糙、不易理解的．

高等几何有不同的涵义．有些著者把它編成为几何基础和射影几何，有些著者則单独編成射影几何或綜合几何，也有些編成为射影解析几何．本讲义是采取了最后的这种方式进行編写的．近年来，拓扑学发展得很快，有些国家的数学教材中，称射影几何和拓扑学导論为高等几何．

本讲义在排印出版过程中，得到复旦大学金福临副教授和华宣积助教的修訂和校閱，改正了某些錯誤并提高了一些质量，編者对他們的帮助和指正表示由衷的謝意．上海科学技术出版社也花了很大力量改进本讲义原稿中的記号、公式、附图，使內容达到一定的水平，对此并致感謝．

苏步青　　1964年2月

目　录

第一章　变换、运动、仿射变换

§1.1 坐标变换

在平面上給定一个平行坐标系，設 O 是原点．用 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 分别表示“单位向量” $\overrightarrow{OE_1}$ 和 $\overrightarrow{OE_2}$，从而

$$\boldsymbol{e}_1=\{1,\ 0\},\ \boldsymbol{e}_2=\{0,\ 1\}. \tag{1.1}$$

这时，如果点 P 具有坐标 $(p_1,\ p_2)$，那末

$$\overrightarrow{OP}=\{p_1,\ p_2\}=p_1\{1,\ 0\}+p_2\{0,\ 1\}=p_1\boldsymbol{e}_1+p_2\boldsymbol{e}_2. \tag{1.2}$$

現在考察第二个坐标系(图 1.1)，設其原点 O^* 在旧坐标系下的坐标是 $(a_1,\ a_2)$，新单位向量 $\boldsymbol{e}_1^*=\overrightarrow{O^*E_1^*}$，$\boldsymbol{e}_2^*=\overrightarrow{O^*E_2^*}$ 在旧坐标系下的支量是

$$\boldsymbol{e}_1^*=\{a_{11},\ a_{21}\},\quad \boldsymbol{e}_2^*=\{a_{12},\ a_{22}\}. \tag{1.3}$$

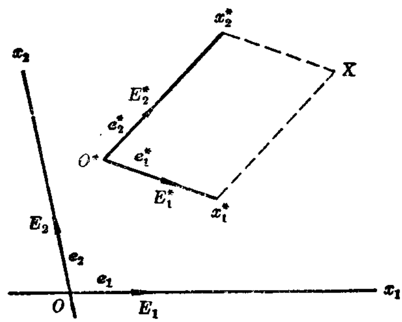

图 1.1

設 X 是平面的任何点，它的新旧坐标 $(x_1^*,\ x_2^*)$ 和 $(x_1,\ x_2)$ 之間究竟有什么关系呢？

从(1.2)得到

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OO^*}+\overrightarrow{O^*X}=\overrightarrow{OO^*}+x_1^*e_1^*+x_2^*e_2^*. \tag{1.4}$$

从而

$$\{x_1, x_2\}=\{a_1, a_2\}+x_1^*\{a_{11}, a_{21}\}+x_2^*\{a_{12}, a_{22}\}. \tag{1.5}$$

因此，我們导出下列方程：

$$\left.\begin{aligned} x_1&=a_{11}x_1^*+a_{12}x_2^*+a_1,\\ x_2&=a_{21}x_1^*+a_{22}x_2^*+a_2. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

所以，从一个平行坐标系到另一个新系的調換是綫性变換.

因为 e_1^*, e_2^* 必須是綫性独立的，所以还成立

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0. \tag{1.7}$$

反过来，如果一点 X 在一个平行坐标系下的坐标是 (x_1, x_2)，而且，对于滿足 (1.7) 的某些系数 a_{ik} 以及 a_i，还成立 (1.6)，那末 (x_1^*, x_2^*) 是同点在一个新平行坐标系下的坐标，其中原点 O^* 落在旧系的点 (a_1, a_2)，并且它的二单位向量决定于(1.3).

同样的方法也可应用到空間去. 这时，設新原点在旧系下的坐标是 (a_1, a_2, a_3)，而且新单位向量是

$$\left.\begin{aligned} e_1^*&=\{a_{11}, a_{21}, a_{31}\},\\ e_2^*&=\{a_{12}, a_{22}, a_{32}\},\\ e_3^*&=\{a_{13}, a_{23}, a_{33}\}, \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

那末

$$\left.\begin{aligned} x_1&=a_{11}x_1^*+a_{12}x_2^*+a_{13}x_3^*+a_1,\\ x_2&=a_{21}x_1^*+a_{22}x_2^*+a_{23}x_3^*+a_2,\\ x_3&=a_{31}x_1^*+a_{32}x_2^*+a_{33}x_3^*+a_3, \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

式中

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0. \tag{1.10}$$

并且，反过来，具有附带条件(1.10)的方程(1.9)，常常表达轉到新

平行坐标系去的調換.

用简括的和符表示(1.9)和(1.10)时,便有

$$x_i=\sum_{\nu=1}^{3}a_{i\nu}x_\nu^*+a_i, \tag{1.11}$$

$$|a_{ik}|\neq 0 \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

設 P 和 Q 是两点,那末对新旧坐标間的关系成立公式

$$p_i=\sum_{\nu=1}^{3}a_{i\nu}p_\nu^*+a_i, \quad q_i=\sum_{\nu=1}^{3}a_{i\nu}q_\nu^*+a_i,$$

从此边边相减,得

$$q_i-p_i=\sum_{\nu=1}^{3}a_{i\nu}(q_\nu^*-p_\nu^*).$$

这样一来,向量 $\overrightarrow{PQ}$ 在旧系和新系下的支量 $v_i=q_i-p_i$ 与 $v_i^*=q_i^*-p_i^*$ 之間,成立下列关系:

$$v_i=\sum_{\nu=1}^{3}a_{i\nu}v_\nu^* \quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{1.12}$$

任何向量的支量的变換式是齐一次的.

当然,上面的結論在平面上也成立.

【习題】

1. 当平面上新系的原点 O^* 和二单位点 E_1^*, E_2^* 在旧系下的坐标是 (1,1), (2, 1), (1, 2) 时,作出变換式.

2. 当空間里新系的原点和三单位点在旧系下的坐标是 (1, 0, 0), (1,2, 0), (0, 0, −1), (0, −1, 0) 时,求旧原点在新系下的坐标.

§1.2 一 些 应 用

1. 假設旧坐标系是笛氏的,而新系則是任一平行坐标系. 考察一个以

$$\boldsymbol{v}_1=\{v_{11},\ v_{12},\ v_{13}\}=v_{11}^*\boldsymbol{e}_1^*+v_{12}^*\boldsymbol{e}_2^*+v_{13}^*\boldsymbol{e}_3^*,$$

$$\boldsymbol{v}_2=\{v_{21},\ v_{22},\ v_{23}\}=v_{21}^*\boldsymbol{e}_1^*+v_{22}^*\boldsymbol{e}_2^*+v_{23}^*\boldsymbol{e}_3^*,$$

$$\boldsymbol{v}_3=\{v_{31},\ v_{32},\ v_{33}\}=v_{31}^*\boldsymbol{e}_1^*+v_{32}^*\boldsymbol{e}_2^*+v_{33}^*\boldsymbol{e}_3^*$$

为棱向量的平行多面体. 那末,容易知道:

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)=\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} v_{11}^* & v_{12}^* & v_{13}^* \\ v_{21}^* & v_{22}^* & v_{23}^* \\ v_{31}^* & v_{32}^* & v_{33}^* \end{vmatrix}(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*).$$

$|(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)|$ 是所論平行多面体的体积 J,而 $|(\boldsymbol{e}_1^*,\boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)|$ 是由三个新单位向量撑成的平行多面体的体积 J_0, 所以

$$\pm\begin{vmatrix} v_{11}^* & v_{12}^* & v_{13}^* \\ v_{21}^* & v_{22}^* & v_{23}^* \\ v_{31}^* & v_{32}^* & v_{33}^* \end{vmatrix}=\frac{J}{J_0}. \tag{1.13}$$

因此，当任一个斜交坐标系的三个单位向量撑成的平行多面体体积被取作为单位体积时,三个向量的行列式除了符号外,表示由它們所撑成的平行多面体的体积.

行列式的这种性质对任何斜交坐标系的調換是永恒的,或者**不变的**.

同样結果关于平面上的平行四边形的面积也成立.

2. 关于一个向量的长度公式,情况就不同了. 在笛氏系下,

$$|\boldsymbol{v}|^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2. \tag{1.14}$$

另一方面,在新坐标系下,

$$|\boldsymbol{v}|^2=\sum_{i=1}^{3} v_i^2=\sum_i\Big(\sum_\nu a_{i\nu}v_\nu^*\Big)^2=\sum_i\sum_{\nu,\mu} a_{i\nu}a_{i\mu}v_\nu^*v_\mu^*.$$

所以,置

$$\boldsymbol{e}_\nu^*\boldsymbol{e}_\mu^*=g_{\nu\mu}=\sum_i a_{i\nu}a_{i\mu}, \tag{1.15}$$

得到

$$|\boldsymbol{v}|^2=\sum_{\nu,\mu=1}^{3} g_{\nu\mu}v_\nu^*v_\mu^*. \tag{1.16}$$

3. 設

$$L(\boldsymbol{x})=c_1x_1+c_2x_2+c=0 \tag{1.17}$$

是在笛氏坐标系下一条直綫的方程,我們看出

$$\frac{L(\boldsymbol{p})}{L(\boldsymbol{q})}=\frac{c_1p_1+c_2p_2+c}{c_1q_1+c_2q_2+c} \tag{1.18}$$

表示点 $P=(p_1, p_2)$ 和 $Q=(q_1, q_2)$ 到直綫(1.17)的距离的比値.

把(1.6)代进(1.17)里，便得到

$$L(\boldsymbol{x})=c_1x_1+c_2x_2+c=c_1^*x_1^*+c_2^*x_2^*+c^*=L^*(\boldsymbol{x}^*),\quad(1.19)$$

其中

$$c_1^*=c_1a_{11}+c_2a_{21},$$

$$c_2^*=c_1a_{12}+c_2a_{22},$$

$$c^*=c+c_1a_1+c_2a_2.$$

方程 $L^*(\boldsymbol{x}^*)=c_1^*x_1^*+c_2^*x_2^*+c^*=0$ 代表在新坐标系下的所論直綫. 設 (p_1^*, p_2^*) 和 (q_1^*, q_2^*) 分别是 P 和 Q 在新坐标系下的坐标，那末根据(1.18)，(1.19) 导出

$$\frac{L(\boldsymbol{p})}{L(\boldsymbol{q})}=\frac{c_1p_1+c_2p_2+c}{c_1q_1+c_2q_2+c}=\frac{c_1^*p_1^*+c_2^*p_2^*+c^*}{c_1^*q_1^*+c_2^*q_2^*+c^*}=\frac{L^*(\boldsymbol{p}^*)}{L^*(\boldsymbol{q}^*)}.$$

所以我們的比值也决定于后面的分式.

这样，在任一斜交坐标系下，只要把各点的坐标代进直綫方程的左边并把結果相除，便得到这二点到这直綫的距离之比.

因此，关于距离比的表达式(1.18)对任一平行坐标系的調換是不变的.

相应的結果对空間的二点到一平面的距离比也成立.

4. 在平面上取定任一斜交坐标系；那末

$$c_{11}x_1^2+2c_{12}x_1x_2+c_{22}x_2^2+2c_{13}x_1+2c_{23}x_2+c_{33}=0\quad(1.20)$$

表示圓錐曲綫(或二次曲綫). 如果把(1.6)代进这里，結果，所得的方程关于 x_i^* 也是二次的. 因此，方程(1.20)对于斜交坐标系的調換是不变的.

这样，一条二次曲綫在每一平行坐标系下，总是由形如(1.20)的一个方程来表达的.

相应的結果对于 n 次代数曲綫和曲面也都成立.

【习题】

1. 当平面上的二单位向量撑成的平行四边形的面积被取作为单位面积时，以 (a_1, a_2)，(b_1, b_2)，(c_1, c_2) 为頂点的三角形的面积除符号外等于

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

2. 在空間的同一假設下，以(a_1, a_2, a_3)，(b_1, b_2, b_3)，(c_1, c_2, c_3)，(d_1, d_2, d_3)为頂点的四面体的体积J是

$$J=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

3. 一个圓是不能在每一平行坐标系下决定于形如

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2=R^2$$

的方程的.

§ 1.3 坐标变换和矩陣算法

§ 1.1 的 (1.6) 或 (1.9) 給出了一点的由新坐标所表达的旧坐标的有关公式. 如果关于 x_i^* 解这些变换公式，便可用旧坐标表达同一点的新坐标.

我們考察新旧原点一致的情况. 这时，从

$$x_i=\sum_{\nu=1}^{3} a_{i\nu}x_\nu^* \tag{1.21}$$

解出 x_i^*，得到

$$x_i^*=\sum_{\nu=1}^{3} A_{i\nu}x_\nu, \tag{1.22}$$

其中

$$A_{ik}=\frac{D_{ki}}{|a_{ik}|}, \tag{1.23}$$

D_{ki} 表示在矩陣 (a_{ik}) 中元 a_{ki} 的代数余因式.

現在取第三个坐标系，它的原点仍旧不动，而且設

$$x_k^*=\sum_{\mu=1}^{3} b_{k\mu}\bar{x}_\mu \tag{1.24}$$

代表 x_i^* 与点 X 在第三系下的坐标 $\bar{x}_i$ 之間的联系. 把(1.24)代进(1.21)，便得到 x_i 到 $\bar{x}_i$ 的調换，即变换公式

$$x_i=\sum_{\mu=1}^{3}c_{i\mu}\bar{x}_\mu, \tag{1.25}$$

式中

$$c_{i\mu}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{k\mu}. \tag{1.26}$$

在矩陣算法中,置

$$A=(a_{ik}),\quad B=(b_{ik}),\quad C=(c_{ik}), \tag{1.27}$$

i 表示行, k 表示列, 公式 (1.26) 表明了, C 的第 i 行, 第 μ 列元 $c_{i\mu}$ 等于 A 的第 i 行与 B 的第 μ 列的数量积. 我們称 C 为 A 和 B 的积矩陣,且記为

$$C=A\cdot B.$$

上述关于方陣 A 和 B 的乘积定义,可以拓广到 m 行、n 列矩陣 $A=(a_{ik})$ 与 n 行、l 列矩陣 $B=(b_{ik})$ 的乘积 $C=(c_{ik})$, 即以 A 的第 i 行与 B 的第 k 列的数量积 c_{ik} 作为第 i 行、第 k 列元的, 一个 m 行、l 列的矩陣:

$$c_{ik}=\sum_{\mu=1}^{n}a_{i\mu}b_{\mu k}. \tag{1.28}$$

利用积矩陣的記法, 特别地可以把我們的一些公式写成簡单的形式. 例如,把坐标向量 $\boldsymbol{x}$ 写成一列三行的矩陣

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

且同样地,

$$\boldsymbol{x}^*=\begin{pmatrix}x_1^*\\x_2^*\\x_3^*\end{pmatrix} \tag{1.30}$$

和 $A=(a_{ik})$, 那末(1.21)可以写成

$$\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}^*. \tag{1.31}$$

同样,簡写(1.24)为

$$\boldsymbol{x}^*=B\bar{\boldsymbol{x}}, \tag{1.32}$$

从而按照(1.26)改写(1.25)为

$$x = C\bar{x} = AB\bar{x}. \tag{1.33}$$

当(1.32)代进(1.31)时，很明显地看出(1.33)。

在(1.22)中出現的方陣(A_{ik})称为$A=(a_{ik})$的**逆矩陣**，記它为A^{-1}.

【习题】

1. 算出二矩陣

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ 与 } B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

的积 AB.

2. 証明下列关于矩陣算法的一些定理：

I. 乘法結合律：$(AB)C=A(BC)$.

II. 矩陣乘法是不可对調的.

III. 分配律：$A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$.

IV. $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$称为**单位矩陣**. 更一般地，导入克罗納克尔(Kronecker)記号δ_{ik}：

$$\delta_{ik}=\begin{cases} 1, & \text{当 } i=k; \\ 0, & \text{当 } i\neq k. \end{cases}$$

那末$E=(\delta_{ik})$. 証$EA=A$, $BE=B$.

V. $AA^{-1}=E$, $A^{-1}A=E$;　$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1}=A$.

VI. **轉置矩陣**. 設

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

它的轉置

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

証：$(AB)'=B'A'$, $(A^{-1})'=(A')^{-1}$.

凡满足 $A'=A$ 的方阵称为**对称方阵**；满足 $A'=-A$ 的方阵称为**反称方阵**.

§1.4 直交坐标变换

现在回到 §1.1 中所論內容的补充，但是这里假定双方坐标系都是笛氏的（参閱图 1.2）.

这时，$\boldsymbol{e}_1^*=\{a_{11}, a_{21}\}$ 是长为 1 的向量，所以

$$\boldsymbol{e}_1^{*2}=a_{11}^2+a_{21}^2=1. \qquad (1.34)$$

同样，

$$\boldsymbol{e}_2^{*2}=a_{12}^2+a_{22}^2=1. \qquad (1.35)$$

并且，由于二向量互相垂直，还有

$$\boldsymbol{e}_1^*\boldsymbol{e}_2^*=a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0. \qquad (1.36)$$

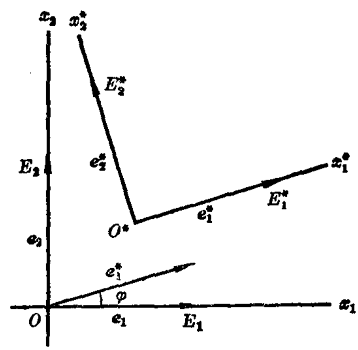

图 1.2

假定在旧坐标系下，从正 x_1 軸轉向正 x_2 軸的旋轉向是正向，而且 x_1 軸与 $x_1{}^*$ 軸間的角以正旋轉向度量时是 φ，那末 $\boldsymbol{e}_1^*$ 在旧系下的支量是 $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. 所以

$$a_{11}=\cos\varphi, \quad a_{21}=\sin\varphi. \qquad (1.37)$$

如果 $\boldsymbol{e}_1^*$ 望 $\boldsymbol{e}_2^*$ 的旋轉向与 $\boldsymbol{e}_1$ 望 $\boldsymbol{e}_2$ 的一致，那末 $\boldsymbol{e}_2^*$ 与正 x_1 軸的交角等于 $\varphi+90°$，从而 $\boldsymbol{e}_2^*$ 的支量是

$$\cos(\varphi+90°)=-\sin\varphi, \quad \sin(\varphi+90°)=\cos\varphi.$$

因此，$\boldsymbol{e}_2^*=\{a_{12}, a_{22}\}$，

$$a_{12}=-\sin\varphi, \quad a_{22}=\cos\varphi. \qquad (1.38)$$

这样，变换公式如下：

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x_1^*\cos\varphi-x_2^*\sin\varphi+a_1,\\ x_2&=x_1^*\sin\varphi+x_2^*\cos\varphi+a_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1.39)$$

如果上述的二旋轉向相反，那末变换公式变为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1^* \cos\varphi + x_2^* \sin\varphi + a_1, \\ x_2 &= x_1^* \sin\varphi - x_2^* \cos\varphi + a_2. \end{aligned}\right\} \tag{1.39a}$$

反过来，如果 x_1 和 x_2 是笛氏坐标，而且对各点 x_1^* 和 x_2^* 是由(1.39)定义的，其中 φ 表示任何角，那末 x_1^* 和 x_2^* 是在一个新系下的笛氏坐标．这是因为，(1.34)，(1.35)和(1.36)都成立．

因为

$$(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1,$$

新坐标系与旧坐标系有同一取向．

变换 (1.39) 的逆变换自然也具有同一形式．这时，改有关的旋轉角为 $-\varphi$，便容易得到

$$\left.\begin{aligned} x_1^* &= x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi + a_1^*, \\ x_2^* &= -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi + a_2^*. \end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

为决定常数 a_1^*, a_2^*，应用公式(1.40) 到点 O^* 去．在这点的 $x_1^* = x_2^* = 0$，$x_1 = a_1$，$x_2 = a_2$，从而得到

$$\left.\begin{aligned} -a_1^* &= a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi, \\ -a_2^* &= -a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{1.41}$$

我們轉到空間．这时候代替 (1.34)，(1.35)，(1.36) 而出現的条件有六个，即：

$$\boldsymbol{e}_1^{*2} = \boldsymbol{e}_2^{*2} = \boldsymbol{e}_3^{*2} = 1, \quad \boldsymbol{e}_1^* \boldsymbol{e}_2^* = \boldsymbol{e}_1^* \boldsymbol{e}_3^* = \boldsymbol{e}_2^* \boldsymbol{e}_3^* = 0. \tag{1.42}$$

把变换公式写成下列方程：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11} x_1^* + a_{12} x_2^* + a_{13} x_3^* + a_1, \\ x_2 &= a_{21} x_1^* + a_{22} x_2^* + a_{23} x_3^* + a_2, \\ x_3 &= a_{31} x_1^* + a_{32} x_2^* + a_{33} x_3^* + a_3. \end{aligned}\right\} \tag{1.43}$$

这里已置

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1^* &= \{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}, \\ \boldsymbol{e}_2^* &= \{a_{12}, a_{22}, a_{32}\}, \\ \boldsymbol{e}_3^* &= \{a_{13}, a_{23}, a_{33}\}. \end{aligned}$$

条件(1.42)表明了，在矩陣 A 里，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

各列向量的数量平方等于1，而且每二列向量的数量积等于0. 从而

$$\sum_{\nu=1}^{3} a_{\nu i}a_{\nu k}=\delta_{ik}. \tag{1.45}$$

我們說，这些列向量組成一个**正規直交系**，并且称具有这性质的矩陣为**直交矩陣**.

这样，在一个笛氏坐标系到另一个笛氏坐标系的变换公式(1.43)中，矩陣(1.44)是直交的. 同样地，相应的結論在平面上也成立.

反过来，如果 x_i 是笛氏坐标，而且存在带有直交矩陣 $A=(a_{ik})$ 的关系(1.43)，那末 x_i^* 也是笛氏坐标. 这是由于，对新单位向量成立(1.42)，从而它們相垂直，而且长度是1.

設 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个非迷向的向量，它們間的角决定于

$$\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}.$$

如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，那末

$$\cos(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\boldsymbol{ab}.$$

应用这公式到 $\boldsymbol{e}_k^*=\{a_{1k},\ a_{2k},\ a_{3k}\}$ 和 $\boldsymbol{e}_1=\{1,\ 0,\ 0\}$，就得到

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_k^*=a_{1k}=\cos(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_k^*).$$

一般地，

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k^*=a_{ik}=\cos(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_k^*). \tag{1.46}$$

这样，得到了变换方程(1.43)的各系数 a_{ik} 的几何解釋.

现在，考察逆变换

$$x_i^*=\sum_{k=1}^{3} A_{ik}x_k+a_i^*. \tag{1.47}$$