XIANXING GUIHUA
JIQI LILUN JICHU

线性规划及其理论基础

董秀媛
钱辉镜 译

中央廣播電視大學出版社

线性规划及其理论基础

董秀媛　钱辉镜　译

冯　泰　校

中央广播电视大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性规划及其理论基础/董秀媛，钱辉镜译；冯泰校．北京：中央广播电视大学出版社，2000.9

ISBN 7－304－00437－1

Ⅰ．线… Ⅱ．①董… ②钱… ③冯… Ⅲ．线性规划 Ⅳ．0221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 56510 号

线性规划及其理论基础

董秀媛　钱辉镜　译

冯　泰　校

出版・发行/中央广播电视大学出版社

经销/新华书店北京发行所

印刷/北京首师大印刷厂

开本/850×1168　1/32　印张/7.125　字数/184 千字

版本/1999 年 5 月第 1 版　2000 年 9 月第 1 次印刷

印数/0001－1000

社址/北京市复兴门内大街 160 号　　邮编/100031

电话/66419791　68519502　　(本书如有缺页或倒装，本社负责退换)

书号：ISBN 7-304-00437-1/C・12

定价：11.00 元

译者的话

本书是英国开放大学教材《线性数学》的分支，介绍线性规划及其理论基础，向量空间上线性变换及线性函数等。

众所周知，在自然科学，工程技术及社会经济等诸多领域中，线性模型有着广泛的应用。随着社会主义建设事业的发展，知识经济社会的到来，现代科学技术和现代管理具有同样的重要性。而现代管理技术的基础是规划与决策，掌握有关知识离不开线性数学基础知识。本书选择的这几章比较详尽地讲解了有关内容。

英国开放大学《线性数学》教材有以下几个特点：

1. 细腻　叙述细腻、讲解透彻，把概念和理论融为一体，通过通俗语言介绍，使读者很自然的理解所述理论，用最浅显、通俗的例子阐明较深的数学概念。

2. 重视几何直观　线性数学讲述的一般空间理论，经常通过二维、三维空间的实例对概念与理论进行解释，使读者身临其境，悟出其中道理。

3. 讲述方法特殊　对数学概念和理论，采用"注释"以加深理解和掌握，对重要方法采用"实例"，加以示范说明。

4. 有一定的理论深度　本书介绍了向量空间(特殊的线性空间)和线性变换及线性函数，并涉及"同构"线性函数等内容。要求读者应具备初步的线性代数和微积分知识，这样才能更好的掌握本书内容。

为此，我们把本书推荐给读者。

本书可作为大学教学参考书，也可以供工程技术与管理人员参考。

翻译过程中对原书中不符合我国习惯的写法作了适当的修

订，对有关必备的概念，定义作了补充。

参加本书翻译的有：钱辉镜副编审（第一，二章），董秀媛副教授（第三，四章）。

全书由冯泰教授校。

限于我们的水平与经验，在译文中不妥和错误之处在所难免，恳请同行和读者批评指正。

译　者

1997 年 7 月

目　录

第 1 章　向量空间

第 2 章 线性变换

第 3 章 线性函数与对偶性

第4章 线性规划

第 1 章 向量空间

1.0 引 言

本章给出向量空间精确定义和推理。我们将向量空间的理论应用到许多不同的例子，而且重要的是我们将非常清楚地知道在每一个例子中运用向量空间理论的适当的程度。这只能通过一种严格的方式去发展向量空间理论才能做到，因此我们知道哪些理论对所有向量空间是可行的，而哪些理论只适用于那些具有特殊性质的向量空间。所以，我们首先以公理体系的形式给出了向量空间的精确定义，并介绍了一些向量空间的非常重要的例子。

此后，我们通过这个公理的一些基本结果来发展这个理论。首要的重要结果之一是使谈及向量空间维数变得有意义的一个定理。正如我们生活在三维空间，向量空间有有限的维数(实际上，这也正是称之为“空间”的原因之一)，然而，维数并不一定为 3，它可以是任何一个正整数，并且也存在“无限维”空间，这将在本课程的后面部分讨论。

最后，我们将看到一个向量空间的子空间：它仅仅是该向量空间的子集且它们自身也满足向量空间公理。另外，证明关于子空间的一些有用的定理是有可能的，但在本章我们不深入地讨论子空间的理论。

1.1 向量空间

1.1.0 引　言

向量空间的概念是整个线性数学课程的基础。它将显式地或隐式地在本书每一章得以应用。如果我们将向量空间认为是一个集合,其元素可以互相相加,与一个实数相乘,且每一种情形,其结果总是该集合中的一个元素,这样我们就得到了对向量空间的一个粗略认识。例如,实数有序偶集合通过如下例子定义的加法和与一个实数的乘法就变为一个向量空间:

$$(1,2)+(\frac{1}{3},\frac{1}{2})=(1\frac{1}{3},2\frac{1}{2})$$

$$\pi\times(\frac{1}{3},\frac{1}{2})=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$$

从前我们遇到过,几何向量空间(几何向量定义为具有长度和方向的所有箭头的集合),定义几何向量以及定义将几何向量相加和将几何向量与实数相乘.如图 1-1 所示.

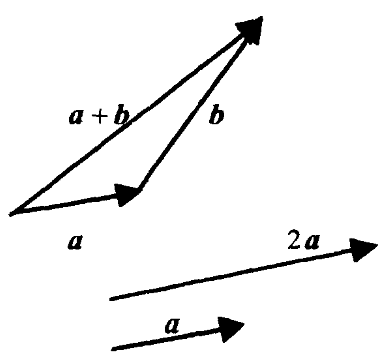

图 1-1

这里定义的加法和乘法都满足特定的规则,称之为向量空间公理。既然现在我们试图更仔细地对待数学叙述,我们将走另一条路,认为向量空间是具有满足向量空间公理的加法和乘法的一

个集合。因此不管从公理推论到的什么结果在每一个向量空间中必然是有效的(通过定义)。下一节,我们首先引入这些公理,然后考虑几个向量空间的示例。

1.1.1 实向量空间公理

实向量空间是在实数域上定义的一个集合 V(它的元素称为向量),它同时具备两条运算:

(1)加法　对 V 中任意一对向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,若结合成 V 的一个新向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$,称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和;

(2)数量乘法　对 V 中每一个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 和每一个实数 c,若结合成 V 的一个新向量 $c\boldsymbol{\beta}$,则称为 $\boldsymbol{\beta}$ 的数量乘法。

这两条运算必须满足以下性质

(A_1)　$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$,对所有 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 成立;

(A_2)　$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$,对所有 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 成立;

(A_3)　V 中有零元素 $\mathbf{0}$,称为零向量,且有性质

$$\mathbf{0}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+0$$

对所有 V 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 成立;

(A_4)　对 V 中每一个向量 $\boldsymbol{\beta}$, V 中存在元素 $-\boldsymbol{\beta}$,使得

$$\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\beta})=0=(-\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}$$

(B_1)　$c(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=c\boldsymbol{\alpha}+c\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\beta}\in V,c\in R$;

(B_2)　$(c+d)\boldsymbol{\beta}=c\boldsymbol{\beta}+d\boldsymbol{\beta},c\in R,d\in R,\boldsymbol{\beta}\in V$;

(B_3)　$(cd)\boldsymbol{\beta}=c(d\boldsymbol{\beta}),c\in R,d\in R,\boldsymbol{\beta}\in V$;

(B_4)　$1\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\in V$

这就是实向量空间的 10 条公理。

注记:

(1)二维实向量空间 $R\times R$ 记为 R^2。用 R 代表所有实数的集合,不用花体 $\mathscr{R}$。

(2)$C[a,b]$包含了所有定义域为 R 或 R 的子集$[a,b]=$

$\{x: a \leqslant x \leqslant b, x \in R\}$, 值域为 R, 在$[a, b]$内的每一点上连续的函数。连续性可以想象为 $C[a, b]$内每一个函数的图象没有任何断开。

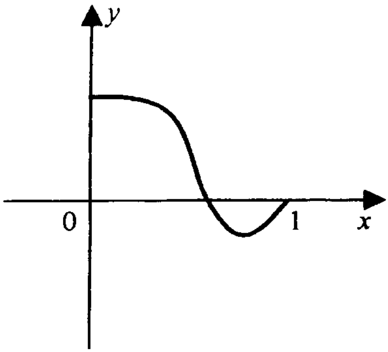

图 1-2

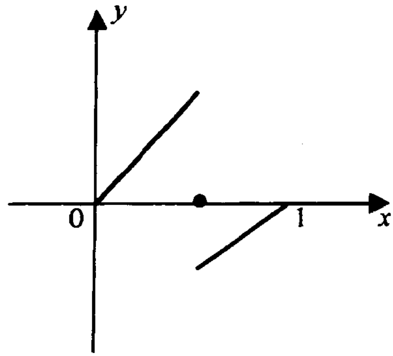

图 1-3

函数$\in C[0,1]$的图形, 如图 1-2, 函数$\notin C[0,1]$的图形, 如图 1-3。

(3)$C[a, b]$代表一个向量空间, $f+g$ 也必然存在于该空间中, 即: $f+g$ 必然是定义域为$[a, b]$, 值域为 R 的一个连续函数, 但要证明它需要定理: f 和 g 连续, 则 $f+g$ 也连续。这是微积分学中的一个定理。

(4)注意到在定义的叙述过程中两条公理实际上是最重要的, 它们首先断定向量空间对加法是封闭的, 然后断定向量空间对数量乘法是封闭的。即实向量空间定义中的第(1), (2)条。

(5)对向量空间 V, 称实数为数量, 则数量乘法即为一个向量和一个纯数量相乘。

本章中有三种类型的向量空间作为示例, 由于它们的重要性, 我们将再次提醒你关注它们。

第一种类型向量空间 R^n, 对任意正整数 n, R^n 的元素是 n-元的即 n 个实数的序列$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。如果 $n=1,2,3, \cdots$我们有许多可供选择的 R^n 的直观解释. 如果 $n=1$, R^1 的元素是一个

"1 - 元的"(x_1)，且如果我们忽略掉括号，则 R^1 可被认为与 R 相同，而 R 正是一个向量空间. R 可以看为一条线上所有点的集合. R^2 的元素是有序偶，可被视为一个平面上所有点的集合. R^3 的元素是实数的有序三元组且 R^3 可被视为一个三维空间内所有点的集合. 这三个例子非常有用，因为它们给出了直观化向量空间特性的一种方式。

第二种类型包含了具有 $C[a,b]$形式的空间 $C[a,b]$的元素为函数。

第三种类型是向量空间 P，P 的元素是一个多项式即具有下述形式的一个表达式：

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

这里 x 是一个变量(称为一个不定元)，n 是正整数或零，如果 $a_n \neq 0$，称 n 为多项式的次，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是实数，称之为系数. 多项式的加法及多项式与实数相乘按通常方式定义。例如：

$$(1+2x)+(3x+x^2)=1+5x+x^2$$

$$(-1)\times(3\frac{1}{2}-2x^3)=-3\frac{1}{2}+2x^3$$

注意如果所有系数都为零，则得到零多项式 $\mathbf{0}$. 零多项式是 P 的一个元素。且在将来当一个多项式集合被认为是一个向量空间时，零多项式总是包括在内。

每个多项式都与具有下列形式的函数相关

$$P: x \longrightarrow a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n (x \in R)$$

该函数称为多项式函数。我们经常使用相同的记号 P 去代表多项式及相关的多项式函数。

1.1.2 域

到现在我们已经看到了实向量空间的定义，但这并不是向量空间的最一般的类型，我们要求如果 $\boldsymbol{x}$ 在该空间中，则具有任意实数 α 的 αx 也在这个空间中；但实际上我们已指定了一个 α 可

能性的一个不同的集合，如复数或有理数(复向量集合中允许 α 为任意一个复数，它在解线性微分方程时特别有用)。为了定义一般向量空间，我们将 α 为一个实数的要求替换为 α 来自于一个满足某一特定的公理组合的一个集合，满足该条件的集合有：实数，复数，有理数以及一些更特殊的集合. 任何一个满足那公理的集合称之为域. 其元素称为标量.

域是一个代数结构，它是一个非空集合 F，在 F 上定义了两个代数运算：

(F_1)加法　对 F 中任意一对元素 α,β，结合成 F 的一个新元素 $\alpha+\beta$，称为 α 与 β 的和，它适合

(F_2)　$\alpha+\beta=\beta+\alpha$　$\alpha\in F,\beta\in F$(交换律)

(F_3)　$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$　$\alpha\in F,\beta\in F,\gamma\in F$(结合律)

(F_4)　F 中存在元素 0，使得对任意 $\alpha\in F$，

$$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$$

(0 称为 0 元素)

(F_5)　对 F 中每一个元素 α，存在元素 $\beta\in F$，使得

$$\alpha+\beta=0$$

(F_6)　乘法　对 F 中任意一对元素 α,β，结合成 F 的一个新元素 $\alpha\beta$，称为 α 与 β 的乘积，它适合

(F_7)　$\alpha\beta=\beta\alpha,\alpha\in F,\beta\in F$,(交换律)

(F_8)　$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$　$\alpha\in F,\beta\in F,\gamma\in F$(结合律)

(F_9)　在 F 中存在元素 e，对任意 $x\in F$，有

$$e\alpha=\alpha e=\alpha$$

(称为乘法的单位元)；

(F_{10})　对 F 中的每一个非 0 元素 α，都存在一元素 $\alpha^{-1}\in F$，使得

$$\alpha\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\alpha=e$$

(称为 α 的逆元素)

关于加法和乘法适合

$(F_{11})\quad \alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma=(\beta+\gamma)\alpha,\alpha\in F,\beta\in F,\gamma\in F$ (分配律)

域的 11 条公理与向量空间的 10 条公理看起来是难以应付的,但一会儿你就会发现并非如此.要把利用特定示例来思考作为一种习惯,甚至在证明非常一般的定理也该如此.符号也有助于记住这些规则;我们对乘法和加法都采用一般记号.

注意到域的定义中开始五个公理 $F_1\sim F_5$ 是确定$(F,+)$是一个交换群非常有用的.而域的后五个公理 $F_6\sim F_{10}$说明如果将 0 元素从 F 中移走,则 F 中剩余元素对乘法构成一个交换群。由此,可以将 11 条公理替换为:

(1)$(F,+)$是一个交换群;

(2)$(F_1,\cdot)$是一个交换群.这里 F_1 代表 F 中除去“十”中 0 元;

(3)$\cdot$对$+$有分配律。

我们不要求你记住域的公理集;我们仅仅希望你关注它的存在,以及向量空间上任何已证的结果都会适用于域上的向量空间.最实用的情形是:域是实数的集合或是复数的集合.

1.1.3　1.1 节小结

本节内容包括:向量空间公理和域的公理。

域为满足公理 F_1 到 F_{11}的任意数学结构,本书重要的域为实数域和复数域。 * * *[1]

向量空间(在给定的域 F 上)为满足公理(1)和 A_1 到 A_5 及(2)和 B_1 到 B_3 的数学结构,特别的,该集合对加法和数乘封闭。

* * *

不要求你记住这些公理,但你应能够应用它们去检验一个给定的结构是否为向量空间.

① 用“*”表示重要程度,“*”多者表示概念或方法等更重要,以下同。

本节还引入了(实)向量空间的三个重要例子：

R^n:$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ n 元实数空间； * * *

$C[a,b]$:在区间$[a,b]$上连续的函数空间； * * *

P:实系数多项式空间。 * * *

1.2 线性相关和线性无关

1.2.0 引　言

我们已经定义了向量空间为一组对加法运算和数量乘法封闭的对象的集合，现在让我们看该定义的一些结果. 特别地，如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 是两给定的向量，利用两向量的空间运算，我们能够得到什么？例如，我们让 $\boldsymbol{\alpha}$ 加上 $\boldsymbol{\beta}$ 的和与一个数相乘得到如下的一个向量

$$2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}$$

或者我们可以分别将 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 与一个数相乘再将其结果相加得到如下的一个向量

$$3\boldsymbol{\alpha}+\left(-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{\alpha}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}$$

形如 $2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}$ 或 $3\boldsymbol{\alpha}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}$ 的表达式，或一般表达式 $a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}$(这里 a 和 b 为数量)称为向量 α 和 β 的线性组合. 同样，三向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 的最一般的线性组合为

$$a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}+c\boldsymbol{\gamma}\quad(a,b,c\text{ 为数量})$$

对给定向量集中元素做线性组合的思想非常有用，因为它结合了加法和数量乘法的两种基本运算。例如我们可以定义向量空间为一组对线性组合的“运算”封闭的对象的集合。

给定向量空间中的任意一组向量，我们可以问下述两个相关的问题。

1. 空间中任何一个非零向量是否都能表示为该集合中向量的线性组合？如果答案为是，称该集合生成了该空间；