初中数理化学习丛书

初中数学

学习·训练·实践

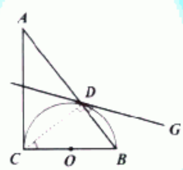
（二）

名师精讲解难

各类题型俱全

提高能力必读

中考取胜必备



JINDUN CHUBANSHE
金盾出版社

初中数理化学习丛书

初　中　数　学
学习·训练·实践
（二）

丛书主编　门树慧　李国岚　杨正钊
本书编著　门树慧　何怡生　贾　娜

金盾出版社

内 容 提 要

本书包括初二数学全部内容，其中代数四章，平面几何三章。每章分为“导学”、“解题方法”、“解题训练与检测”、“趣味·实践·思考”四部分。在“导学”中，深入浅出地分析知识结构、重要概念、公式、法则及重点和难点，配有典型例题，介绍掌握重点知识和克服难点的方法；在“解题方法”中，介绍本章所用的解题方法，所配例题新颖，题型齐全，难易得当，适应性广，以提高学生的解题能力和分析问题能力；在“解题训练与检测”中，配有基本题、提高题和期末综合练习题，书后附有提示和答案，便于学生自检；在“趣味·实践·思考”中，包括趣味知识、相关实践活动、思考练习等。本书供初二学生使用，也可供初中数学教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

初中数学 学习·训练·实践(二)/门树慧等编著.—北京：金盾出版社，2002.6

(初中数理化学习丛书/门树慧，李国岚，杨正钊主编)

ISBN 7-5082-1911-2

Ⅰ.初… Ⅱ.门… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 021138 号

金盾出版社出版、总发行

北京太平路 5 号(地铁万寿路站往南)

邮政编码:100036 电话:68214039 68218137

传真:68276683 电挂:0234

封面印刷:北京百花彩印有限公司

正文印刷:北京 3209 工厂

各地新华书店经销

开本:850×1168 1/32 印张:10.25 字数:276 千字

2002 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

印数:1—15000 册 定价:11.50 元

前　　言

21 世纪是我国教育改革和创新的世纪，而教育改革和创新的核心在于培养学生的创新精神和实践能力，因此，素质教育已成为当前教育实践和发展的主题。在学科教育中，为了帮助学生学好数理化知识，提高学生的综合素质和创新与实践的能力，我们编写了这套“初中数理化学习丛书”。

本套丛书的内容以九年义务教育初中教学大纲为指导，以人民教育出版社出版的现行教材为依据，并与教学同步。全套丛书包括：《初中数学 学习·训练·实践(一)》、《初中数学 学习·训练·实践(二)》、《初中数学 学习·训练·实践(三)》、《初中物理 学习·训练·实践(一)》、《初中物理 学习·训练·实践(二)》和《初中化学 学习·训练·实践》，共六册。这套丛书理论阐述简明，解题方法巧妙，其内容有广泛的适应性和实用性，不仅适合在校学生平时阅读，也是毕业班学生复习总结所学知识、准备中考的必备读物，同时也可供任课教师参考。

本套丛书各分册的每章分为“导学”、“解题方法”、“解题训练与检测”、“趣味·实践·思考”四部分。在“导学”中，深入浅出地分析知识结构、重要概念、公式、法则及重点和难点，配有典型导学例题，说明掌握重点知识及克服难点的方法；在“解题方法”中，介绍本章所用的解题方法，并配有选材新颖的例题，解题方法不落窠臼，题型齐全，难易得当，适应性广，以提高学生的解题能力和分析问题能力；在“解题训练与检测”中，配有基本题、提高题和期末综合练习题，书后附有提示和答案，便于学生自检；为了提高学生的实践能力和学习数理化的兴趣，每章第四部分“趣味·实践·思考”中配有实践活动、理化趣味实验及思考练习。在初三部分，为了帮助学生升学考试前进行总复习，书中有“中考之窗”，安排了有关内

容。

本丛书由北京教育学院长期从事中学数学、物理教师培训教学和教学法研究的门树慧教授、李国岚教授和北京市海淀区中学化学学科带头人杨正钊高级教师主编。

参加本书编写的还有周玉芹、李正、任如芬、牛佳耘、母艾等。

囿于编者水平所限，书中难免有疏漏之处，望广大读者批评指正。

初中数理化学习丛书编委会

2002.4

目　录

代　数

平面几何

代　数

第八章　因式分解

一、导　　学

【知识结构】

- 因式分解
  - 因式分解定义：$m(a+b+c)\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftharpoons}}ma+mb+mc$
  - 因式分解的方法
    - 提公因式法
      - 公因式为单项式
      - 公因式为多项式
    - 公式法
      - 平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
      - 完全平方公式：$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$
      - 立方和(差)公式：$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$
    - 分组分解法
      - 分组后提公因式法
      - 分组后运用公式法
    - 十字相乘法

【目的要求】

1. 了解因式分解的意义及其与整式乘法的区别和联系.

2. 掌握提公因式法、运用公式法、分组分解法、十字相乘法这四种分解因式的基本方法，会用这些方法进行多项式的因式分解.

【重点难点】

因式分解的四种基本方法是本章的重点.

灵活地综合运用四种基本方法分解因式是本章的难点.

【学习导引】

(一) 提公因式法分解因式

提公因式法实际是乘法分配律的逆推.

$ma+mb+mc=m(a+b+c)$,这里的 m 可以是单项式,也可以是多项式,m 称为公因式.确定公因式的方法:(1)系数:取多项式各项系数的最大公约数.(2)字母(或多项式因式):取各项都含有的字母(或多项式因式)的最低次幂.

例 1 分解因式 $6x^6y^2z^3-10x^4y^3z^2$.

解:$6x^6y^2z^3-10x^4y^3z^2=2x^4y^2z^2(3x^2z-5y)$.

例 2 分解因式 $-4a^2b^3+6a^3b^2-2ab$.

解:原式 $=-(4a^2b^3-6a^3b^2+2ab)$

$=-2ab(2ab^2-3a^2b+1)$.

注意 (1) 多项式第一项若为负,一般先提负号,或者通过改变项的位置的方法,使第一项为正.

(2) 若多项式某一项为公因式,提取后,相应位置应用"1"补齐,防止缺项的错误.

例 3 分解因式 $5a(a-2b)^2-20b(2b-a)^2$.

分析:$(a-2b)^2=(2b-a)^2$.

解:原式 $=5a(a-2b)^2-20b(a-2b)^2$

$=5(a-2b)^2(a-4b)$.

例 4 分解因式 $-7(m-n)^3+21(n-m)^2-28(n-m)^3$.

分析:$(m-n)^3=-(n-m)^3$.

解:原式 $=7(n-m)^3+21(n-m)^2-28(n-m)^3$

$=7(n-m)^2[n-m+3-4(n-m)]$

$=7(n-m)^2(3m-3n+3)$

$=21(n-m)^2(m-n+1)$.

注意 (1) 分解因式的结果不许有双重或三重括号.

(2) 括号内若有同类项,应加以合并.

(3) 分解结果必须到每个因式都不能再分解为止.

(4) 倒数第二步中,“3”提出后,不要忘写“1”.

例 5 分解因式 $x(x-y)^3+y(y-x)^3$.

解:原式 $=x(x-y)^3-y(x-y)^3$

$=(x-y)^3(x-y)$

$=(x-y)^4$.

注意 分解结果中,相同因式要写成幂的形式.

有些计算题,按一般步骤计算比较麻烦,认真观察题目特点,巧妙地运用因式分解法,可使计算简化.

例 6 计算 $-\frac{3}{4}\times21+(-12)\times\frac{3}{4}-(-3)\times\left(-\frac{3}{4}\right)$.

解:原式 $=-\frac{3}{4}\times21-12\times\frac{3}{4}-3\times\frac{3}{4}$

$=-\frac{3}{4}(21+12+3)$

$=-\frac{3}{4}\times36=-27$.

(二) 公式法分解因式

因式分解应用的公式和乘法公式是互逆的,因此把乘法公式反过来就得到因式分解的五个公式:

(1) 平方差公式:$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(2) 完全平方公式:$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(3) 立方和公式:$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(4) 立方差公式:$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

分解因式时首先应考虑是否有公因式,之后再考虑能否用公式法分解因式.考虑能否用公式法分解因式时,一般按以下步骤进行:

1. 若多项式为两部分,则

(1) 这两部分符号相反时,考虑能否用平方差公式或立方差公式分解因式;

(2) 这两部分符号相同时,考虑能否用立方和公式分解因式.

2. 若多项式为三部分,其中有两部分符号相同,并且这两部分都可化为完全平方公式或完全平方公式的相反数,则考虑用完

全平方公式分解因式.

例 7 分解因式

(1) $4x^2-9y^2$

(2) $25(a-b)^2-4(a+b)^2$

(3) $\frac{1}{2}a^3-8a$.

分析:前两题明显要用平方差公式进行分解;第(3)题提公因式后还可用平方差公式继续分解.在应用平方差公式时,第一步要尽量使原题化成$(\quad)^2-(\quad)^2$的形式.

解:(1) 原式$=(2x)^2-(3y)^2=(2x+3y)(2x-3y)$.

(2) 原式$=[5(a-b)]^2-[2(a+b)]^2$

$=[5(a-b)+2(a+b)][5(a-b)-2(a+b)]$

$=(7a-3b)(3a-7b)$.

(3) 原式$=\frac{1}{2}a(a^2-16)$

$=\frac{1}{2}a(a+4)(a-4)$.

例 8 分解因式

(1) $1-6a+9a^2$

(2) $-x^2-4y^2+4xy$

(3) $(m+n)^2-12(m+n)+36$

(4) $(x^2-2x)^2+2(x^2-2x)+1$.

分析:应先把各式整理成 $a^2\pm2ab+b^2$ 的形式,然后确定谁相当于公式中的 a 和 b,从而得到最后结果.

解:(1) 原式$=1-2\cdot3a\cdot1+(3a)^2=(1-3a)^2$.

(2) 原式$=-(x^2+4y^2-4xy)$

$=-[x^2-2\cdot x\cdot(2y)+(2y)^2]$

$=-(x-2y)^2$.

(3) 原式$=(m+n)^2-2\times(m+n)\times6+6^2$

$=(m+n-6)^2$.

(4) 原式$=(x^2-2x)^2+2\times(x^2-2x)\times1+1^2$

$$=(x^2-2x+1)^2$$
$$=[(x-1)^2]^2$$
$$=(x-1)^4.$$

注意 (4)中$(x^2-2x+1)^2$必须分解到不能再分解为止.

例 9 分解因式

(1) $8a^3+27b^3$

(2) $64x^3y^3-125$

(3) $\frac{1}{2}a^5b^4-4a^2b$.

解：(1) 原式$=(2a)^3+(3b)^3$
$$=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2).$$

(2) 原式$=(4xy)^3-5^3$
$$=(4xy-5)(16x^2y^2+20xy+25).$$

(3) 原式$=\frac{1}{2}a^2b(a^3b^3-8)$
$$=\frac{1}{2}a^2b(ab-2)(a^2b^2+2ab+4).$$

注意 (3)题要先考虑提公因式法.

例 10 分解因式

(1) $(5x^3-2y^3)^2-(2x^3-5y^3)^2$

(2) $(a-2b)^2+2a(a-2b)+a^2$.

分析：分解不彻底是这两道题常见的错误.(1)用平方差公式分解后，两个括号内都能再继续分解.

解：

(1) 原式$=[(5x^3-2y^3)+(2x^3-5y^3)][(5x^3-2y^3)-(2x^3-5y^3)]$
$$=(7x^3-7y^3)(3x^3+3y^3)$$
$$=7(x^3-y^3)\cdot 3(x^3+y^3)$$
$$=21(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2).$$

(2) 原式$=[(a-2b)+a]^2$
$$=(2a-2b)^2$$
$$=[2(a-b)]^2$$

$=4(a-b)^2$.

注意　(1)中只分解到$(7x^3-7y^3)(3x^3+3y^3)$是常见错误.(2)常见错误有2处:(ⅰ)只分解到$(2a-2b)^2$.(ⅱ)倒数第二步易错写成$2(a-b)^2$,应注意添加中括号.

例11　分解因式

$$(x-y)^3+2(x^2-y^2)(x-y)+(x^2-y^2)(x+y).$$

思路:为了提取公因式,可将每一部分中可分解的多项式进行分解.

解:原式$=(x-y)^3+2(x+y)(x-y)^2+(x-y)(x+y)^2$

$=(x-y)[(x-y)^2+2(x+y)(x-y)+(x+y)^2]$

$=(x-y)[(x-y)+(x+y)]^2$

$=(x-y)(2x)^2$

$=4x^2(x-y)$.

注意　(1) $(2x)^2\neq 2x^2$.

(2) 分解结果单项式$4x^2$应写在前面.

例12　分解因式　x^6-y^6.

分析:此题既可先用平方差公式分解,又可先用立方差公式分解.但先用平方差公式分解较简便.

解法一:原式$=(x^3)^2-(y^3)^2$

$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

解法二:原式$=(x^2)^3-(y^2)^3$

$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

$=(x+y)(x-y)[x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2]$

$=(x+y)(x-y)[(x^2+y^2)^2-x^2y^2]$

$=(x+y)(x-y)(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$.

注意　两种方法分解的结果是一样的,但第二种方法中须把x^2y^2变成$2x^2y^2-x^2y^2$,配方后再分解因式,较麻烦.因此,一般情况下,对于一个多项式,既可先用平方差公式、又可先用立方差公式分解时,要先用平方差公式.

例 13 计算

(1) $(63.5)^2-(36.5)^2$

(2) 99.8^2

(3) $52^2+48^2+52\times96$.

分析：若直接计算，比较繁．认真观察数字特点，巧妙地运用因式分解法，可使计算简化．

解：(1) 原式 $=(63.5+36.5)(63.5-36.5)$

$=100\times27=2700$.

(2) 原式 $=(100-0.2)^2$

$=100^2-2\times100\times0.2+0.2^2$

$=10000-40+0.04$

$=9960.04$.

(3) 原式 $=52^2+48^2+2\times52\times48$

$=(52+48)^2$

$=10000$.

(三) 分组分解法分解因式

分组分解法比较灵活，它不像提公因式法和运用公式法有固定的模式，但分组也绝不是乱分，是有规律可循的．分组不是目的，只是一种手段，其基本原则是分组后各组之间又有公因式可提或分组后能运用公式．由于分组没有通法，因此一定要具体问题具体分析．

例 14 分解因式 $ac+bd+ad+bc$.

分析：观察可知，本题分组后能继续分解的唯一可能是各组中有公因式可提，因此应将有公因式的项归为一组．分组后能直接提公因式，是分组分解法的原则之一．

解法一：原式 $=(ac+ad)+(bd+bc)$

$=a(c+d)+b(d+c)$

$=(c+d)(a+b)$.

解法二：原式 $=(ac+bc)+(bd+ad)$

$=c(a+b)+d(b+a)$

$=(a+b)(c+d)$.

例 15 分解因式 $4m^4+m^3-32m-8$.

解法一：原式 $=(4m^4+m^3)-(32m+8)$

$$=m^3(4m+1)-8(4m+1)$$

$$=(4m+1)(m^3-8)$$

$$=(4m+1)(m-2)(m^2+2m+4).$$

解法二：原式 $=(4m^4-32m)+(m^3-8)$

$$=4m(m^3-8)+(m^3-8)$$

$$=(m^3-8)(4m+1)$$

$$=(m-2)(m^2+2m+4)(4m+1).$$

说明 选择系数成比例的项分为一组，是适当分组的常用方法. 如解法一中，$4:1=32:8$，解法二中，$4:(-32)=1:(-8)$.

例 16 分解因式 $x^2y-x^2z+y^2z-y^3$.

分析：z 恰好出现在两项中，故可按含 z 与不含 z 进行分组.

解：原式 $=(x^2y-y^3)+(-x^2z+y^2z)$

$$=y(x^2-y^2)-z(x^2-y^2)$$

$$=(x^2-y^2)(y-z)$$

$$=(x+y)(x-y)(y-z).$$

注意 一定要分解到每个因式都不能再分解为止.

例 17 分解因式

(1) $x^2-y^2-z^2-2yz-2x+1$

(2) $m^3+n^3-m^2n-mn^2$.

解：(1) 原式 $=(x^2-2x+1)-(y^2+2yz+z^2)$

$$=(x-1)^2-(y+z)^2$$

$$=[(x-1)+(y+z)][(x-1)-(y+z)]$$

$$=(x-1+y+z)(x-1-y-z)$$

$$=(x+y+z-1)(x-y-z-1).$$

(2) 原式 $=(m^3+n^3)-(m^2n+mn^2)$

$$=(m+n)(m^2-mn+n^2)-mn(m+n)$$

$$=(m+n)(m^2-mn+n^2-mn)$$

$$=(m+n)(m^2-2mn+n^2)$$

$$=(m+n)(m-n)^2.$$

说明 分组后能直接运用公式，也是适当分组的原则之一．在分组时，经常会用到加法交换律与结合律，以及添(去)括号法则，所以要注意各项的符号．

例 18 分解因式 $a^2+4ab+4b^2-2a-4b+1$.

解：原式 $=(a^2+4ab+4b^2)-(2a+4b)+1$

$$=(a+2b)^2-2(a+2b)+1$$

$$=(a+2b-1)^2.$$

例 19 分解因式 $x^2y-x^2+xy^2-x-y+y^2$.

解法一：原式 $=x^2y+xy^2-x^2+y^2-x-y$

$$=xy(x+y)-(x^2-y^2)-(x+y)$$

$$=(x+y)[xy-(x-y)-1]$$

$$=(x+y)[(xy+y)-x-1]$$

$$=(x+y)(x+1)(y-1)$$

$$=(x+1)(y-1)(x+y).$$

解法二：原式 $=(x^2y-x^2)+(xy^2-x)-(y-y^2)$

$$=x^2(y-1)+x(y+1)(y-1)-y(1-y)$$

$$=(y-1)(x^2+xy+x+y)$$

$$=(x+1)(y-1)(x+y).$$

说明 多于 4 项的多项式，有时可按项的次数分组(如解法一，是按 3 次项，2 次项，1 次项分组)；有时也可以按某一字母的幂分组(如解法二，是按 x 的降幂分组)．

对于多项式是 4 项的，一般有以下两种分组模式：

(1) 2—2 分组后，组间提公因式．(如例 14)

(2) 3—1 分组后，组间用平方差公式．(如下例)

例 20 分解因式 x^2-y^2-2y-1.

分析：尝试 2—2 分组后，发现不能分解，考虑 3—1 分组，将可用完全平方公式分解的 3 项分为一组，剩下的单独一组，组间用平方差公式继续分解．

解：原式 $=x^2-(y^2+2y+1)$

$$= x^2 - (y+1)^2$$
$$= [x+(y+1)][x-(y+1)]$$
$$= (x+y+1)(x-y-1).$$

例 21 分解因式 $3(ab+cd)-(bc+9ad)$.

分析:题目中给出的分组不合适,应将各括号打开后重新分组.

解:原式 $= 3ab+3cd-bc-9ad$
$$= (3ab-bc)+(3cd-9ad)$$
$$= b(3a-c)+3d(c-3a)$$
$$= (3a-c)(b-3d).$$

(四)十字相乘法

对于二次三项式 x^2+px+q,如果能够找到数 a 和 b,使得它们的和为 p,积为 q,那么它就可以分解因式为

$$x^2+px+q = x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b).$$

运用这个公式,可以把某些二次项系数为 1 的二次三项式分解因式.

分解时,首先分解常数项 q,然后再考虑 p,对于 q 的分解,要注意符号,其规律为:

1. 若 $q>0$,则 a、b 同号;当 $p>0$ 时,a、b 同正,当 $p<0$ 时,a、b 同负.

2. 若 $q<0$,则 a、b 异号;a、b 中绝对值较大的数的符号与 p 的符号相同.

例 22 分解因式

(1) x^2+5x+6

(2) x^2-5x+6

(3) x^2+5x-6

(4) x^2-5x-6.

分析:(1) $6=2\times3, 2+3=5$

(2) $6=(-2)\times(-3), (-2)+(-3)=-5$

(3) $-6=(-1)\times6, (-1)+6=5$

(4) $-6=(-6)\times1, (-6)+1=-5$.

解:(1) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.

(2) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.