上海市大学教材

高等数学

（工科用）

下册

上海市大学教材

高等数学

（工科用）

下册

工科《高等数学》编写组

上海人民出版社

上海市大学教材

高等数学

（工 科 用）

下 册

工科《高等数学》编写组

上海人民出版社出版

（上海绍兴路5号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 9.5　字数 231,000

1974年9月第1版　1974年9月第1次印刷

印数 1—42,000

统一书号：13171·98　　定价：0.72 元

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

出 版 说 明

本书共分二册：上册包括一元函数微积分和微分方程；下册包括级数，向量和空间解析几何，二元函数微积分，以及附录——线性代数初步．除附录以外，各章都配有习题和复习题．

本书可作为上海市工科院校各专业高等数学课程的教材或教学参考书．使用时，各专业应根据教学要求在内容上作适当的取舍（特别是加上 * 号的章节）．同时，在使用中希望结合实际情况选编典型课题进行教学，以便更好地做到理论联系实际．

由于我们的马列主义水平不高，对毛主席的教育革命思想领会不够，实践经验又不足，因而教材中一定有不少缺点和错误，恳切地希望广大读者提出批评和指正．

工科《高等数学》编写组

一九七三年八月

目　录

第七章 无 穷 级 数

本章从解决函数的近似表达问题入手，引进无穷级数及其收敛、发散的概念．在此基础上，根据解决实际问题的需要，着重讨论如何把函数展开为幂级数和三角级数的问题．

通过本章的学习，将使我们体会到无穷级数是表示函数和进行数值计算的一种数学工具．正如恩格斯指出的："**把某个确定的数，例如把一个二项式，化为无穷级数，即化为某种不确定的东西，从常识来说，这是荒谬的举动。但是，如果没有无穷级数和二项式定理，那我们能走多远呢？**"随着科学技术的发展，级数理论在生产实践中越来越显示出它的重要性．

第一节 无穷级数的基本概念

一、无穷级数的引入

生产实践中经常会遇到一些较复杂的函数关系．对于这种函数关系，为了便于研究，我们希望用一些简单的函数来近似表达．从便于进行数值计算来说，我们看到，对于用多项式表示的函数，只要对自变量进行有限次加、减、乘三种运算，便能求出它的函数值来．因此，我们经常用多项式来近似表达函数．

在微分的应用（第二章第九节）中，我们已经得到，当$|x|$不大时，有如下的近似等式：

$$\sin x \approx x, \quad e^x \approx 1+x, \quad \ln(1+x) \approx x.$$

这些都是用一次多项式来近似表达函数的例子．

但是，有些实际问题要求的精确度比较高，这就需要用高次的

多项式来近似表达函数．例如，在精密仪器的设计中，要用到近似公式

$$\sin\alpha\approx\alpha-\frac{\alpha^3}{6}. \tag{1}$$

这就是用三次多项式来近似表达函数的例子．

又如，在化学反应中，一方面，根据经验知道，残存物质的质量 M 与时间 t 的关系可以用下式表示：

$$M\approx a_0+a_1t+a_2t^2, \tag{2}$$

其中 a_0、a_1、a_2 都是常数．另一方面，化学反应的速度与残存物质的质量成正比．设比例常数是 k，反应开始时物质的质量为 M_0，通过解微分方程

$$\frac{dM}{dt}=-kM,\quad M|_{t=0}=M_0,$$

可以得到

$$M=M_0e^{-kt}. \tag{3}$$

所以(2)式实际上说明了指数函数 e^{-kt} 可以用一个二次多项式来近似表达．

再如，在制造对数表时，如果只用近似等式 $\ln(1+x)\approx x$ 来计算，结果是不够精确的．在本章第四节中我们将会知道，$\ln(1+x)$ 可以用二次、三次以及更高次的多项式来近似表达；当选用次数适当高的多项式来近似表达 $\ln(1+x)$ 时，就能达到所需要的精确度．

一般地，对于函数 $f(x)$，我们希望用 n 次多项式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \tag{4}$$

来近似表达，使这种近似表达所产生的误差

$$f(x)-(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)$$

的绝对值，随着 n 无限增大而趋于零．而当 n 无限增大时，(4)式变成无穷多项相加．这就需要引进新的数学概念，即无穷级数的概念．

下面我们先讨论如何用多项式来近似表达函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，我们可以利用除法：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n \\
\hline
1+x & 1 \\
 & \underline{1+x} \\
 & -x \\
 & \underline{-x-x^2} \\
 & x^2 \\
 & \underline{x^2+x^3} \\
 & -x^3 \\
 & \underline{\cdots} \\
 & \cdots \\
 & \underline{\cdots} \\
 & (-1)^n x^n \\
 & \underline{(-1)^n x^n+(-1)^n x^{n+1}} \\
 & (-1)^{n+1} x^{n+1}
\end{array}
$$

得到等式

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}. \quad (5)$$

如果令

$$s_n(x)=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n,$$

$$R_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x},$$

(5)式就可以写为

$$f(x)=s_n(x)+R_n(x), \qquad (6)$$

即把 $f(x)$ 表示为一个多项式与另一函数之和的形式.

当 $|x|<1$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-s_n(x)]=\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}=0,$$

于是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x),$$

亦即

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1<x<1). \qquad (7)$$

因此，当 $|x|<1$ 时，我们可以根据对于精确度的要求得出一系列的近似等式：

$$\frac{1}{1+x}\approx 1-x,$$

$$\frac{1}{1+x}\approx 1-x+x^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1+x}\approx 1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由于 n 越大，$R_n(x)$ 越向零靠近，所以上述近似等式的项数越多，精确度就越高．这就解决了 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 的近似表达问题．在以后各节中我们还可以利用公式(7)推导出 $\ln(1+x)$ 的一系列近似等式，从而解决了用多项式近似表达 $\ln(1+x)$ 的问题．

二、无穷级数及其收敛与发散

在公式(7)的右端出现了无穷多项相加，它就是无穷级数的一个例子．一般地说，给定了一个数列或函数列

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots,$$

把它们依次相加，得

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \qquad (8)$$

就称(8)式为无穷级数，简称级数，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots,$$

其中 u_n 称为级数的一般项．

如果级数的各项都是常数，就称这级数为常数项级数．例如

$$0.1+0.01+0.001+\cdots+0.\underbrace{00\cdots01}_{n\text{位}}+\cdots,$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots,$$

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

都是常数项级数．如果级数的各项都是函数，就称这级数为函数项级数．下列级数都是函数项级数：

$$1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,$$

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots,$$

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx+\cdots.$$

对于无穷级数，按照通常的加法规则来求和是不可能的．这是因为它有无穷多个项，把它一项一项地加下去，永远没有完结的时候．那么，应该如何理解无穷多项相加呢？恩格斯指出："**在数学上，为了达到不确定的、无限的东西，必须从确定的、有限的东西出发**"．我们先把级数(8)的前 n 项相加，得到

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

称为级数(8)的部分和．当 n 依次取 1, 2, 3, …时，它构成数列

$$s_1=u_1,\quad s_2=u_1+u_2,\quad s_3=u_1+u_2+u_3,\quad \cdots,$$

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\quad \cdots.$$

当 $n\to\infty$ 时，s_n 的极限就反映了无穷多项相加的结果．这样，我们就可以从级数的部分和这个有限的东西出发，观察它的变化趋势，从而，认识无穷多项相加的意义．

［例 1］ 考察级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots. \tag{9}$$

它是一个无穷等比级数(简称等比级数)，其首项为 $\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$．它的部分和为

$$s_1=\frac{1}{2},\quad s_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\quad s_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8},\quad \cdots,$$

$$s_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n},\quad\cdots.$$

按初等数学中等比级数的求和公式,可得

$$s_n=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}.$$

观察 s_n 的变化趋势. 当 n 无限增大时, s_n 无限接近于 1, 亦即

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1.$$

因此,我们就认为级数(9)中无穷多项相加的和等于 1.

[例 2] 考察级数

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots. \tag{10}$$

它是一个无穷等差级数(简称等差级数),其部分和为

$$s_1=1,\quad s_2=1+2=3,\quad s_3=1+2+3=6,\quad\cdots,$$

$$s_n=1+2+3+\cdots+n,\quad\cdots.$$

按初等数学中等差级数的求和公式,可得

$$s_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

观察 s_n 的变化趋势. 当 n 无限增大时, s_n 亦随之无限增大,因此 s_n 没有极限. 我们说级数(10)没有和.

[例 3] 考察级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots. \tag{11}$$

它的部分和为

$$s_1=1,\quad s_2=1-1=0,\quad s_3=1-1+1=1,$$

$$s_4=1-1+1-1=0,\quad\cdots,$$

$$s_n=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1},\quad\cdots.$$

s_n 交叉地取 1 和 0, 它在 1 与 0 这两个数中来回跳动, 因此, 数列 s_n 没有极限. 所以级数(11)也没有和.

上面三个例子可以归结成两种情况: 一种情况是当 n 无限增

大时，级数的部分和 s_n 有极限，即

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

s 是个确定的数，称为级数的和，并把这种级数称为收敛级数，记为

$$s=\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots;$$

另一种情况是当 n 无限增大时，级数的部分和 s_n 没有极限，这种级数没有和，称它为发散级数. 由上述规定知道，级数(9)是收敛级数，级数(10)与(11)都是发散级数.

[例 4] 讨论级数

$$0.3+0.03+0.003+\cdots+0.\underbrace{0\cdots03}_{n\text{ 位}}+\cdots \tag{12}$$

是否收敛.

解：这个级数是一个首项为 0.3、公比为 0.1 的等比级数. 按照初等数学中等比级数的求和公式得出它的部分和为

$$s_n=\frac{0.3[1-(0.1)^n]}{1-0.1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(0.1)^n.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(0.1)^n\right]=\frac{1}{3},$$

所以级数(12)是收敛的，它的和为 $\frac{1}{3}$.

因为无限循环小数 $0.\dot{3}$ 可以用级数(12)表示，所以

$$0.\dot{3}=\frac{1}{3}.$$

这样，我们就把这个无限循环小数化成了分数.

级数(9)与级数(12)都是公比小于 1 的无穷等比级数，通过上面讨论知道它们都是收敛的. 一般地，对于首项为 a、公比为 q $(|q|<1)$ 的无穷等比级数

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots, \tag{13}$$

由于它的部分和为

$$s_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q},$$

且极限

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)=\frac{a}{1-q},$$

所以等比级数(13)是收敛的,它的和为 $s=\dfrac{a}{1-q}$,即

$$\frac{a}{1-q}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots \quad (-1<q<1). \tag{14}$$

必须注意,公式(14)只有在 $|q|<1$ 时才能成立.

从上面的讨论可知,要判定一个级数是否收敛,就要看这级数的部分和 s_n 有没有极限.这对大多数级数来说,不是容易办到的,因此需要有简单易行的收敛判定法.

观察上面各例中的收敛级数,它们的一般项 u_n 都随着 n 的无限增大而趋于零,即

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

这个结论对于一般的收敛级数是否同样正确呢?

对于收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,作出它的部分和

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n=s_{n-1}+u_n,$$

则

$$u_n=s_n-s_{n-1}.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,所以当 $n\to\infty$ 时,s_n 有极限,设其极限为 s. 再考虑 s_{n-1} 当 $n\to\infty$ 时的极限.因为 s_{n-1} 可以看成是 s_n 中的 n 换成 $n-1$ 而得出的,当 $n\to\infty$ 时,同样 $n-1\to\infty$. 所以当 $n\to\infty$ 时,s_{n-1} 与 s_n 有相同的极限 s. 因此,

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s-s=0.$$

于是,我们得出下面的重要结论:如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收敛，那么必定有

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

就是说，收敛级数的一般项必趋于零.

根据这一结论，我们可以从级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一般项 u_n 当 $n\to\infty$ 时不趋于零而推知这个级数一定是发散的. 例如，级数

$$1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n+\cdots \tag{15}$$

的一般项 $u_n=(-1)^{n-1}n$ 当 $n\to\infty$ 时不趋于零，因此级数(15)是发散的.

注意，上述结论只是说，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时必定有 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$. 但是反过来，当 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ 时，却不能断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否收敛. 事实上，我们以后将看到，虽然 $u_n\to 0\,(n\to\infty)$，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可能是发散的.

此外，我们还可以利用下面两个判定法来判定级数是否收敛.

I. 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{16}$$

的每一项 $u_1, u_2, u_3, \cdots$ 都是正数，我们称级数(16)为正项级数.

正项级数收敛判别法 对于正项级数(16)，我们将它与某个已知是收敛或发散的正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots$$

相比较.

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，并有 $u_n \leqslant v_n\,(n=1, 2, 3, \cdots)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;