

希尔伯特空间中的平稳序列

主编校 陶宗英 何声武 汪嘉冈译

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是一本論文选集,选輯了五篇平稳随机过程方面的最基本的論文,包括 A. H. Колмогоров, J. L. Doob, K. Karhunen 等人的工作。这五篇論文对平稳随机过程的譜分析,遍历理論,預測理論作了全面的討論,其中所获得的結果与所使用的方法是日前平稳随机过程理論发展的依据,有重要参考价值。

本书可供数学、力学、无綫电、通訊及自动控制等方面的研究工作者和高等学校概率論方面的教师与高年級学生参考。

希尔伯脫空間中的平稳序列

鄭紹濂 編校 陶宗英 何声武 汪嘉岡等 譯

上海科学技术出版社出版(上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

大东集成联合印刷厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32 印張 7 2/32 排版字数 167,000

1963 年 3 月第 1 版 1963 年 3 月第 1 次印刷 印数 1—4,000

統一书号 13119·500 定价(十四) 1.20 元

前 言

在本书中共收集了五篇平稳随机函数方面的最基本的論文。其中，A. H. Колмогоров 的两篇是第一次运用泛函分析的方法来处理平稳随机函数理論的文章，他在这些文章中首次以精确的数学語言提出了平稳随机序列的内插与外推問題，为平稳随机函数理論的研究开辟了一个新的、具有实践意义的領域。直到目前为止，这些文章中所創立的概念和方法仍然是研究有关理論的主要而有力的工具。J. L. Doob 的文章，是 Колмогоров 外推理論的具体化。在他的工作中闡明了一类重要的随机函数，即具有有理譜密度的平稳序列与平稳过程的概率意义，并就这一类平稳随机函数的外推問題提出了最后的答案。K. Karhunen 的工作除了將 Колмогоров 对平稳序列的理論拓广到平稳过程的情形之外，还对一般具有二阶矩的随机函数（不一定是平稳的）的相关理論做了研究，并建立了一些重要的定理（例如关于譜分解的定理）。这些論文虽然都发表在十几年前，但就其重要性來說，並沒有受時間的限制，至今仍然是研究有关問題的依据，經常被有关論文所引用；同时，登載这些文章的刊物也并不容易普遍找到，因此，將它們編輯成集并加以出版也許是有益的。

本书的譯稿曾由編者作了統一的校訂，并与譯者一起作了一些必要的注解，同时也增加了一些重要的参考文献。限于我們的水平，挂一漏万和錯誤之处在所难免，竭誠欢迎讀者給以批評指正。

王寿仁、江澤培两先生对編輯本书提供了宝貴的意見，謹此表示感謝。

目 录

前言

1. 希尔伯特空间中的平稳序列	A. Н. Колмогоров	1
(Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве)		
引言		1
§1 两个引理		2
§2 在空间中算子的运算		5
§3 谱的基本性质		8
§4 从属序列		14
§5 平稳序列分解为正交分量		18
§6 滑动和		22
§7 Wold 分解		27
§8 正则序列		30
§9 奇异序列及奇异部分的谱的性质		38
§10 最小序列		41
参考文献		44
2. 平稳随机序列的内插与外推	A. Н. Колмогоров	45
(Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей)		
引言		45
§1 平稳随机序列与希尔伯特空间几何		48
§2 定理1的证明		50
§3 在一般情形下的 $\sigma_E^2(m)$		50
§4 在实的情形下的 $\sigma_E^2(m)$		51
§5 σ_I^2 的确定		53
参考文献		54
3. 基本高斯过程	J. L. Doob	55
(The elementary Gaussian processes)		

§ 1 引言	55
§ 2 退化过程和决定性过程的结构	70
§ 3 具有整值参数的 t, h, G, M . 过程	73
§ 4 参数 t 連續变化的过程	98
4. 概率論中的綫性方法	K. Karhunen 123
(Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung)	
引論	123
§ 1 概率場与随机变量概論	125
§ 2 随机变量的綫性集	132
§ 3 随机函数	142
§ 4 随机函数的积分	147
§ 5 随机函数的譜表示式	155
§ 6 平稳随机函数	173
A. 一般性质	173
B. Cramér 表示式	182
C. 具有絕對連續譜的平稳随机函数	189
参考文献	190
5. 关于平稳随机函数的結構	K. Karhunen 199
(Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen)	
§ 1 从属的随机函数	199
§ 2 决定性的与完全非决定性的平稳随机函数	203
§ 3 完全非决定性的平稳随机函数的正規表示式	208
§ 4 平稳随机函数的綫性外推	219
参考文献	219

1. 希尔伯脫空間中的平穩序列^①

Стационарные Последовательности в Гильбертовом Пространстве

А. Н. Колмогоров

引 言

定义 1 复希尔伯脫空間^② H 中的一列元素 $\{x(t)\}$, 当 t 取遍从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的所有的整数时, 如果内积

$$B_{xx}(k) = (x(t+k), x(t)) \quad (0-1)$$

不依赖于 t , 则称它是平穩序列。

定义 2 二个平穩序列 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$, 如果它們的内积

$$B_{yx}(k) = (y(t+k), x(t)) \quad (0-2)$$

不依赖于 t , 则称 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 是平穩相关的。

从 B_{xx} 和 B_{xy} 的定义立刻可以得出

$$B_{xy}(k) = \overline{B_{yx}(-k)}, \quad (0-3)$$

$$B_{xx}(k) = \overline{B_{xx}(-k)}. \quad (0-4)$$

这样的平穩序列和平穩相关序列构成了概率論与数理統計的重要部分。在 H. Wold 的书^[1] 和 H. Cramér 最近的著作^[2] 中, 用概率論的語言对它們进行了詳細的研究。

在 § 3 及 § 7 中我們用希尔伯脫空間的几何学叙述了 H 。

① 原文見 Бюлл МТУ, 2. вып. 6 (1941), 1—40.

② 关于希尔伯脫空間的討論請看 M. Stone 的书 (見文献[3])。

Wold 和 H. Cramér 的主要結果。

又本文中所研究和解决的所有新的問題都是起源于概率論和数理統計方面。在我的論文[7]中,詳細地陈述了如何应用我們所得到的这些結果于平稳随机序列的外推和內插問題。

下面的定理指出了平稳及平稳相关序列和酉算子之間的簡單联系。

定理 1 設序列

$$\{x_1(t)\}, \{x_2(t)\}, \dots, \{x_n(t)\}$$

为平稳且两两平稳相关。又設 $H_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ 是空間 H 中包含所有这些序列中元素的最小閉綫性流形,則方程

$$Ux_\mu(t) = x_\mu(t+1) \quad (\mu=1, 2, \dots, n; \quad -\infty < t < +\infty)$$

唯一决定一个酉算子

$$U = U_{x_1, x_2, \dots, x_n},$$

使空間 $H_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ 自己映照到自己。

这个定理使我們可以把平稳及平稳相关序列的許多重要特性作为酉算子譜理論中已知結果的推論。§§3~6 中的全部定理就属于这种性质。

§§8~10 的結論并不是太熟知的,看来它們确是新的。

§§1~2 帶有导言的性质。

定理 1 显然可以从定义 1 与 2 以及 §1 中証明的引理 1 推得。

§1 两个引理

在空間 H 的某个子空間 M 上,設有某个取值在 H 中的算子

$$Tx = y.$$

若对任何 $x, y \in M$, 成立等式

$$(x, y) = (Tx, Ty), \quad (1-1)$$

則称算子是等距的。

設 H_M 是 H 中由 M 所張成的最小閉綫性流形，則下面的引理是正确的。

引理 1 算子 T 能擴張到整個空間 H_M 上去，並且保持等距性質。這個擴張是唯一的。

【證明】 設

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots \quad (1-2)$$

是在 M 中處處稠密的序列，從這個序列中，我們除去一切這樣的元素 Z_n ，它們與前面的 Z_k 是綫性相關的，於是得到序列

$$Z_{n_1}, Z_{n_2}, \dots, Z_{n_k}, \dots \quad (1-3)$$

因而形狀為

$$Z = a_1 Z_{n_1} + a_2 Z_{n_2} + \dots + a_p Z_{n_p} \quad (1-4)$$

的元素 Z 的全体 R ，包含了序列 (1-2) 的全部元素，且在 H_M 中處處稠密。因為 R 中的元素是由公式 (1-4) 所唯一確定的（由於子空間 (1-3) 中的元素是綫性無關的），所以公式

$$T^*Z = a_1 T Z_{n_1} + a_2 T Z_{n_2} + \dots + a_p T Z_{n_p} \quad (1-5)$$

唯一確定 R 上的某一算子 T^* 。並且對於 R 中的任意 Z' ， Z'' 有

$$(Z', Z'') = (T^*Z', T^*Z''),$$

這意味着定義在 R 上的算子 T^* 是等距的。利用連續性，我們可以在保持等距性的條件下把它擴張到整個空間 H_M 上去。

因為序列 (1-2) 中所有元素都包含在 R 中，由公式 (1-5) 可以推出，對於 (1-2) 中的任何元素 Z_n ，

$$T^*Z_n = T Z_n.$$

由於連續性，所以這個等式在整個空間 M 上都成立。這樣就證明了擴張的存在性。

按照公式 (1-5)，算子 T 的任何其他的等距擴張都將在集合 R 上與 T^* 重合。根據連續性，它們在整個 H_M 上也是重合的，所以 T 的等距擴張在整個空間 H_M 上是唯一的。引理証畢。

引理 2 为了在空间 H 中存在一系列元素

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

使它们满足关系式

$$(u_m, u_n) = C_{m,n} \quad (m, n=1, 2, \dots), \quad (1-6)$$

必须而且只须对于任何 $k, m_1, m_2, \dots, m_k$, 矩阵 $\|C_{m_i m_j}\|$ 是正定的 Hermite 矩阵, 即对任何复数 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$, 都有

$$S = \sum_{i,j=1}^k C_{m_i m_j} \xi_i \bar{\xi}_j \geq 0 \text{ ①}. \quad (1-7)$$

为了证明条件(1-7)的必要性, 我们来考虑空间 H 中的元素

$$u = \xi_1 u_{m_1} + \xi_2 u_{m_2} + \dots + \xi_k u_{m_k}.$$

容易算得

$$\|u\|^2 = (u, u) = S. \quad (1-8)$$

因为 $\|u\|^2$ 永远是非负的, 所以从(1-8)式就可推出(1-7)式.

现在来证明条件(1-7)的充分性. 按照(1-7), 设对于每个 n ,

$$S_n = \sum_{i,j=1}^n C_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j \geq 0.$$

我们作一变换

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(n)} \xi_j \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

使它把 S_n 变为

$$S_n = \sum_{j=1}^n |\eta_j|^2.$$

对任一正整数 n , 我们在 H 中选取一组标准正交基

$$Z_1^{(n)}, Z_2^{(n)}, \dots, Z_m^{(n)},$$

并令

$$u_i^{(n)} = \sum_{j=1}^m a_{ji}^{(n)} Z_j^{(n)} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

则易知

$$(u_i^{(n)}, u_j^{(n)}) = C_{ij}.$$

然后我们用下述的归纳法对一切正整数 n 作出序列

① 这里以及在以后的叙述中, ' $a \geq 0$ ' 的意思是指 a 是正的实数.

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

$$1^\circ \text{ 取 } u_1 = u_1^{(1)},$$

2° 假定 $u_1, u_2, \dots, u_n$ 已经作出, 并且对所有的 $m, n \leq N$, 满足关系式 (1-6). 令 T_N 为在集 $M_N = \{u_1^{(N+1)}, u_2^{(N+1)}, \dots, u_N^{(N+1)}\}$ 上的等距算子. 根据引理 1, 它能扩张到 H_{M_N} 上去并且保持等距性. 因为空间 H_{M_N} 和 $T_N H_{M_N}$ 是有限维的, 所以有界算子 T_N 可以扩张到整个空间 H 上去, 并且保持等距性 (参看 M. Stone 的书 [3] 中的定理 2-49). 在选取了一个这样的扩张之后, 我们令

$$u_{N+1} = T_N u_N^{(N+1)}.$$

容易看出元素 $u_1, u_2, \dots, u_{N+1}$ 对所有的 $m, n \leq N+1$, 都满足关系式 (1-6).

§ 2 在空间中算子的运算

依定理 1, 我们用 H_x 表示空间 H 中包含平稳序列 $\{x(t)\}$ 的所有元素的最小闭线性流形, 研究由下述方程所决定的酉算子 U_x :

$$U_x x(t) = x(t+1). \quad (2-1)$$

设

$$U_x = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dE_x(\lambda) \quad (2-2)$$

是酉算子 U_x 的谱表示^①. 对于 $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, 我们令

$$F_{xx}(\lambda) = \|E_x(\lambda)x(0)\|^2. \quad (2-3)$$

按照 M. Stone 的书 [3] (第六章 § 1) 中的记号, 我们用 L_x^2 表示定义在区间 $[-\pi, \pi]$ 上关于 $F_{xx}(\lambda)$ 可测, 并且满足下述条件的复值函数 $\phi(\lambda)$ 的全体.

① 关于线性算子的谱表示可以参看 M. Stone 的书. 应当指出, 今后在酉算子的谱表示中, 对应的谱系 $E(\lambda)$ 永远满足 $E(-\pi) = 0, E(\pi) = 1$. 在 M. Stone 的书中有更一般的自共轭算子的谱表示公式 $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$. 对于谱系, 我们可以应用这书中的一切有关定理.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\phi(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda) < \infty. \quad (2-4)$$

如果 L_x^2 中的两个函数 ϕ_1 和 ϕ_2 使等式

$$|\phi_1(\lambda) = \phi_2(\lambda)|$$

关于 $F_{xx}(\lambda)$ 几乎处处成立, 那么我们就认为它们是相同的。

对于 L_x^2 中的每个函数 ϕ , 对应一个算子

$$T(\phi) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\lambda) dE_x(\lambda), \quad (2-5)$$

它的定义域 $I(\phi)$ 是由空间 H_x 中使得积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\phi(\lambda)|^2 d\|E_x(\lambda)Z\|^2 \quad (2-6)$$

为有限的一切元素 Z 所组成(参看 M. Stone[3] 定理 6-1). 对于 L_x^2 中任一函数 $\phi(\lambda)$, 由积分 (2-4) 的有限性可推出 $x(0)$ 属于 $I(\phi)$. 所以对 L_x^2 中的每一函数 ϕ , 在空间 H_x 中有某个元素

$$Z_\phi = T(\phi)x(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\lambda) dE_x(\lambda)x(0) \quad (2-7)$$

与之对应。

引进这些公式之后, 我们可以来叙述下面的引理。它们实际上是 M. Stone 的书[3]中定理 6-1 和 6-2 的推论。

引理 3 由 $\phi \rightarrow T(\phi)$ 建立了 L_x^2 到 H_x 上所有由 (2-5) 所定义的算子 T 的总体之间的一一对应, 这里 ϕ 属于 L_x^2 . 并且

$$(3a) \quad a\phi \rightarrow aT(\phi),$$

$$(3b) \quad \phi_1 + \phi_2 \rightarrow T(\phi_1) + T(\phi_2),$$

如果 $\phi_1\phi_2 \in L_x^2$, 则

$$(3c) \quad \phi_1\phi_2 \rightarrow T(\phi_1\phi_2) = T(\phi_1)T(\phi_2),$$

$$(3d) \quad e^{it\lambda} \rightarrow U_{x_0}^t.$$

如果

$$\chi_\lambda(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \mu \leq \lambda, \\ 0 & \text{若 } \mu > \lambda, \end{cases}$$

那末

$$(3e) \quad \chi_\lambda \rightarrow E_x(\lambda).$$

引理 4^① 由 $\phi \rightarrow Z_\phi$ 建立了 L_x^2 到整个空间 H_x 的一一对应,

进而有

$$(4a) \quad a\phi \rightarrow aZ_\phi,$$

$$(4b) \quad \phi_1 + \phi_2 \rightarrow Z_{\phi_1} + Z_{\phi_2}.$$

如果 $\phi_1\phi_2 \in L_x^2$, 则

$$(4c) \quad \phi_1\phi_2 \rightarrow T(\phi_1)Z_{\phi_2} \text{ 或 } T(\phi_2)Z_{\phi_1},$$

$$(4d) \quad e^{it\lambda}\phi \rightarrow U_x^t Z_\phi,$$

$$(4e) \quad \chi_\lambda(\phi) \rightarrow E_x(\lambda)Z_\phi,$$

$$(4f) \quad (Z_{\phi_1}, Z_{\phi_2}) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_1(\lambda) \overline{\phi_2(\lambda)} dF_{xx}(\lambda),$$

$$(4g) \quad (E_x(\lambda)Z_{\phi_1}, Z_{\phi_2}) = \int_{-\pi}^{\lambda} \phi_1(\lambda) \overline{\phi_2(\lambda)} dF_{xx}(\lambda).$$

对应 $\phi \rightarrow T(\phi)$ 的性质 (3a), (3b), (3c), 可以从 M. Stone 的 [3] 中的定理 6-1 推出. 比较公式 (2-5) 和下列两个公式:

$$U_x^t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dE_x(\lambda),$$

$$E_x(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} dE_x(\mu) = \int_{-\pi}^{\pi} \chi_\lambda(\mu) dE_x(\mu),$$

立刻可以得出性质 (3d) 和 (3e).

对应 $\phi \rightarrow T(\phi)$ 是一对一的. 事实上, 如果 $\phi_1 \neq \phi_2$ (在我们假定的 L_x^2 中等价的意义下), 那末差

$$T(\phi_1)x(0) - T(\phi_2)x(0) = \int_{-\pi}^{\pi} [\phi_1(\lambda) - \phi_2(\lambda)] dE_x(\lambda)x(0)$$

的模

① 这个定理在多维平稳序列的情形也是成立的, 读者可参考 Ю. А. Розанов, У. М. Н. 1958, 2 (80). — 译者注

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} |\phi_1(\lambda) - \phi_2(\lambda)|^2 d\|E_x(\lambda)x(0)\|^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |\phi_1(\lambda) - \phi_2(\lambda)|^2 dF_{xx}(\lambda) \neq 0, \end{aligned}$$

所以

$$T(\phi_1)x(0) \neq T(\phi_2)x(0).$$

为了证明引理 4, 先注意下述事实: 若记 m 为由等式 (2-7) 所确定的与 L_x^2 中元素 ϕ 相对应的 H_x 的元素的全体, 则由 M. Stone [3] 中的定理 6-2, 可知 m 是空间 H_x 中的一个闭线性流形. 因为

$$x(t) = U_x^t x(0) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dE_x(\lambda)x(0), \quad (2-10)$$

并且函数 $e^{it\lambda}$ 属于 L_x^2 , 所以一切的 $x(t)$ 都包含在 m 中. 由此得出

$$m = H_x.$$

考虑到上面的事实, 引理 4 中关于对应 $\phi \rightarrow Z_\phi$ 的唯一性及性质 (4a), (4b) 和 (4f) 都变成 M. Stone [3] 中定理 6-2 的推论.

对应 $\phi \rightarrow Z_\phi$ 的性质 (4c), (4d) 和 (4e) 可以由对应 $\phi \rightarrow T(\phi)$ 相应的性质 (3c), (3d) 和 (3e) 推出. 最后从 (4e) 和 (4f) 可推出 (4g):

$$\begin{aligned} (E_x(\lambda)Z_{\phi_1}, Z_{\phi_2}) &= \int_{-\pi}^{\lambda} [\chi_\lambda(\mu)\phi_1(\mu)] \overline{\phi_2(\mu)} dF_{xx}(\mu) \\ &= \int_{-\pi}^{\lambda} \phi_1(\lambda) \overline{\phi_2(\lambda)} dF_{xx}(\lambda). \end{aligned}$$

引理 3 和引理 4 证毕.

§ 3 谱的基本性质

定理 2 对任意的平稳序列 $\{x(t)\}$, $B_{xx}(k)$ 能表示成下述形式:

$$B_{xx}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dF_{xx}(\lambda), \quad (3-1)$$

这里的 $F_{xx}(\lambda)$ 是定义在区间 $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ 上的非降、右连续的实值函数, 并且满足

$$F_{xx}(-\pi) = 0. \quad (3-2)$$

满足上述条件的函数 $F_{xx}(\lambda)$ 是由 B_{xx} 所唯一确定的.

从现在起我们称函数 $F_{xx}(\lambda)$ 为平稳序列 $\{x(t)\}$ 的谱函数. 它与 § 2 中 (2-3) 所定义的函数是一致的 (理由在以后自然会明了).

定理 3^① 如果两个平稳序列 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 是平稳相关的, 则

$$B_{xy}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dF_{xy}(\lambda), \quad (3-3)$$

其中 $F_{xy}(\lambda)$ 是定义在区间 $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ 上、复值的、右连续的且满足

$$F_{xy}(-\pi) = 0 \quad (3-4)$$

的有界变差函数. 又满足上述条件的函数 $F_{xy}(\lambda)$ 可由 B_{xy} 唯一确定.

因为任何平稳序列与它自己平稳相关, 因此在定理 2 中除了需要证明函数 $F_{xx}(\lambda)$ 是实的及非降的以外, 可以看成是定理 3 的一个特殊情况.

为了证明定理 3, 我们研究算子 U_{xy} 的谱表示式

$$U_{xy} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dE_{xy}(\lambda). \quad (3-5)$$

至于它的存在性, 只需在定理 1 中置 $n=2$, $x_1=x$, $x_2=y$, 便可推出.

再令

$$(E_{xy}(\lambda)x(0), y(0)) = F_{xy}(\lambda), \quad (3-6)$$

则易知 $F_{xy}(\lambda)$ 是右连续的有界变差函数 (参看参考文献[3], 177

① 定理 2 及定理 3 都是更进一步的多维平稳序列的相关函数的谱分解定理的特殊情形, 读者可参考 N. Wiener, P. Masani, Acta Math. 98 (1957) 及 Ю. А. Рованов, У. М. Н. 2(80), 1958. — 译者注

頁)。从

$$E_{xy}(-\pi) = 0 \quad (3-7)$$

可推出

$$F_{xy}(-\pi) = 0.$$

最后

$$\begin{aligned} B_{xy}(k) &= (x(k), y(0)) = (U_{xy}^k x(0), y(0)) \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dE_{xy}(\lambda) x(0), y(0) \right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} (dE_{xy}(\lambda) x(0), y(0)) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dF_{xy}(\lambda). \end{aligned}$$

所以由公式 (3-6) 所决定的函数 $F_{xy}(\lambda)$ 满足定理中的一切要求。

在 $\{x(t)\} = \{y(t)\}$ 的特殊情形, 则函数

$$F_{xx}(\lambda) = (E_x(\lambda)x(0), x(0)) = \|E_x(\lambda)x(0)\|^2 \quad (3-8)$$

将是实值的和非降的 (参看 M. Stone[3], 189 頁)。这样就证明了定理 2 中关于 $F_{xx}(\lambda)$ 的相应的結論。

从有界变差函数的富里埃展开的基本性质 (参看 A. Zygmund [4], 13 頁) 推知

$$F_{xy}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \omega_{xy}(\lambda+0) + C, \quad (3-9)$$

这里

$$\omega_{xy}(\lambda) = B_{xy}(0)\lambda - \sum_{k \neq 0} \frac{B_{xy}(k)}{ik} e^{-ik\lambda}, \quad (3-10)$$

而常数 C 由方程

$$F_{xy}(-\pi) = 0 \quad (3-11)$$

所决定。公式 (3-9) 及 (3-10) 说明了函数 $F_{xy}(\lambda)$ 由 B_{xy} 唯一决定, 所以定理 2 和定理 3 完全得证。

由 (3-6) 式直接可推出

$$F_{yx}(\lambda) = \overline{F_{xy}(\lambda)}. \quad (3-12)$$

定理 4 (H. Gramér) 如果序列

$$\{x_1(t)\}, \{x_2(t)\}, \dots, \{x_n(t)\}$$

是平稳和相互平稳相关的, 则对任意 $-\pi \leq \alpha \leq \beta \leq +\pi$, 增量

$$\Delta F_{x_\mu x_\nu} = F_{x_\mu x_\nu}(\beta) - F_{x_\mu x_\nu}(\alpha) \quad (3-13)$$

组成一个正定的 Hermite 矩阵. 即对任何复数 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 有

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n \Delta F_{x_\mu x_\nu} \xi_\mu \bar{\xi}_\nu \geq 0. \quad (3-14)$$

反之, 如果函数 $F_{\mu\nu}(\lambda)$ ($\mu, \nu=1, 2, \dots, n$) 是右连续的, 并且对任何使得它有定义的区域, 满足条件

$$\sum_{\mu, \nu=1}^n \Delta F_{\mu\nu} \xi_\mu \bar{\xi}_\nu \geq 0, \quad (3-15)$$

$$F_{\mu\nu}(-\pi) = 0, \quad (3-16)$$

则在 H 中存在一组平稳且平稳相关的序列

$$\{x_1(t)\}, \{x_2(t)\}, \dots, \{x_n(t)\},$$

满足条件

$$F_{x_\mu x_\nu}(\lambda) = F_{\mu\nu}(\lambda). \quad (3-17)$$

为证定理的第一部分, 考虑定理 1 中算子 $U = U_{x_1 x_1 \dots x_n}$ 的谱表示式

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dE(\lambda).$$

取

$$Z = \sum_{\mu=1}^n \xi_\mu x_\mu(0).$$

当 $\lambda \in [-\pi, \pi]$ 时考虑下述表达式:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \|E(\lambda)Z\|^2 = (E(\lambda)Z, Z) \\ &= \left(E(\lambda) \sum_{\mu=1}^n \xi_\mu x_\mu(0), \sum_{\nu=1}^n \xi_\nu x_\nu(0) \right) \\ &= \sum_{\mu, \nu=1}^n (\xi_\mu E(\lambda) x_\mu(0), \xi_\nu x_\nu(0)) \\ &= \sum_{\mu, \nu=1}^n \xi_\mu \bar{\xi}_\nu (E(\lambda) x_\mu(0), x_\nu(0)) \\ &= \sum_{\mu, \nu=1}^n F_{x_\mu x_\nu}(\lambda) \xi_\mu \bar{\xi}_\nu. \end{aligned}$$

因为函数 $\phi(\lambda)$ 是实的单调非降的 (参看 M. Stone [3], 189 页), 所以对 $\alpha \leq \beta$, 有

$$\phi(\beta) - \phi(\alpha) = \Delta\phi = \sum_{\mu, \nu=1}^n \Delta F_{x_\mu x_\nu} \xi_\mu \bar{\xi}_\nu \geq 0.$$

从而定理第一部分得证.

我们再证明定理的第二部分, 令

$$B_{\mu\nu}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dF_{\mu\nu}(\lambda).$$

按照引理 2, 对任一整数 t 及任意的 $\mu=1, \dots, n$, 为了使空间 H 包含全部元素 $x_\mu(t)$, 它适合

$$(x_\mu(t'), x_\nu(t'')) = B_{\mu\nu}(t' - t''),$$

只须对任何 n, μ_p, t_p, ξ_p , 成立

$$B = \sum_{p, q=1}^n B_{\mu_p \mu_q}(t_p - t_q) \xi_p \bar{\xi}_q \geq 0.$$

这个要求总是能满足的, 因为如果令

$$\xi_p(\lambda) = e^{it_p \lambda} \xi_p, \quad \xi_\mu(\lambda) = \sum^{(\mu)} \xi_p(\lambda),$$

其中 $\sum^{(\mu)}$ 是对于所有满足 $\mu_p = \mu$ 的 p 求和, 则依 (3-15) 式可得

$$\begin{aligned} B &= \sum_{p, q=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t_p - t_q)\lambda} dF_{\mu_p \mu_q}(\lambda) \xi_p \bar{\xi}_q \\ &= \sum_{p, q=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} \xi_p(\lambda) \overline{\xi_q(\lambda)} dF_{\mu_p \mu_q}(\lambda) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\mu, \nu=1}^n \xi_\mu(\lambda) \overline{\xi_\nu(\lambda)} dF_{\mu\nu}(\lambda) \geq 0, \end{aligned}$$

从而存在 H 中的元素 $x_\mu(t)$ 使

$$B_{x_\mu x_\nu}(k) = (x_\mu(t+k), x_\nu(t)) = B_{\mu\nu}(k),$$

所以序列

$$\{x_1(t)\}, \{x_2(t)\}, \dots, \{x_n(t)\}$$

是平稳且平稳相关的. 容易看出

$$F_{x_\mu x_\nu}(\lambda) = F_{\mu\nu}(\lambda).$$

至此定理 4 全部获证.