点集拓扑学初步

江泽涵 编

上海科学技术出版社

点集拓扑学初步

江 泽 涵

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是作者的《拓扑学引论》(1978 年版) 的第一篇的单独重印本。为着更确切地表明本书的内容,改用了现在的书名。

本书从度量空间出发,然后引进拓扑空间,着重说明这两种空间理论中各定理之间的关系与差别。

本书可作为高等院校的选修课拓扑学的教学参考书。

点集拓扑学初步

江 泽 涵

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 上海市印刷三厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 2.625 字数 59,000

1979 年 12 月第 1 版 1979 年 12 月第 1 次印刷

印数 1 — 9,000

书号: 13119·835 定价: 0.34 元

«拓扑学引论»(1978年版)的原序摘录

拓扑学是继欧几里得几何、解析几何、微分几何、射影几何等之后的一种较新的几何学. 作为几何学,它仍然是研究图形(或形状)的科学;它之所以较新,因为它研究的是图形在连续变形下的不变的整体性质. 迟至本世纪最初的二十五年中,国外才相继出现点集拓扑(或称一般拓扑)和代数拓扑的第一个教本. 现在,拓扑学已经形成了点集拓扑、代数拓扑、微分拓扑等分支,已经渗入到并沟通了数学的很多分支,并且通过图形的手段,在其他自然科学和工程技术中有了日益重要的应用.

……………………………………………………………………

作为基础课程的一个教本,内容应精简、直观易懂. 在这方面,作者曾作了一些努力. 例如在第一编中,从度量空间出发引进拓扑空间,把度量空间的定理全部安排在第一章中,尽可能说明一些定理能否推广成第二章拓扑空间的定理以及能否推广的理由;第二章中用§4、§5和§7三节讨论三种特殊的拓扑空间.……全书着重于度量空间这种特殊的几何对象,为更一般的几何对象提供背景.

……………………………………………………………………

本书的出版只是抛砖引玉,衷心盼望国内将出版更多更好的、自编和翻译的这类教本,以发展我国的数学事业、适应科学技术现代化的需要.

江泽涵

1977年10月25日

目　　录

第一章　度量空間

度量空間是 n 維欧几里得空間 E^n 的极为接近、极为自然的推广，而且从它又可以很自然地过渡到更广的、更抽象的、但有必要加以研究的拓扑空間．另一方面，它的范圍已够广泛，包括了在数学中遇到的一些函数空間、Hilbert 空間等；因而度量空間的理論已成为学习近代数学所不可缺少的知識．

本章将介紹度量空間的一些基本概念与性质，以及从度量空間到度量空間的連續映射的一些基本概念与性质．理解它們的最好途徑，是用欧几里得空間 E^n 的相应概念与性质作为模型．至于它們的安排与証明，則将受到下一章中拓扑空間的討論的影响．

1．度量空間・球形邻域

至多三維的欧几里得空間 E^n，$n\leqslant 3$，是我們从直观以及解析几何課程所知道的空間．設 x 与 y 是它的两点，分别以 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为坐标；这两点之間的距离是

$$d(x, y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

当 $n>3$ 时，已經无直观的 E^n；但我們把 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 叫作点 x：$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，而且把 $d(x, y)$ 作为点 x 与点 y 之間的距离，于是得到 n 維的欧几里得空間 E^n，$n>3$．为簡便起見，对于任意正整数 n，我們都把点 x 与 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 看作是等同的．

用 R^n 表示 E^n 的点的集合．R^1 当然就是实数集合．这里我

們严格地用集合这概念；即 R^n 的元素或点完全确定了，但点与点之間未确定任何关系，特别未确定距离关系 d. 集合 R^n 加上距离关系 d 才是我們的 n 維欧几里得空間 E^n；在这意义下，我們說 d 賦予集合 R^n 一个“空間結构”.

从 R^n 到 R^1 的一个对应 $f: R^n \to R^1$ 就是 n 个实变数的一个实值函数 $f(x)$.（只限于单值对应与单值函数.）但当我們說函数 $f(x)$ 連續时，我們就用了距离 d 的概念；所指的实际是对应 $f: E^n \to E^1$. 所以函数 $f(x)$ 的連續性所需要的，不仅有集合概念，还有空間結构的概念.

本节的目的是用 E^n 作背景来引进度量空間.

1.1 定义 設 S 是一个集合，其元素叫作点，記作 x, y, z 等，而且 $\rho: S\times S \to R^1$ 是满足下列三条公理的一个非負实函数*)：

1° $\rho(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2° 对称性：$\rho(y, x)=\rho(x, y)$;

3° 三角形不等式：$\rho(x, z)\leqslant \rho(x, y)+\rho(y, z)$.

点集 S 与函数 ρ 在一起，叫作一个**度量空間**，記作 (S, ρ). S 的点或子集仍分别叫作 (S, ρ) 的点或子集，函数 ρ 叫作 (S, ρ) 的**距离函数**或**度量**，$\rho(x, y)$ 叫作点 x 与 y 之間的**距离**.

例 1.1 n 維的欧几里得空間 $E^n=(R^n, d)$ 是一个度量空間. 距离函数 $d(x, y)$ 显然满足前两条度量公理. 它也满足第三条公理：对于任意正整数 n, $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$；証明见例 A3.

例 1.2 用例 1.1 中的 R^n 作为集合 S，在 S 上定义非負实函数

$$d_1(x, y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

或

$$d_2(x, y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x_i-y_i|\}.$$

*) $S\times S$ 表示集合 $\{(x, y)\,|\,x, y\in S\}$.

可以验证 d_k 满足度量公理,故(R^n, d_k)是度量空间, $k=1$ 或 2.(复习题.)[*]

建议读者对于 $n=2, 3$ 作出 $d_k(x, O)=1$ 的图形,并补出这里未给出的证明,作为复习时的思考题.

例 1.3 **Hilbert 空间** E^ω 从 n 维的欧几里得空间 E^n 中三角形不等式,我们知道,对于 E^n 的三个点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(0, 0, \cdots, 0)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$,有

$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^n y_i^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

既然对于任意正整数 n 这不等式成立,经过取极限(当 n 无限增大),有下列结论:如果序列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$使级数 $\sum\limits_{i=1}^\infty x_i^2$ 与 $\sum\limits_{i=1}^\infty y_i^2$ 收敛,则序列 $\{x_n-y_n\}$ 也使级数 $\sum\limits_{i=1}^\infty (x_i-y_i)^2$ 收敛(只限于无穷序列).

现在定义 Hilbert 空间 E^ω 如下. 它的点 x 是使得级数 $\sum\limits_{i=1}^\infty x_i^2$ 收敛的实数序列 $x=\{x_n\}$. 它的两点 x 与 y 之间的距离是

$$\rho(x, y)=\left[\sum_{i=1}^\infty (x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

它是一个确定的实数,正是上文所说的. 距离函数 ρ 显然满足前两条度量公理. 因为

$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^n (y_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

再经过取极限,就证明了 ρ 也满足第三条度量公理.

空间 E^ω 的子集

$$\{x=\{x_n\} \mid 0 \leqslant x_n \leqslant 1/n\}$$

叫作 Hilbert 空间的**基本方体**.

例 1.4 一些函数空间. 在分析数学中时常遇到以某类函数为元素的集合 S, 而为着便于处理所考虑的问题,又必须在 S 中引进度量 ρ, 使(S, ρ)形成度量空间.

a. 在讨论函数的逼近或一致收敛时,集合 S 的元素是闭区间$a\leqslant t\leqslant b$上的连续函数. 两个元素 $x(t)$ 与 $y(t)$ 只当 $|x(t)-y(t)|$ 在整个区间上都很小,才认为很邻近;明确地说,即引进的度量是

$$\rho(x(t), y(t))=\max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)-y(t)|.$$

---

[*] 此后,一个命题之后出现"(复习题.)"时,都是建议读者补出这命题的证明.

b. 在变分法与微分方程的稳定性理论等中，S 的元素是 $a\leqslant t\leqslant b$ 上具有一至 k 次连续微商的函数. 二元素 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的邻近,不仅要求 $|x(t)-y(t)|$ 很小，而且要求 $|x'(t)-y'(t)|$，$|x''(t)-y''(t)|$，…，$|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|$ 都很小,对于任意 t. 这时候引进的度量是

$$\rho(x(t),\ y(t))=\sum_{i=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|,$$

或

$$=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\{|x(t)-y(t)|,\ |x'(t)-y'(t)|,\ \cdots,\ |x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)|\},$$

参看例1.2.

c. 在积分方程论中,集合 S 同例 1.4a, 但引进的度量是

$$\rho(x(t),\ y(t))=\left[\int_a^b[x(t)-y(t)]^2dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

可以验证,这些函数 ρ 都满足度量公理.（复习题.）

例 1.5　设 S 是任一集合，其元素记作 x, y 等，定义 $\rho(x,\ x)=0$，而 $\rho(x,\ y)=1$ 当 $x\neq y$. 这里的$(S,\ \rho)$是一个度量空间,叫作离散的度量空间.

例 1.6　设$(S,\ \rho)$是任意的一个度量空间. 定义

$$\rho_1(x,\ y)=\rho(x,\ y)/\{1+\rho(x,\ y)\},$$

或

$$\rho_2(x,\ y)=\begin{cases}\rho(x,\ y), & \text{当 } \rho(x,\ y)\leqslant 1,\\ 1, & \text{当 } \rho(x,\ y)>1.\end{cases}$$

这里的 ρ_1 与 ρ_2 都满足度量公理.（复习题.）

设$(S,\ \rho)$是一个度量空间,而且 A 是 S 的一个子集. 用记号 $\rho|A\times A:A\times A\to R^1$ 表示 ρ 限制在 $A\times A$ 上；它显然满足三条度量公理,所以$(A,\ \rho|A\times A)$还是一个度量空间,叫作$(S,\ \rho)$的一个子空间,简记为$(A,\ \rho)$，或甚至于记为 A. 凡遇到 $A\subset S$，而说 A 是$(S,\ \rho)$的子空间时,所指的就是$(A,\ \rho|A\times A)$.

度量空间的子空间还是度量空间. 欧几里得空间的子空间是度量空间,但不一定是欧几里得空间.

要想从已知的度量空间作出新度量空间,除去作子空间外,还可作积空间. 设$(S_1,\ \rho_1)$与$(S_2,\ \rho_2)$是两个度量空间. 命

$$S=S_1\times S_2=\{(x_1,\ x_2)\,|\,x_1\in S_1,\ x_2\in S_2\},$$

$$\rho((x_1,\ x_2),(y_1,\ y_2))=[\rho_1^2(x_1,\ y_1)+\rho_2^2(x_2,\ y_2)]^{\frac{1}{2}}.$$

容易验证$(S,\ \rho)$是一个度量空间；叫作$(S_1,\ \rho_1)$与$(S_2,\ \rho_2)$的**积空间**，记作$(S_1,\ \rho_1)\times(S_2,\ \rho_2)$. 例如$E^n=E^1\times E^{n-1}=(E^1)^n$, $n>1$.

积空间$(S,\ \rho)^n$中的函数可以看作是n元函数.

欧几里得空间的点是用实数来作坐标的. 实数虽然不能用来刻划一般的度量空间的点，但能用来刻划度量空间的两点的远近.

1.2 定义 设a是度量空间$X=(S,\ \rho)$的任一点，ε是任一正数. X中的、满足不等式$\rho(x,\ a)<\varepsilon$的点x的集合，叫作点a的、在X中的一个**球形邻域**，记作$U(a,\ \varepsilon)$.

在不会引起混淆时，只说$U(a,\ \varepsilon)$是a的一个球形邻域，而省略不提“在$(S,\ \rho)$中的”.

建议读者在平面与空间(即$n=2,\ 3$)的直角坐标系中，作出例1.2的单位球形邻域的图.

1.3 定理 度量空间$X=(S,\ \rho)$的点与它们的球形邻域具有下列二性质：

1° 每一点x都有球形邻域，点x的每一球形邻域都包含x；

2° 如果点x属于两个球形邻域$U(x_i,\ \varepsilon_i)$的交集，$i=1,\ 2$，则x有一球形邻域$U(x,\ \varepsilon)\subset$这交集.

证明 性质1°是明显的. 要证性质2°，只要取$\varepsilon\leqslant\varepsilon_i-\rho(x,\ x_i)$，$i=1,\ 2$. 事实上，设$y$是$U(x,\ \varepsilon)$的任一点. 然后

$$\rho(x,\ y)<\varepsilon\leqslant\varepsilon_i-\rho(x,\ x_i),$$

即有$\rho(x_i,\ y)<\varepsilon_i$；因而$y\in U(x_i,\ \varepsilon_i)$. ▌

在性质2°的陈述与证明中，并未排斥$x_1=x_2$，或$x_1=x_2$而且$\varepsilon_1=\varepsilon_2$.

习 题

1. 試証: Hilbert 空間 E^ω 的任二点 x 与 y 有一"中点" z, 即点 z 使得

$$\rho(x, z)=\rho(y, z)=\frac{1}{2}\rho(x, y).$$

但度量空間不必有此性质; 試用欧几里得平面 E^2 的一个子空間为例說明.

2. 試証: 度量空間中任意一个三角形的两边的长度之差不大于第三边的长度.

3. 設 S 是一个集合, 而且 $\{A_\alpha\}$ 是 S 的一族子集, 这里的下标 α 所取的值的个数可以是有限或无穷. 試証 de Morgan 公式:

$$S-\bigcup_\alpha A_\alpha=\bigcap_\alpha(S-A_\alpha),$$

$$S-\bigcap_\alpha A_\alpha=\bigcup_\alpha(S-A_\alpha).$$

4. 設 $f: S\to T$ 是从集合 S 到集合 T 的单值对应. 試証: 对于 T 的任一子集 B,

$$ff^{-1}(B)\subset B,$$
$$f^{-1}(T-B)=S-f^{-1}(B).$$

2. 四个基本概念: 开集、閉集、閉包、收斂序列

本节从球形邻域出发, 介紹度量空間的一些重要的子集.

2.1 定义 設 A 是度量空間 X 的一个子集. 如果 A 的每一点都有一个球形邻域 $\subset A$, 則 A 叫作 X 的**开集**.

如果 A 的一点 a 有一个球形邻域 $\subset A$, 則点 a 叫作 A 的、在 X 中的一个**內点**. A 的、在 X 中的內点的全体, 叫作 A 的、在 X 中的**內部**, 記作 $\mathrm{Int}\, A$.

在不会引起混淆时, 例如在 X 已經給定时, 我們也把"X 的开

集"，"在 X 中的一个内点"，"在 X 中的内部"等句子中的"X 的"或"在 X 中的"省略不提。

从定义立刻知道

2.1.1 命题 A 是开集 $\Leftrightarrow A$ 是若干球形邻域的并集。（复习题。）

2.1.2 命题 $\mathrm{Int}\,A$ 是开集。

定义 1.2 与 2.1 中的球形邻域都是指以正实数为半徑的球形邻域。如果只限于用以正有理数为半徑的球形邻域，则得到开集的一个新定义。設 $A\subset X$。容易驗証：

2.1.3 命题 A 根据定义 2.1 是 X 的开集 $\Leftrightarrow A$ 根据新定义是 X 的开集。（复习题。）

2.2 定义 度量空間 X 的一个子集 A 叫作 X 的**閉集**，如果 A 在 X 中的余集 $X-A$ 是 X 的**开集**。

例 2.1 如果把集合 $A=\{x|0<x<1\}$ 看作是直綫 E^1 的子集，则 A 是 E^1 的开集。如果把 A 看作是平面 E^2 的子集，则 A 既不是 E^2 的开集，又不是 E^2 的閉集。

2.3 定理 度量空間 X 的开集具有下列三性质：

1° X 与空集 $\emptyset$ 是开集；

2° 两个开集的交集是开集；

3° 任意多个开集的并集是开集。

証 明 性质 1° 与 3° 是明显的。现在証明性质 2°。

如果两个开集 A 与 B 的交集 $A\cap B$ 是空集，则从性质 1°，它是开集。如果 $A\cap B$ 非空集，設点 x 是它的任一点。因为 A 与 B 都是开集，点 x 是它們的内点；从定义 2.1，x 有一邻域*) $U(x,\varepsilon_1)\subset A$，一邻域 $U(x,\varepsilon_2)\subset B$；因而 $U(x,\varepsilon_1)\cap U(x,\varepsilon_2)\subset A\cap B$。从定理 1.3 中的 2°，$x$ 有一邻域 $U(x,\varepsilon)\subset U(x,\varepsilon_1)\cap U(x,\varepsilon_2)$

*) 本章中出现的"邻域"都是球形邻域的簡称。

$\subset A\cap B$. [实际上,如果取 $\varepsilon=\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$,则 $U(x,\varepsilon)=U(x,\varepsilon_1)\cap U(x, \varepsilon_2)$.] 再从定义 2.1, x 是 $A\cap B$ 的内点; 因为 x 是 $A\cap B$ 的任一点,所以 $A\cap B$ 是开集. ▌

2.4 定理　度量空間 X 的閉集具有下列三性质:

1° X 与空集 $\emptyset$ 是閉集;

2° 两个閉集的并集是閉集;

3° 任意多个閉集的交集是閉集.

証　明　由于 de Morgan 公式 (§1 中习题 3), 本定理与定理 2.3 二者中之一是另一个的直接推論. ▌

例 2.2　有限子集是閉集; 特别地, 独点集(单独一点所成的集合)是閉集. 直綫 E^1 的开集 $A=\{x|0<x<1\}$ 是无穷多个閉集的并集. 試举例說明: 无穷多个开集的交集不必是开集.

在数学分析中, 极限概念是連續性概念的基础. 現在要把它推广到度量空間.

2.5 定义　設 A 是度量空間 X 的一个子集, 而且点 $x\in X$. 如果 x 的、在 X 中的每一球形邻域都包含 $A-\{x\}$ 的一个点*), 則 x 叫作 A 的、在 X 中的一个**聚点**. A 与它的、在 X 中的全体聚点的并集, 叫作 A 的、在 X 中的**閉包**, 記作 $\overline{A}$. 如果 $\overline{A}=X$, 則把 A 叫作 X 的**稠密子集**.

例 2.3　設 $X=E^1$. 如果 $A=\left\{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$, 則点 $x=\frac{1}{2}\in A$, 但非 A 的聚点, 点 $x=0\,\overline{\in}\,A$ 而是 A 的聚点. 如果 $A=\{x|0\leqslant x<1\}$, 点 $x=0$ 与 $x=1$ 都是 A 的聚点, 但前者 $\in A$, 后者 $\overline{\in}\,A$. 如果 A 是 E^1 的有理点的集合, 則 E^1 的每一点都是 A 的聚点, 而且 $\overline{A}=E^1$.

从定义 2.5 容易驗証:

2.5.1 命題　X 的有限子集无聚点;

---

*) 如果 $x\,\overline{\in}\,A$, 則 $A-\{x\}$ 就是 A.

2.5.2 命題 如果 X 的无穷子集 A 的每二点的距离都大于一个固定的正数，則 A 无聚点；

2.5.3 命題 对于任意 $A\subset X$，$\overline{A}$ 是閉集；

2.5.4 命題 A 是閉集 $\Leftrightarrow \overline{A}=A$.（复习題.）

2.6 定理 度量空間的子集与它們的閉包具有下列四个性质：

1° $\overline{\emptyset}=\emptyset$；

2° $A\subset\overline{A}$；

3° $\overline{\overline{A}}\subset\overline{A}$；

4° $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

証 明 从定义 2.5 立刻有性质 1° 与 2°.

現在証明性质 3°：$\overline{\overline{A}}$ 的任一点 x 必 $\in\overline{A}$. 从定义 2.5, $x\in\overline{\overline{A}}\Rightarrow x$ 的每一邻域 $U(x)$ 包含 $\overline{A}$ 的一点 y；$y\in\overline{A}\Rightarrow y$ 的每一邻域 $W(y)$ 包含 A 的一点. 从定理 1.3 中的性质 2°，可取 $W(y)\subset U(x)$；然后知 x 的每一邻域 $U(x)$ 包含 A 的一点. 再从定义 2.5，这就 $\Rightarrow x\in\overline{A}$.

性质 4° 的一部分：$\overline{A\cup B}\supset\overline{A}\cup\overline{B}$，是下面事实的明显推論：$A\cup B\supset A\Rightarrow\overline{A\cup B}\supset\overline{A}$. 所以剩下要証明的是性质 4° 的另一部分：$\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$，即 $\overline{A\cup B}$ 的任一点 x 如果 $\overline{\in}\overline{A}$，則 $\in\overline{B}$.

我們用反証法来証明这一部分. 設在 $x\overline{\in}\overline{A}$ 的情形下，同时还有 $x\overline{\in}\overline{B}$. 从定义 2.5, x 有一邻域 $U(x)$ 不包含 A 的点，与一邻域 $V(x)$ 不包含 B 的点；从定理 1.3 中的性质 2°，x 有一邻域 $W(x)\subset U(x)\cap V(x)$，因而不包含 $A\cup B$ 的点；这与 $x\in\overline{A\cup B}$ 矛盾. ▮

注意，性质 2° 与 3° $\Rightarrow\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

現在我們指出子集的閉包与收斂点序列的極限点之間的关系．先重复我們习知的定义．

2.7 定义　設 X 是一个度量空間．設 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个点序列，a 是 X 的一点．如果对于点 a 的每一个球形邻域 $U(a,\ \varepsilon)$，存在一个自然数 N，使得 $x_n\in U(a,\ \varepsilon)$，对于所有 $n>N$，点 a 叫作这**序列的一个极限点**，或者說这序列**收斂**，**收斂到点** a.

序列 $\{x_n\}$ 收斂到点 a 的条件，也可以用度量函数 ρ 来表示为 $\lim \rho(a,\ x_n)=0$.

下面的三个命題的証明留給讀者．后两个命題将来时常引用，值得特別注意．

2.7.1 命題　度量空間 X 中的一个收斂序列只有唯一的一个极限点．（复习題．）

2.7.2 命題　度量空間 X 的一点 a 是 X 的一个子集 A 的聚点 $\Leftrightarrow A-\{a\}$ 中存在一个由完全不同的点所組成的点序列，以 a 为极限点．（习題 4.）

2.7.3 命題　如果序列 $\{x_n\}$ 由完全不同的点組成，而且无穷子集 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$ 以 a 为一个聚点，則序列 $\{x_n\}$ 有一个子序列收斂到点 a.（习題 5.）

在本节結束前我們指出二点間的距离这一概念的三个常用的推广．第一，度量空間 X 的二子集 A 与 B 間的距离：

$$\rho(A,\ B)=\begin{cases}0, & \text{当 } A \text{ 或 } B \text{ 是空集；}\\ \inf\{\rho(x,\ y)\,|\,x\in A,\ y\in B\}, & \text{当 } A \text{ 与 } B \text{ 都非空集.}\end{cases}$$

第二，X 中一点 x 到一子集 A 的距离 $\rho(x,\ A)$；它是第一个的特別情形．第三，X 的一子集 A 的直徑：

$$\operatorname{diam}(A)=\begin{cases}0, & \text{当 } A \text{ 是空集；}\\ \sup\{\rho(x,\ y)\,|\,x,\ y\in A\}, & \text{当 } A \text{ 非空集.}\end{cases}$$

容易看出，$x\overline{\in}A \nLeftrightarrow \rho(x, A)>0$；$A\cap B=\emptyset \nLeftrightarrow \rho(A, B)>0$. 值得注意的是：

2.7.4 命题 如果 $A\neq\emptyset$, 則 $x\overline{\in}\overline{A}\Rightarrow\rho(x, A)>0$.（复习題.）

习 題

1. 設 f 是欧几里得空間 E^n 中的連續函数. 試証滿足 $f>0$ ($f=0$ 或 $f\geqslant 0$)的点集是 E^n 的开(閉)子集.

2. 試証 $\operatorname{Int} A$ 是 A 所包含的所有的开集的并集. 因而它是 A 所包含的最大开集.

3. 試証 $\overline{A}$ 是所有包含 A 的閉集的交集. 因而它是包含 A 的最小閉集.

4. 試証命題 2.7.2.

5. 試証命題 2.7.3.

3. 連續映射·拓扑映射

第一节开始时我們說过，要想定义連續函数，必須先定义空間. 現在已有了度量空間，我們将进而定义度量空間之間的、与連續函数相应的映射.

3.1 定义 設 X 与 Y 都是度量空間，$f: X\to Y$ 是一个从 X 到 Y 的对应，而且点 $x_0\in X$. 如果給定任一鄰域 $U(f(x_0), \varepsilon)$，都存在一鄰域 $U(x_0, \delta)$，使得 $x\in U(x_0, \delta)\Rightarrow f(x)\in U(f(x_0), \varepsilon)$，則說 f **在点 x_0 处連續**. 如果 f 在 X 的每一点处連續，則說 f **在 X 中連續**；这时候 $f: X\to Y$ 叫作一个**連續映射**或簡称为**映射**. X 与 Y 分別叫作 f 的定义空間与值空間.

当 $Y=E^1$ 时，映射 f 通常叫作連續实值函数，或簡称**連續函数**.

設 A 是 X 的子集. $f(A)$叫作 A 的在 f 下的象. 如果 B 是 Y 的子集，則集合 $\{x|f(x)\in B\}$ 叫作 B 的在 f 下的**原象**，記作 $f^{-1}(B)$. 如果 $f(X)=Y$,我們就説 f 是从 X 到 Y 的**滿对应**. 如果 $A\subset X$，而且 $g: A\to Y$ 使得 $g(a)=f(a)$,对于所有的 $a\in A$，則 g 叫作 f 的在 A 上的**限制**，記作 $g=f|A$. 容易驗証：f 是映射 $\Rightarrow g$ 是映射. (复习題.) 如果 g 是 f 的在 A 上的限制，則 f 叫作 g 的在 X 上的**扩張**.

3.2 定理 設 X 与 Y 都是度量空間. 对于对应 $f: X\to Y$，下列五条件中的每两个都等价：

1° f 是映射；

2° Y 的每一开集的在 f 下的原象都是 X 的开集；

3° Y 的每一閉集的在 f 下的原象都是 X 的閉集；

4° 对于 X 的每一子集 A, $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$；

5° 对于 X 的每一点 x 以及 X 中的每一个以 x 为极限点的收斂序列 $\{x_n\}$，象序列 $\{f(x_n)\}$ 在 Y 中收斂到 $f(x)$.

証 明 首先我們証明 $1°\Rightarrow 2°\Rightarrow 3°\Rightarrow 4°\Rightarrow 1°$，即証明前四条件中的每两个都等价.

$1°\Rightarrow 2°$. 設 $f: X\to Y$ 是映射，而且 B 是 Y 的任一开集. 我們要証 $f^{-1}(B)$ 是 X 的开集. $f^{-1}(B)$ 可能是空集，因而是开集. 当 $f^{-1}(B)$ 非空时，設 x_0 是它的任一点；于是 $f(x_0)\in B$. 因为 B 是开集，存在 $f(x_0)$ 的一个球形邻域 $V(f(x_0))\subset B$；因为 f 是映射，特别地在点 x_0 連續，存在 x_0 的一个球形邻域 $U(x_0)$，使得 $f(U(x_0))\subset V(f(x_0))\subset B$. 于是 $U(x_0)\subset f^{-1}(B)$. 因为 x_0 是 $f^{-1}(B)$ 的任一点，故 $f^{-1}(B)$ 是 X 的开集.

$2°\Rightarrow 3°$. 根据 §1 中习題 4 的第二式. 然后 $2°\Leftrightarrow 3°$.

$3°\Rightarrow 4°$. 用反証法，設 3° 成立，但 4° 不成立. 因为 4° 不成立，存在 X 的一个子集 A 与 $\overline{A}$ 的一点 x_0，使得 $f(x_0)\overline{\in}\,\overline{f(A)}$. 現