北京市城近郊区

主编　石翠花

小学数学
奥林匹克讲义

（五年级分册）

北京科学技术出版社

北京市城近郊区

小学数学奥林匹克讲义

（五年级分册）

石翠花　主编

北京科学技术出版社

1993

图书在版编目(CIP)数据

小学数学奥林匹克讲义:五年级分册/石翠花主编. -北京:北京科学技术出版社,1999.10 重印

ISBN 7-5304-1421-6

Ⅰ.小… Ⅱ.石… Ⅲ.数学课-小学-补充教材 Ⅳ.G624.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 05921 号

北京科学技术出版社出版

(北京西直门南大街 16 号)

邮政编码 100035

各地新华书店经销

北京市飞龙印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本 5.25 印张 115 千字

1993 年 5 月第一版 1999 年 10 月第九次印刷

印数 87001—92000

定价:6.80 元

前　言

把课上教学与学科课外活动有机地结合起来，是当前教学改革的一个重要课题。为此，我们编写了《小学数学奥林匹克讲义》这套书，供北京市城近郊区小学数学奥林匹克班的学生作教材使用及其他学生课外阅读参考。本套书分三、四、五、六年级分册共四册。

本套书本着与课上知识同步，源于教材、又高于教材的原则，力求使学生掌握一些基本的数学方法，培养学生学习数学的兴趣，开发智力。

本套书内容是根据小学数学竞赛大纲的要求编排的。通过典型的例题，对小学数学知识范围内所涉及的数学思维方法做了深入浅出的分析，并配有适当的练习题，供同学们练习思考，书后附有练习答案。

参加本套书编写的同志都是长期从事小学数学奥林匹克竞赛训练、辅导工作的老教师及北京部分城近郊区小学数学教研室的教研员，本套书是他们多年心血的结晶。

参加本册书（五年级分册）编写的有：石翠花、王淑芳、蒋德荣、段云鑫、蒋京生、唐伯禹、田云成。因时间仓促，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

1993 年 4 月

编 委 会 名 单

（按姓氏笔画为序）

王盛富	石翠花	史雁群
刘玉兰	刘尔毅	吉启平
张德勤	李异芳	李树德
杨树华	郭健康	

责任编辑:施　超
　　　　　韩　杨
封面设计:李绍刚

ISBN 7-5304-1421-6

9 787530 414217 >

ISBN 7－5304－1421－6/Z・626

定价:6.80 元

目　　录

一、各排有多少个座位

某电影院的座位排列成扇面形，第一排有 60 个座位，以后每排都比前一排多 2 个座位，共有 50 排，各排座位数依次为 60，62，64，66，68……如果不逐排去数，你能知道第 32 排和第 50 排各有多少个座位吗？

我们先来研究一下该列数的构成规律。如果我们把这列数中的第一个数叫做第 1 项，第二个数叫做第 2 项，第三个数叫做第 3 项，……，第 n 个数叫做第 n 项，那么这列数中的每项都等于前面的一项加上 2。

象这种，从第 2 项起，每一项减去它的前一项所得的差等于同一个常数的数列，叫做等差数列。这个常数叫做公差，用 d 表示。

例如：1，4，7，10，13，……是公差为 3 的等差数列；0，5，10，15，20，……是公差为 5 的等差数列。2，3，5，7，11，……则不是等差数列。

想一想：下列各数列中，哪些是等差数列？

(1)　1，2，4，8，16，32，……；

(2)　4，8，12，16，20，24，……；

(3)　1，4，9，16，25，36，……；

(4)　1，3，5，7，9，11，……；

(5)　0.2，0.4，0.6，0.8，0.10，0.12，……。

在等差数列中，第 1 项记作 a_1，第 2 项记作 a_2，第 3 项记作 a_3，……，第 n 项记作 a_n。

观察等差数列 1,4,7,10,13,……的各项有如下规律:

$a_1=1$

$a_2=1+3=1+(2-1)\times 3$

$a_3=4+3=(1+3)+3=1+2\times 3=1+(3-1)\times 3$

$a_4=7+3=(1+2\times 3)+3=1+3\times 3=1+(4-1)\times 3$

…………………

注意等号右边公差 3 前边所乘的数比项数少 1,所以 $a_n=1+(n-1)\times 3$

再看等差数列 2,6,10,14,18,……的各项也有这样的规律:

$a_1=2$

$a_2=2+4=2+(2-1)\times 4$

$a_3=6+4=(2+4)+4=2+2\times 4=2+(3-1)\times 4$

$a_4=10+4=(2+2\times 4)+4=2+3\times 4=2+(4-1)\times 4$

…………………

$a_n=2+(n-1)\times 4$

练一练:等差数列 3,5,7,9,11,……的各项怎样用第一项、项数、公差来表示。

一般的,有

$a_2=a_1+d=a_1+(2-1)\times d$

$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2\times d=a_1+(3-1)\times d$

$a_4=a_3+d=(a_1+2\times d)+d=a_1+3\times d$

$\quad=a_1+(4-1)\times d$

…………………

$a_n=a_1+(n-1)\times d$

这就是说,等差数列中,从第 2 项起,每一项都等于第 1

项加上公差的若干倍，这个倍数等于这一项的项数减 1。

我们只要记住上面的最后一个公式，就能算出任意一项的值，方法就是这一项的项数去代换公式中的 n，所以我们把这个公式叫做等差数列的通项公式。

通项公式可以记作：

第 n 项＝第 1 项＋(项数－1)×公差　$a_n=a_1+(n-1)\times d$

这个公式经过变形，可以得出：

第 1 项＝第 n 项－(项数－1)×公差　$a_1=a_n-(n-1)\times d$

公差＝(第n项－第1项)÷(项数－1)　$d=(a_n-a_1)\div(n-1)$

项数＝(第 n 项－第 1 项)÷公差＋1　$n=(a_n-a_1)\div d+1$

可以看出，在等差数列的第 n 项、第 1 项、项数和公差这四个量中，随便知道哪三个量都可以算出第四个量的值。

例 1　本文开头所说的电影院的座位组成等差数列为

60，62，64，66，68，……

问这个电影院的第 32 排和最后一排(即第 50 排)各有多少个座位？

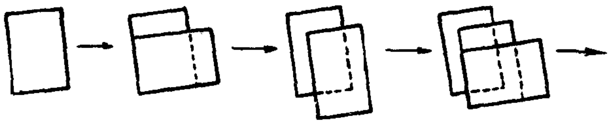
分析与解答　这个等差数列的第 1 项 $a_1=60$，公差 $d=62-60=2$。要求的是第 32 项 a_{32}和第 50 项 a_{50}。根据等差数列的通项公式得

$$a_{32}=60+(32-1)\times 2=122$$

$$a_{50}=60+(50-1)\times 2=158$$

答：这个电影院的第 32 排有 122 个座位，第 50 排有 158 个座位。

例 2　有 10 张长 3 厘米、宽 2 厘米的纸片，将它们按照下图的样子摆在桌面上。



那么10张纸片所盖住的桌面的面积是多少平方厘米？

分析与解答　如图，第二个图比第一个图多出了2平方厘米，第三个图又比第二个图多出了2平方厘米，后面每多放一张纸片就比原来多出2平方厘米，所以这些图的面积组成等差数列(单位：平方厘米)

6,8,10,12……

它的第1项 $a_1=6$，公差 $d=2$，要求的是第10项

$a_{10}=6+(10-1)\times 2=24$(平方厘米)

答：10张纸片盖住的桌面面积是24平方厘米。

例3　甲乙二人都住在同一胡同的同一侧，这一侧的门牌号码是连续的奇数，甲住在21号，乙住在193号，甲乙二人的住处相隔着多少个门？

分析与解答　甲乙二人住处之间的门牌号组成等差数列

21,23,25,…,193

它的第1项 $a_1=21$，公差 $d=2$，最后一项 $a_n=193$，要求这最后一项的项数。由等差数列通项公式的变形公式可得

$n=(193-21)\div 2+1=87$

由此可知，从门牌21号到193号共有87个门牌号，所以甲乙二人住处相隔 $87-2=85$ 个门。

答：甲乙二人的住处相隔85个门。

例4　在5和25之间插入4个数，使它们组成等差数列，求这4个数。

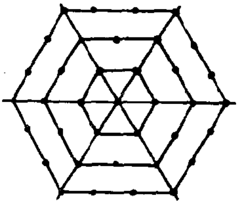
分析与解答　25 是这个等差数列的第 6 项。要求中间插入的 4 个数，只要求出每两个数之间差几就行了。

这是已知 $a_1=5$，$a_6=25$，$n=6$，求公差 d 的问题。由等差数列通项公式的变形公式得

$d=(25-5)\div(6-1)=4$

再求 $a_2=5+4=9$，$a_3=5+2\times4=13$，$a_4=5+3\times4=17$，$a_5=5+4\times4=21$

答：中间插入的 4 个数依次是 9，13，17，21。



例 5　如图是一个六边形的点阵，中心是一个点为第一层，第二层每边两个点，第三层每边三个点，其余类推。问在该点阵中，(1)第 20 层的一圈有多少个点？(2)第几层的一圈有 72 个点？

分析与解答　由图可以看出，这个六边形点阵各层的点数顺次排列如下：

1，6，12，18，24，……

仔细观察，这列数除第一个数外，后面的数顺次组成一个等差数列，其中，$a_1=6$，$d=6$。

(1)第 20 层一圈的点数是等差数列的第 19 项。根据等差数列的通项公式，得

$a_{19}=6+(19-1)\times6=114$

(2)由等差数列通项公式的变形公式，得

$n=(72-6)\div6+1=12$

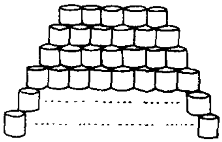
层数是 $12+1=13$

答：(1)第 20 层的一圈有 114 个点；(2)第 13 层的一圈有 72 个点。

习 题 一

(1)已知等差数列 5,9,13,17…,求第 15 项和第 32 项。

(2)食品店橱窗里的罐头摆成如图所示的形状,它的最上层码了 5 桶,以下第一层都比上一层多码 1 桶,共码了 6 层,问最下面一层有多少桶罐头?



(3)下面的一列数是不是等差数列?求出它的第 100 项。

2+5,4+8,6+11,8+14,10+17,……

(4)100 名学生站成一排由排头按一、二、三…顺次报数,问报数是 7 的倍数的学生有多少人?

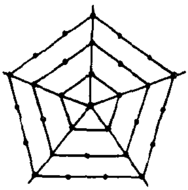
(5)被 4 除余 1 的两位数共有多少个?

(6)一个等差数列的第 1 项是 1.2,第 3 项是 1.8,求它的第 20 项。

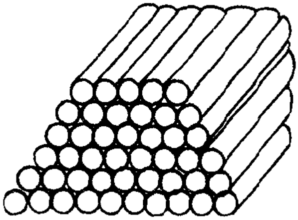
(7)梯子的最高一级宽 33 厘米,最低一级宽 110 厘米,中间还有 10 级,各级的宽度成等差数列,计算中间各级的宽度。

(8)在铁路一侧有 41 根电线杆,第 1 根与第 2 根之间距离 60 米,由第 2 根以后每两根之间距离都是 50 米,一旅客在行进的火车中,从经过第 1 根电线杆起,到经过第 41 根电线杆止,恰好过了 3 分钟,求这列火车的速度。

(9)如图所示是一个五边形的点阵,中心是一个点为第一层,第二层每边两个点,第三层每边三个点,其余类推。问这个点阵中:①第 25 层一圈共有多少个点?②第几层一圈共有 185 个点?



二、共有多少根钢管

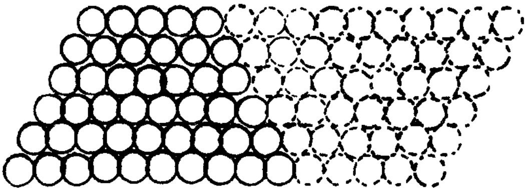


马路边堆放着一堆钢管，如图所示，最下面一行有 10 根钢管，最上面一行有 5 根钢管，共有 6 行，问共有多少根钢管？

如果一根一根地去数，虽然可以数清，但是行数越多，数起来就越麻烦，因此我们需要找出一个简便的计算方法。

我们假想，如下图那样，在这堆钢管的旁边倒放着同样的一堆钢管，这样，每层的钢管数都相等，即

$5+10=6+9=7+8=\cdots=10+5$



由于共有 6 层，两堆钢管的总数是$(5+10)\times6=90$，因此所求的钢管总数是

$(5+10)\times6\div2=45$

由此得出

$5+6+7+8+9+10=(5+10)\times6\div2$

这个等式告诉我们，等差数列 5，6，7，8，9，10 所有各项的和等于(首项＋末项)×项数÷2。显然，利用这个公式计算比

逐个去数要简便多了。

上面的公式对一般的等差数列全都适用。也就是说，对于等差数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 来说，如果用符号 S_n 表示前 n 项的和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$，那么

$$S_n=(a_1+a_n)\times n\div 2$$

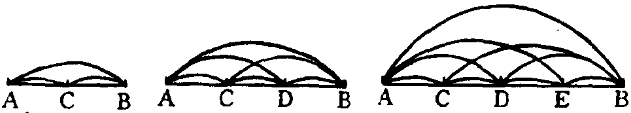
例 1　求等差数列 5，15，25，…，95 的各项和。

分析与解答　这个等差数列的第一项 $a_1=5$，公差 $d=15-5=10$，第 n 项 $a_n=95$，则

$$n=(a_n-a_1)\div d+1=(95-5)\div 10+1=10$$

$$S_{10}=(a_1+a_{10})\times n\div 2=(5+95)\times 10\div 2=500$$

例 2　一条线段 AB 上有 20 个分点，问共得到多少条不同的线段？



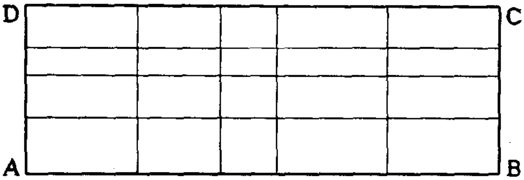
分析与解答　如图所示，一个分点 C 把线段 AB 分成 2 条短线段 AC、CB 和 1 条长线段 AB，共 1+2 条线段，二个分点 C、D 把线段 AB 分成 3 条短线段 AC、CD、DB，2 条中线段 AD、CB 和 1 条长线段 AB，共 1+2+3 条线段。由此推得 20 个分点把线段 AB 分成 1+2+3+…+21 条线段，根据等差数列的前 n 项和公式，得

$$1+2+3+\cdots+21=(1+21)\times 21\div 2=231$$

所以共分成 231 条线段。

例 3　如图所示，*ABCD* 是一个长方形，长方形内每条竖

线都平行于 BC，每一条横线都平行于 AB，问图中共有多少个长方形？



分析与解答 通过对上图的观察可以看出这个问题与数线段问题有十分密切的关系。首先在 AB 线段上共有 $(1+5)\times 5\div 2=15$(条)线段，在 AD 线段上共有 $(1+4)\times 4\div 2=10$(条)线段。我们把 AB 上的每条横线段作为长方形的长，把 AD 上的每条竖线段作为长方形的宽，都可组成一个长方形，所以图中共有

$$15\times 10=150$$

个长方形。

例 4 求所有被 4 除余 1 的两位数之和。

分析与解答 由上一节习题一(5)可知，被 4 除余 1 的所有两位数组成 22 项的等差数列

13，17，21，…，97

这个等差数列的前 22 项之和为

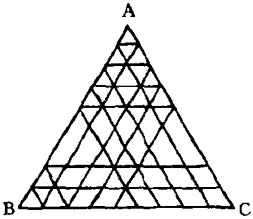
$$\begin{aligned}S_{22}&=(13+97)\times 22\div 2\\&=1210\end{aligned}$$

所以所有被 4 除余 1 的两位数之和为 1210。

例 5 一个等边三角形 ABC 边长为 1 米，每隔 2 厘米在边上取一点，再从这点出发分别作与其它两边平行的直线，并且与其它两边相交。(1)求边长为 2 厘米的等边三角形的个

数；(2)求所作平行线的总长度。

分析与解答 (1)观察示意图，自上而下地数，边长为2厘米的等边三角形的个数组成等差数列1，3，5，……。



$a_1=1, d=2, n=100\div2=50$(共有50行)。根据通项公式，最后一项为

$a_n=1+(50-1)\times2=99$

所以边长为2厘米的等边三角形共有

$1+3+5+\cdots+99=(1+99)\times50\div2=2500$(个)。

(2) 观察示意图，所作平行线按与三条边平行的不同方向分各有49条。每组平行线的长度组成相同的等差数列2，4，6，…，98，共有49项。它的和为

$2+4+6+\cdots+98=(2+98)\times49\div2=2450$(厘米)

所以三组平行线的总长度为 $2450\times3=7350$(厘米)。

习 题 二

(1)求等差数列0.04，0.11，0.18，……的前15项的和。

(2)求前100个自然数的和。

(3)求前 n 个自然数的和。

(4)等差数列1，4，7，10，13，16，……，共有80项，求其中所有奇数项的和。

(5)把1988表示成28个连续偶数的和，求其中最大的那个偶数。

(6)下图中共有多少个三角形？