随机点过程

戴永隆 编著

中山大学出版社

随机点过程

戴永隆编著

中山大学出版社

随 机 点 过 程

戴永隆编著

*

中山大学出版社出版

中山大学印刷厂印刷

广东省新华书店发行

*

开本：787×1092×1/16　印张：$14\frac{1}{4}$　字数：308,000

1984年9月第一版　1984年9月第一次印刷

印数　1—4,400

书号：13339·3　定价：2.00元

前　　言

欣钦的“公用事业理论的数学方法”被认为是随机点过程一般理论研究的开端。该书的许多基本概念，例如有序性、无后效性、平稳性、强度、Palm 函数等，一直为后人所引用并作为深入研究的对象。而以抽象空间为相空间的随机点过程的一般理论则是六十年代末和七十年代才建立起来的。K. Matthes, J. Kerstan 和J. Macke 合著的“无穷可分点过程”，以及O. Kallenberg 所著“随机测度”，系统地总结了这一时期的工作。近年来将点过程一般理论应用于排队论、分支过程、随机几何以及Gibbs点过程等分支的研究甚为活跃。

本书的目的是给概率论专业研究生提供一个基本教材，也可供大专院校理工科高年级学生参考。读者可以通过本书作为桥梁，以较短时间掌握随机点过程的基本内容和研究方法，从而达到能够阅读当前文献并从事相应的研究工作的目的。因此本书取材仅限于在理论上已经相当完备，然而又是进一步阅读这一分支学科近期文献和开展某些研究所必须了解的基本内容。

本书的写作和出版都是在梁之舜教授的热情支持和鼓励之下进行的。在八二年暑假高等学校概率论讨论班上，许多同志对本书原稿提出了许多宝贵意见，特别是严士健教授，厉则治、潘一民、刘秀芳副教授以及陈培德、丁万鼎、马志民、邹捷中等同志对本书原稿的一些错误和不当之处都提出了具体修改意见。裴祥同志认真校对并誊写了全部书稿。作者在此向上述同志表示衷心感谢。

由于水平所限，错误和不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

戴永隆

1984年1月

目　　录

第五章 混合型Poisson 分布

第六章 平稳点过程

第一章 预备知识

这一章是有关学习点过程必不可少的预备知识。从内容看，完全是测度论的一些补充。但在一般测度论著作中是不容易找到这些材料的。

§1. 局部单调类定理

1. 本书恒设(X,ρ_X)是可分完备距离空间。以$\mathscr{A}$记X的全部开集所产生的σ-代数(Borel集类)；以$\mathscr{B}$记$\mathscr{A}$中全部有界集组成的类，即$A\in\mathscr{B}$则意味着$A\in\mathscr{A}$，且满足

$$\sigma(A)=\sup_{a,b\in A}\rho_X(a,b)<\infty.$$

显然，$\mathscr{B}$是一个环。当(X,ρ_X)是有界距离空间时，$\mathscr{B}=\mathscr{A}$；但当(X,ρ_X)不是有界距离空间时，$\mathscr{B}$不是σ-环。虽然$\mathscr{B}$不是σ-环，但对任意$A\in\mathscr{B}$，$A\cap\mathscr{B}$却是A的子集σ-代数。$\mathscr{B}$的这个性质对我们以后的讨论很有用处。

2. **定义** $\mathscr{B}$的子环Γ称为局部σ-环，如果它满足下列两个条件：

1) 对Γ中的任意序列(A_n)，$\bigcap_n A_n\in\Gamma$；

2) 对Γ中的序列(A_n)，若$\bigcup_n A_n\in\mathscr{B}$，则也有$\bigcup_n A_n\in\Gamma$。

显然，$\mathscr{B}$本身是局部σ-环。需要注意的是，如果Γ是局部σ-环，它不一定是σ-环，除非(X,ρ_X)是有界距离空间。然而，对任意$A\in\Gamma$，$A\cap\Gamma$是A的子集σ-代数。

3. **定义** 称$\mathscr{B}$的子集类Γ是局部单调类，如果它满足下列两条件：

1) 若$A_n\in\Gamma$，$A_n\downarrow$，则$\bigcap_n A_n\in\Gamma$；

2) 若$A_n\in\Gamma$，$A_n\uparrow$并且$\bigcup_n A_n\in\mathscr{B}$，则$\bigcup_n A_n\in\Gamma$。

局部单调类不一定是单调类，除非(X,ρ_X)是有界距离空间。

4. 在定义2中，条件1)其实可由2)推出。事实上，设$(A_n)\subset\Gamma$，由于2)以及Γ是环的假定可知$\bigcup_n\{A_1\setminus(A_1\cap A_n)\}\in\Gamma$，从而

$$\bigcap_n A_n=A_1\setminus\bigcup_n\{A_1\setminus(A_1\cap A_n)\}\in\Gamma.$$

任给$\Gamma\subset\mathscr{B}$，包含集类Γ的最小局部单调类记作$L_m(\Gamma)$；包含集类Γ的最小局部σ-环记作$L_\sigma(\Gamma)$。

下面的定理是单调类定理的推广。

5. **局部单调类定理** 设Γ_1，Γ_2是$\mathscr{B}$的两个子集类，并且$\Gamma_1\subset\Gamma_2$。如果Γ_1是环而Γ_2是局部单调类，则$L_\sigma(\Gamma_1)\subset\Gamma_2$。

证明 我们只须证明 $L_m(\Gamma_1)$是环。因为如果$L_m(\Gamma_1)$是环，则也必是局部σ-环，从而推出$L_\sigma(\Gamma_1)\subset L_m(\Gamma_1)\subset\Gamma_2$.对任意固定的$A\in L_m(\Gamma_1)$，以$L'(A)$记$L_m(\Gamma_1)$中所有具有如下性质的集合$B$：它使得集合$B\backslash A, A\backslash B, A\cup B$都属于$L_m(\Gamma_1)$。容易看出，$L'(A)$是局部单调类，并且$B\in L'(A)$和$A\in L'(B)$是等价的。由于$\Gamma_1$是环，所以当$A\in\Gamma_1, B\in\Gamma_1$时有$B\in L'(A)$，从而$\Gamma_1\subset L'(A)$，但$L_m(\Gamma_1)$是包含$\Gamma_1$的最小局部单调类，所以$L_m(\Gamma_1)\subset L'(A)$。这说明当$A\in\Gamma_1$固定时对一切$B\in L_m(\Gamma_1)$都有$B\in L'(A)$，故也有$A\in\Gamma'(B)$.于是又得：对任意固定的$B\in L_m(\Gamma_1)$也有$L_m(\Gamma_1)\subset L'(B)$。这就说明，对于$L_m(\Gamma_1)$中的任意两个元素$A,B$都有$B\in L'(A)$。由$L'(A)$的定义知道$L'_m(\Gamma_1)$是环。定理得证。

由这个定理立即推出：如果Γ是$\mathscr{B}$的子环并且$\mathscr{B}$是由Γ产生的，则$L_m(\Gamma)=L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$。

§2 局部有限测度空间

6. 设μ是$(X,\mathscr{A})$上的一个测度，如果对任意的$A\in\mathscr{B}$，$\mu(A)<\infty$，则称μ是$(X,\mathscr{A})$上的局部有限测度。于是对任意的$A\in\mathscr{B}$，μ是$(A,A\cap\mathscr{B})$上的全有限测度。

记$(X,\mathscr{A})$上的全体局部有限测度为M。

如果$\mu\in M$并且对任意的$A\in\mathscr{B}$，$\mu(A)$取非负整数值，则称μ是$(X,\mathscr{A})$上的计数测度。

记$(X,\mathscr{A})$上的全体计数测度为N。

对任意的$a\in X, A\in\mathscr{A}$，令

$$\delta_a(A)=1_A(a),$$

其中$1_A(\cdot)$是A的示性函数。于是$\delta_a(\cdot)\in N$.映射$a\frown\delta_a$是X到N内的一一映射。

7. **定理** 对任意的$\mu\in N$，集合$\{a: a\in X, \mu(a)>0\}$是有限或可列集，并且

$$\mu=\sum_{a\in X,\mu(a)>0}\mu(a)\delta_a,$$

其中的$\mu(a)$是将a看作集合，即$\mu(a)=\mu(\{a\})$。

证明 取$A_n\in\mathscr{B}, A_n\uparrow X$.由于$\mu$是计数测度，所以$A_n\cap\{a: a\in X,\mu(a)>0\}$的个数最多等于$\mu(A_n)$，故至多是有限集，因此$X\cap\{a: a\in X,\mu(a)>0\}$至多是可数集。现记

$$\mu'(B)=[\mu-\sum_{a\in X,\mu(a)>0}\mu(a)\delta_a](B),\qquad B\in\mathscr{B}.$$

显然$\mu'\in N$，并且对任意的$a\in X$，$\mu'(a)=0$.现证$\mu'\equiv0$（即μ'是$(X,\mathscr{A})$上的零测度）。假定$\mu'\neq0$.由于X可用半径为1的可数开球列$\{S_1(b_n)\}$覆盖，故存在$a_1\in X$，使$\mu'(S_1(a_1))>0$；再以半径是$\frac{1}{2}$的开球列覆盖$S_1(a_1)$，则存在$a_2\in X$使$\mu'(S_1(a_1)\cap S_{\frac{1}{2}}(a_2))>0$。如此继续下去，得到$a_1,a_2,\cdots$，使

$$\mu'(S_1(a_1)\cap\cdots\cap S_{2^{-n}}(a_{n+1}))>0.$$

然而易知(a_n)是(X,ρ_X)中的Cauchy序列，因为

$$\rho_X(a_n,a_{n+m})\leqslant\rho_X(a_n,a_{n+1})+\rho_X(a_{n+1},a_{n+2})+\cdots+\rho_X(a_{n+m-1},a_{n+m})$$

$$\leqslant\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{2}{2^n}+\cdots+\frac{2}{2^{n+m-2}}<\frac{1}{2^{n-3}}.$$

令$m\to\infty$得$\rho_X(a_n,a)\leqslant 2^{-n+3}$，$n=1,2,\cdots$。设$x\in S_{2^{-n}}(a_{n+1})$则

$$\rho_X(x,a)\leqslant\rho_X(x,a_{n+1})+\rho_X(a_{n+1},a)\leqslant 2^{-n}+2^{-n+2}<2^{-n+3},$$

故 $x\in S_{2^{-n+3}}(a)$从而$S_{2^{-n}}(a_{n+1})\subset S_{2^{-n+3}}(a)$。由此可证

$$\mu'(S_{\frac{1}{n}}(a))\geqslant 1,\text{故}\mu'(a)=\inf_n \mu'(S_{\frac{1}{n}}(a))\geqslant 1,$$

这与上面的$\mu'(a)=0$（对任意的$a\in X$）矛盾。证毕

8. 定义 在M上引进σ-代数$\mathbf{M}$：它是使得全体如下形式的由M到$[0,\infty)$的映射

$$\mu\frown\mu(A),\qquad A\in\mathscr{B},$$

都为可测的最小σ-代数。

$(M,\mathbf{M})$称为局部有限测度空间。

9. 引理 $N\in\mathbf{M}$。

证明 以$\mathscr{U}$记(X,ρ_X)中由有界开集作成的可数基，以Γ表示$\mathscr{U}$所产生的环，显然$\Gamma\subset\mathscr{B}$并且Γ至多是可数的集类。令$Z_+=\{0,1,2,\cdots\}$，于是

$$\bigcap_{A\in\Gamma}\{\mu:\ \mu\in M,\mu(A)\in Z_+\}\in\mathbf{M},$$

以Γ_1记满足下面条件的$\mathscr{B}$的子类：$\Gamma_1\subset\mathscr{B}$，并且$B\in\Gamma_1$当且仅当

$$\{\mu:\ \mu\in M,\mu(B)\in Z_+\}\supset\bigcap_{A\in\Gamma}\{\mu:\ \mu\in M,\mu(A)\in Z_+\}$$

显然$\Gamma_1\supset\Gamma$，并且Γ_1是局部单调类。由于$L_\sigma(\Gamma)=\mathscr{B}$所以由局部单调类定理知$\mathscr{B}=\Gamma_1$。从而

$$N=\bigcap_{A\in\mathscr{B}}\{\mu:\ \mu\in M,\mu(A)\in Z_+\}=\bigcap_{A\in\Gamma}\{\mu:\ \mu\in M,\mu(A)\in Z_+\}\in\mathbf{M}.\qquad\text{证毕。}$$

由于这个结果，我们令

$$\mathbf{N}=N\cap\mathbf{M}$$

于是$(N,\mathbf{N})$是可测空间，称为计数测度空间。

不难验证，$\mathbf{N}$是使得所有如下的映射为可测的最小σ-代数：

$$\mu\frown\mu(A),\qquad A\in\mathscr{B}.$$

下面的引理虽然简单，今后将常用到。

10. 引理 映射$a\frown\delta_a$是从$(X,\mathscr{A})$到$(N,\mathbf{N})$内的双方可测映射。

证明 记映射$a\frown\delta_a$为f，由前段关于$\mathbf{N}$的说明可知，对于任意的$A\in\mathscr{B}$及任意的$k\in Z_+$，集合$\{\mu:\ \mu\in N,\mu(A)=k\}$关于$f$的逆映像视$k=0$，$k=1$或$k\geqslant 2$而分别是$\mathscr{A}$中的元$A^c$，$A$或$\phi$。于是知道$f^{-1}(\mathbf{N})\subset\mathscr{A}$。

另一方面，对任意的$A\in\mathscr{A}$，取一串$A_n\in\mathscr{B}$，$A_n\uparrow X$，仍由$\mathbf{N}$的构造可知

$$\{\mu:\ \mu\in N,\mu(A)\geqslant k\}=\bigcup_n\{\mu:\mu\in N,\mu(A\cap A_n)\geqslant k\}\in\mathbf{N},\quad k=1,2.$$

于是$\{\mu:\mu\in N,\mu(A)=1\}=\{\mu:\mu\in N,\mu(A)\geqslant 1\}\backslash\{\mu:\mu\in N,\mu(A)\geqslant 2\}$属于$\mathbf{N}$。这说明对任意的$A\in\mathscr{A}$有

$$f(A)=\{\mu:\mu\in N,\mu(A)=1,\mu(X)=1\}\in\mathbf{N}.\qquad\text{引理证毕。}$$

11. 对任意的$\mu\in M$，$A\in\mathscr{A}$，记

$$A\mu(\cdot)=\mu(\cdot\cap A)$$

并称之为μ在A上的限制。

显然，固定$A\in\mathscr{A}$，映射$\mu\frown A\mu$是$(M,\mathbf{M})$到自身的可测映射。这个映射在N上的限制就是$(N,\mathbf{N})$到自身的可测映射。

对固定的$A\in\mathscr{A}$，我们以${}_A\mathbf{N}$记如下集合族

$$\{\mu:\mu\in N,\mu(B)=k\},B\in A\cap\mathscr{B},k\in Z_+,$$

所产生的σ-代数。

§3. 弱收敛

12. 在研究点过程的收敛性时，弱收敛、局部弱收敛和淡收敛(vague收敛)都是很有用的工具。本书假定读者已经有弱收敛的基本知识(关于弱收敛的一般理论可见P. Billingsley(1968)第一章)。我们只着重讨论本书后面将广泛用到的局部弱收敛。为了对这三种收敛性有比较清楚的认识，有必要将它们作一番统一的叙述，以便比较。在给出它们的定义前，先引进一些记号。

如前所述，$\mathscr{A}$表示(X,ρ_X)的全体Borel集；$\mathscr{B}$表示$\mathscr{A}$中全体有界集；又以$\mathscr{B}_K$记$\mathscr{A}$中全体相对紧集，即$A\in\mathscr{B}_K$表示$A\in\mathscr{A}$，并且A的闭包$\bar{A}$是紧集。

显然有

$$\mathscr{A}\supset\mathscr{B}\supset\mathscr{B}_K.$$

以$\mathscr{F}_b$记(X,ρ_X)上定义的全体有界连续函数；以$\mathscr{F}$记(X,ρ_X)上定义的全体有有界支承的有界连续函数，即$f\in\mathscr{F}$当且仅当$f\in\mathscr{F}_b$且$\{f\neq0\}$的闭包是有界集；又以$\mathscr{F}_K$记(X,ρ_X)上定义的全体具有紧支承的有界连续函数，即$f\in\mathscr{F}_K$当且仅当$f\in\mathscr{F}_b$且集$\{f\neq0\}$的闭包是紧集。

显然有

$$\mathscr{F}_b\supset\mathscr{F}\supset\mathscr{F}_K.$$

我们以M_b记$(X,\mathscr{A})$上的全体全有限测度；如前所述，以M记$(X,\mathscr{A})$上的全体局部有限测度；此外，以M_K记$(X,\mathscr{A})$上的全体紧有限测度。这里称$(X,\mathscr{A})$上的测度μ为紧有限的，如果对任意的$A\in\mathscr{B}_K$，有$\mu(A)<\infty$。

显然有

$$M_b\subset M\subset M_K.$$

13. 定义 设$(\mu_n)\subset M_b$，称(μ_n)弱收敛于$\mu\in M_b$，如果对于所有的$f\in\mathscr{F}_b$有

$$\lim_n\int fd\mu_n=\int fd\mu.$$

设$(\mu_n)\subset M$，称(μ_n)局部弱收敛于$\mu\in M$，如果对所有的$f\in\mathscr{F}$有

$$\lim_n\int fd\mu_n=\int fd\mu.$$

设$(\mu_n)\subset M_K$，称(μ_n)淡收敛于$\mu\in M_K$，如果对所有的$f\in\mathscr{F}_K$有

$$\lim_n\int fd\mu_n=\int fd\mu.$$

(μ_n)弱收敛于μ记作 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$；

(μ_n)局部弱收敛于μ记作 $\mu_n \xrightarrow{l} \mu$；

(μ_n)淡收敛于μ记作 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

必须注意，弱收敛和淡收敛的概念仅只依赖于空间(X,ρ_X)的拓扑结构，而不依赖于距离的选取；而局部弱收敛则恰恰是依赖于距离的选取。

14. 定理 设(X,ρ_X)是可分完备距离空间。

1） 对任意的$\mu\in M_b$，$(\mu_n)\subset M_b$，$\mu_n \xrightarrow{w} \mu$与$\mu_n \xrightarrow{l} \mu$等价，当且仅当$(X,\rho_X)$是有界距离空间；

2） 对任意的$\mu\in M$，$(\mu_n)\subset M$，$\mu_n \xrightarrow{l} \mu$与$\mu_n \xrightarrow{v} \mu$等价，当且仅当$(X,\rho_X)$中的任意有界集都是相对紧的；

3） 对任意的$\mu\in M_b$，$(\mu_n)\subset M_b$，$\mu_n \xrightarrow{w} \mu$，$\mu_n \xrightarrow{l} \mu$与$\mu_n \xrightarrow{v} \mu$三者一致，当且仅当$(X,\rho_X)$是紧空间。

证明 只证1)，2)、3)可类似地证明。当(X,ρ_X)是有界距离空间时，两种收敛性的等价性是明显的。令设M_b中任意的局部弱收敛序列必也是弱收敛序列，要证(X,ρ_X)是有界距离空间。假定(X,ρ_X)不是有界距离空间，则存在点列$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，使$\rho_X(x_n,x_0)\to\infty$。令

$$\mu_n(\cdot)=\delta_{x_n}(\cdot),\quad n=1,2,\cdots,$$

则$(\mu_n)\subset M_b$。又令$\mu=0$（零测度），则对任意的$f\in\mathscr{F}$，有$\lim\limits_n\int f d\mu_n=\int f d\mu=0$，从而

$\mu_n \xrightarrow{l} \mu$。然而$\mu_n \xrightarrow{w} \mu$不成立，因为当$f\equiv 1$时，$\int f d\mu_n=1$ 而 $\int f d\mu=0$。这与假设矛盾。

15. 例 考虑实数序列$(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2<\infty$作成的距离空间$l_2$，其中距离定义为：

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_n (x_n-y_n)^2}$$

这里$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)$。$(l_2,\rho)$是可分完备距离空间。在这个空间中

$$\mathscr{A}\supsetneq\mathscr{B}\supsetneq\mathscr{B}_K$$

记 $$e_n=(0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第}n\text{位}}}{1},0,\cdots)$$

令$\mu_n=\delta_{e_n}$，$\mu=0$，则$\mu_n \xrightarrow{v} \mu$但$\mu_n \xrightarrow{l} \mu$，$\mu_n \xrightarrow{w} \mu$都不成立。

若记

$$e_n' = (0, \cdots, 0, n, 0, \cdots)$$
$$\uparrow$$
第n位

并令$\mu_n = \delta_{e_n'}$，$\mu = 0$，则$\mu_n \xRightarrow{v} \mu$并且$\mu_n \xRightarrow{l} \mu$但$\mu_n \xRightarrow{w} \mu$不成立。

这个简单的例子指出，在(l_2, ρ)中，三种收敛性都不相同。

下面不加证明地引述弱收敛的几个著名结果。首先给出一个定义。设$\mu \in M$，$A \in \mathscr{A}$，如果有$\mu(\partial A) = 0$（此处∂A表示A的边界），则称A是μ连续集。全体μ连续集记作$\mathscr{A}_\mu$。

16. 定理 设$(\mu_n) \subset M_b$，则下述命题等价

1) $\mu_n \xRightarrow{w} \mu$；

2) $\lim\limits_n \mu_n(A) = \mu(A)$，　凡$A \in \mathscr{A}_\mu$；

3) $\limsup\limits_n \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$，凡闭集$F$，并且

$\lim\limits_n \mu_n(X) = \mu(X)$；

4) $\liminf\limits_n \mu_n(G) \geqslant \mu(G)$，凡开集$G$，并且

$\lim\limits_n \mu_n(X) = \mu(X)$。

这个定理是关于弱收敛的基本定理，其证明见 Billingsley (1968) 第一章定理2.1。

下面的两个定理是著名的 Прохоров 定理。

17. 定理 在M_b上存在一个距离ρ_{M_b}，使得(M_b, ρ_{M_b})是可分完备距离空间，M_b中由距离ρ_{M_b}所产生的拓扑，正好是M_b中由弱收敛所产生的拓扑。（参阅 Прохоров (1956)）。

18. 定理 距离空间(M_b, ρ_{M_b})中的子集Y是相对紧的，当且仅当

$$\sup_{\mu \in Y} \mu(X) < \infty$$

并且对任意的$\epsilon > 0$，存在紧集K_ε使

$$\sup_{\mu \in Y} \mu(K_\varepsilon^c) < \epsilon.$$

（参阅 Billingsley (1968)第一章定理6.1，6.2）。

上述定理中的相对紧性，可以有另外一种提法：设Y是M_b的子集，称Y在弱收敛意义下相对紧，或称为弱相对紧，如果对Y中的任意序列$(\mu_n) \subset Y$，可以抽出子序列(μ_{n_k})，使

$$\mu_{n_k} \xRightarrow{w} \text{某个 } \mu \in M_b.$$

这里所谓的弱相对紧集与定理18中的ρ_{M_b}意义下的相对紧集是一回事（参阅定理17）。

下一节的目的是将定理16—18改写为局部弱收敛的形式，这对我们今后研究点过程与随机测度的收敛性是很有用处的。

§4. 局部弱收敛

19. 引理 设 $G\subset X$ 是任意的有界开集，则存在有界开集列 (G_n)，$G_n\uparrow G$ 和一串 (f_n)，$f_n\in\mathscr{F}$，使

$$1_G\geqslant f_n\geqslant 1_{G_n}\uparrow 1_G.$$

证明 令

$$G_n=\left\{a:\rho_X(a,G^c)>\frac{1}{n}\right\},$$

其中 G^c 是 G 的余集。于是 G_n 是开集，$G_n\uparrow G$。令

$$f_n(a)=1-n(\rho_X(a,\bar{G}_n)\wedge n^{-1}),$$

其中 $\bar{G}_n$ 是 G_n 的闭包，$a\wedge b=\min(a,b)$。于是 f_n 在G^c上为 0，故 $f_n\in\mathscr{F}$，并且显然有

$$1_G\geqslant f_n\geqslant 1_{G_n}\uparrow 1_G.$$ 得证。

20. 引理 设 $z\in X$，$S_j(z)$ 是以 z 为中心，半径为 j 的开球，$j=1,2,\cdots$。又设f_j是 (X,ρ_X) 上的有界连续函数，满足（根据 Urysohn 引理）

$$1_{S_j(z)}(\cdot)\leqslant f_j(\cdot)\leqslant 1_{S_{j+1}(z)}(\cdot).$$

于是 $f_j\in\mathscr{F}$。现设 $(\mu_n)\subset M$，记

$$\mu_n^{(j)}(A)=\int_A f_j d\mu_n,\qquad A\in\mathscr{B}.$$

则$\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}$某个$\mu\in M$，当且仅当对一切$j=1,2,\cdots$有$\mu_n^{(j)}\overset{w}{\Longrightarrow}$某个$\mu^{(j)}\in M_b$。这时必有

$$\mu^{(j)}(A)=\int_A f_j\,d\mu,\qquad A\in\mathscr{B}.$$

证明 必要性 设$\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$，则对任意的有界连续函数 $f\in\mathscr{F}_b$ 有 $ff_j\in\mathscr{F}$，所以

$$\int fd\mu_n^{(j)}=\int ff_j\,d\mu_n\longrightarrow\int ff_j\,d\mu=\int fd\mu^{(j)},$$

即有$\mu_n^{(j)}\overset{w}{\Longrightarrow}\mu^{(j)}$，$j=1,2,\cdots$。

充分性 假定对一切 $j=1,2,\cdots$都有

$$\mu_n^{(j)}\overset{w}{\Longrightarrow}\text{某个 }\mu^{(j)}.$$

设 $f\in\mathscr{F}$，若 f 的支承在 S_j 之内，则对任意的 $m\geqslant j$ 有

$$\mu^{(m)}f=\int_{S_j}f\,d\mu^{(m)}=\lim_n\int_{S_j}fd\mu_n^{(m)}$$

$$=\lim_n\int_{S_j}ff_m d\mu_n=\lim_n\int_{S_j}ff_j\,d\mu_n=\lim_n\int_{S_j}f d\mu_n^{(j)}=\mu^{(j)}f.$$

这里引进了记号 $\mu f=\int f\,d\mu$。

现设 G 是任意有界开集，于是存在 j 使 $G\subset S_j$。由引理 19，存在 $G_n\uparrow G$ 以及 $g_n\in\mathscr{F}$ 使

$$1_G\geqslant g_n\geqslant 1_{G_n}\uparrow 1_G,$$

于是当 $m\geqslant j$ 时，由前面的推导得

$$\mu^{(m)}(G)\geqslant\mu^{(m)}g_n=\mu^{(j)}g_n\geqslant\mu^{(j)}(G_n)\uparrow\mu^{(j)}(G);$$

以及

$$\mu^{(j)}(G)\geqslant\mu^{(j)}g_n=\mu^{(m)}g_n\geqslant\mu^{(m)}(G_n)\uparrow\mu^{(m)}(G);$$

所以

$$\mu^{(m)}(G)=\mu^{(j)}(G),\qquad m\geqslant j.$$

由此不难推出，对一切 $A\in\mathscr{B}$，$A\subset S_j$，都有

$$\mu^{(j)}(A)=\mu^{(j+1)}(A)=\cdots.$$

现对于任意的 $B\in\mathscr{B}$ 令

$$\mu(B)=\sup_j\mu^{(j)}(B\cap S_j).$$

这样定义的 $\mu\in M$，上面实际上已经证明了

$$\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu.$$

上节中我们已用 $\mathscr{A}\mu$ 表示 μ 的连续集。现令

$$\mathscr{B}\mu=\mathscr{B}\cap\mathscr{A}\mu,$$

并称 $\mathscr{B}\mu$ 中的集为有界 μ 连续集。于是 $A\in\mathscr{A}$ 是有界 μ 连续集的充要条件是，$A\in\mathscr{B}$ 并且 $\mu(\partial A)=0$。

21. 引理 $\mathscr{A}\mu$ 是 $\mathscr{A}$ 的子环，$\mathscr{B}\mu$ 是 $\mathscr{B}$ 的子环。

证明 设 $A,B\in\mathscr{B}\mu$，则由

$$\partial(A\cup B)=\overline{(A\cup B)}\cap\overline{((A\cup B)^c)}=(\bar{A}\cup\bar{B})\cap\overline{(A^c\cap B^c)}\subset(\bar{A}\cup\bar{B})\cap\bar{A}^c\bar{B}^c$$
$$\subset(\bar{A}\cap\bar{A}^c)\cup(\bar{B}\cap\bar{B}^c)=\partial A\cup\partial B,$$

推出 $\mu(\partial(A\cup B))\leqslant\mu(\partial A)+\mu(\partial B)=0$，即 $A\cup B\in\mathscr{B}\mu$；又因为

$$\partial(A\setminus B)=\partial(A\cap B^c)=\partial((A\cap B^c)^c)=\partial(A^c\cup B)\subset\partial(A^c)\cup\partial(B)$$
$$=\partial(A)\cup\partial(B),$$

推出 $\mu(\partial(A\setminus B))=0$，即 $A\setminus B\in\mathscr{B}\mu$。于是 $\mathscr{B}\mu$ 是 $\mathscr{B}$ 的子环。同理可证 $\mathscr{A}\mu$ 是 $\mathscr{A}$ 的子环。实际上 $\mathscr{A}\mu$ 还是代数。

相应于定理16，我们证明下面的等价命题。

22. 定理 设 $(\mu_n)\subset M$，则下述命题等价

1) $\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$；

2) $\mu_n(A)\longrightarrow\mu(A)$，$(n\to\infty)$ 凡 $A\in\mathscr{B}\mu$；

3) $\limsup_n\mu_n(F)\leqslant\mu(F)$，凡有界闭集 F，以及

$$\liminf_n \mu_n(G) \geqslant \mu(G)，\text{凡有界开集 } G.$$

证明 1)$\Longrightarrow$3)。设 F 是有界闭集，选取有界开集列 (G_m)，$G_m \downarrow F$；对每个 m，选取 $f_m \in \mathscr{F}$ 使

$$1_F \leqslant f_m \leqslant 1_{G_m}.$$

由于 $\mu_n \overset{l}{\Longrightarrow} \mu$，当 m 固定时有

$$\limsup_n \mu_n(F) \leqslant \lim_n \int f_m d\mu_n = \int f_m d\mu \leqslant \mu(G_m),$$

所以
$$\limsup_n \mu_n(F) \leqslant \lim_m \mu(G_m) = \mu(F).$$

设 G 是有界开集，取闭集列 $F_m \uparrow G$（例如 F_m 可取为 $\left\{a : \rho_X(a, G^c) \geqslant \frac{1}{m}\right\}$）同样可证得

$$\liminf_n \mu_n(G) \geqslant \mu(G).$$

3)$\Longrightarrow$2)。设 $A \in \mathscr{B}_\mu$，以 $\bar{A}$，A° 分别记 A 的闭包和内部，则由 3）推知

$$\mu(A) = \mu(\bar{A}) \geqslant \limsup_n \mu_n(\bar{A}) \geqslant \limsup_n \mu_n(A) \geqslant \liminf_n \mu_n(A)$$
$$\geqslant \liminf_n \mu_n(A^\circ) \geqslant \mu(A^\circ) = \mu(A),$$

所以
$$\lim \mu_n(A) = \mu(A).$$

2)$\Longrightarrow$1)。设 $f \in \mathscr{F}$，记 f 的支承为 F，则 F 是有界闭集。设 $\varepsilon > 0$，令

$$F\varepsilon = \{a : \rho_X(a, F) \leqslant \varepsilon\},$$

这是有界集。由于 $\partial F_\varepsilon \subset \{a : \rho_X(a, F) = \varepsilon\}$，所以当 $\varepsilon' \neq \varepsilon''$ 时，$\partial F_{\varepsilon'}$ 与 $\partial F_{\varepsilon''}$ 不相交。这说明对固定的 $\varepsilon > 0$，开区间 $(0, \varepsilon)$ 中至多只有可数个 ε' 使 $\mu(\partial F_{\varepsilon'}) > 0$。于是存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使 $\mu(\partial F_{\varepsilon_0}) = 0$，即 F_{ε_0} 是有界 μ 连续集。固定这样一个 ε_0，并记 $B = F_{\varepsilon_0}$。

现设 A 是任意 μ 连续集，即 $A \in \mathscr{A}_\mu$，于是 $A \cap B$ 是有界 μ 连续集。由2)有

$$B\mu_n(A) = \mu_n(A \cap B) \longrightarrow \mu(A \cap B) = B\mu(A), \quad (n \to \infty),$$

由定理16，$B\mu_n \overset{w}{\Longrightarrow} B\mu$，特别有

$$\mu_n f = (B\mu_n) f \longrightarrow (B\mu) f = \mu f, \quad (n \to \infty),$$

所以 $\mu_n \overset{l}{\Longrightarrow} \mu$。

相应于定理17，我们有

23. 定理 在 M 上存在一个有界距离 ρ_M 使得 (M, ρ_M) 是完备可分距离空间。由 ρ_M 所产生的拓扑正好是局部弱收敛所决定的拓扑。

证明 任意固定 X 中一点，以这点为中心以 $j = 1, 2, \cdots$ 为半径作开球列 (S_j)，$j = 1, 2, \cdots$。又在 $\mathscr{F}$ 中取一串函数 (f_j) 满足

$$1_{S_j} \leqslant f_j \leqslant 1_{S_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \cdots,$$

根据Urysohn引理，这样的f_i一定存在。

以M_b^∞记M_b的可列无穷维乘积空间，其上的距离$\rho_{M_b}^\infty$取为：

$$\rho_{M_b}^\infty(\overline{\mu},\overline{\nu})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\rho_{M_b}(\mu_i,\nu_i)}{1+\rho_{M_b}(\mu_i,\nu_i)},$$

其中$\overline{\mu}=(\mu_1,\cdots,\mu_i,\cdots)$，$\overline{\nu}=(\nu_1,\cdots,\nu_i,\cdots)$是$M_b^\infty$中的元素。由于$(M_b,\rho_{M_b})$是完备可分的，所以$(M_b^\infty,\rho_{M_b}^\infty)$也是完备可分的。

对$\mu\in M$及自然数j，令

$$\mu^{(j)}(\cdot)=\int_{(\cdot)}f_j d\mu,\quad (j=1,2,\cdots),$$

则$\mu^{(j)}\in M_b$。映射$J:\mu\frown(\mu^{(1)},\mu^{(2)},\cdots,\mu^{(j)},\cdots)$是$M$到$M_b^\infty$内的一一映射。事实上，若$\mu,\nu\in M$满足条件：$\mu^{(j)}=\nu^{(j)}$，$j=1,2,\cdots$，则必有$\mu=\nu$。这因为对任意取定的$A\in\mathscr{B}$，必有自然数$j_0$使$A\subset S_{j_0}$，由

$$\mu(A)=\int_{S_{j_0}}1_A d\mu=\int 1_A f_{j_0}d\mu=\int 1_A f_{j_0}d\mu=\int 1_A d\mu^{(j_0)}=\int 1_A d\nu^{(j_0)}=\nu(A),$$

可知在$\mathscr{B}$上$\mu=\nu$，从而在$\mathscr{A}$上$\mu=\nu$。

现对于任意的$\mu,\nu\in M$，令

$$\rho_M(\mu,\nu)=\sum_{j=1}\frac{1}{2^j}\frac{\rho_{M_b}(\mu^{(j)},\nu^{(j)})}{1+\rho_{M_b}(\mu^{(j)},\nu^{(j)})},$$

易知ρ_M是M上的距离，并且$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_M(\mu_n,\mu_0)=0$等价于$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{M_b}(\mu_n^{(j)},\mu_0^{(j)})=0$，对一切$j=1,2,\cdots$。由引理20，知道$M$中按距离$\rho_M$的收敛，就是局部弱收敛，而且映射$J$将$(M,\rho_M)$嵌入$(M_b^\infty,\rho_{M_b}^\infty)$中。仍由引理20，可知$(M,\rho_M)$还是$(M_b^\infty,\rho_{M_b}^\infty)$的闭子集，所以它还是完备可分的。

相应于定理18，我们有

24. 定理 距离空间(M,ρ_M)中的子集Y是相对紧的，当且仅当对任意的X的有界闭集B有

$$\sup_{\mu\in Y}\mu(B)<\infty,$$

并且对任意$\varepsilon>0$，存在紧集$K_{B,\varepsilon}\subset B$使

$$\sup_{\mu\in Y}\mu(B\backslash K_{B,\varepsilon})<\varepsilon.$$

证明 对$j=1,2,\cdots$，令S_j和f_j如定理23中所取。又令

$$Y^{(j)}=\{\mu^{(j)}:\mu\in Y,\ \mu^{(j)}(\cdot)=\int_{(\cdot)}f_j d\mu\},$$

则$Y^{(j)}\subset M_b$。由引理20及定理23，可知Y在(M,ρ_M)中相对紧，当且仅当对一切$j=1,2,$

$\cdots$，$Y^{(j)}$在(M_b,ρ_{M_b})中相对紧.

必要性 设B是X中的有界闭集，则存在j_0使$B\subset S_{j_0}$。如果Y在(M,ρ_M)中相对紧，则$Y^{(j_0)}$在(M_b,ρ_{M_b})中相对紧。由定理18有

$$\sup_{\mu\in Y}\mu^{(j_0)}(X)<\infty,$$

且存在紧集K_ε使

$$\sup_{\mu\in Y}\mu^{(j_0)}(K_\varepsilon^C)<\varepsilon.$$

因为$B\subset S_{j_0}$，$\mu^{(j_0)}(B)=\mu(B)$，由上面第一个不等式得

$$\sup_{\mu\in Y}\mu(B)<\infty.$$

又记$K_{B,\varepsilon}=B\cap K_\varepsilon$，则$K_{B,\varepsilon}\subset B$而且是紧集。于是

$$\sup_{\mu\in Y}\mu(B\backslash K_{B,\varepsilon})\leqslant\sup_{\mu\in Y}\mu^{(j_0)}(K_\varepsilon^C)<\varepsilon,$$

必要性得证。

充分性 设Y满足定理中的条件。对任意j，令$B=\overline{S}_{j+1}$，于是$\mu^{(j)}(X)\leqslant\mu(\overline{S}_{j+1})$，从而

$$\sup_{\mu\in Y}\mu^{(j)}(X)<\infty,$$

又取$K_\varepsilon=K_{B,\varepsilon}$则

$$\sup_{\mu\in Y}\mu^{(j)}(K_\varepsilon^C)=\sup_{\mu\in Y}\mu(\overline{S}_{j+1}\backslash K_{B,\varepsilon})<\varepsilon,$$

这说明对任意j，$Y^{(j)}$在(M_b,ρ_{M_b})中相对紧。 证毕

对于(M,ρ_M)中子集的相对紧性，也可以这样叙述：(M,ρ_M)的子集Y称为相对紧的，如果Y中的任一序列$(\mu_n)\subset Y$必可抽出子序列(μ_{n_k})使

$$\mu_{n_k}\overset{l}{\Longrightarrow}\text{某个}\mu\in M,\ (k\to\infty).$$

这时也称Y是局部弱相对紧的。

下面的定理指出了弱收敛与局部弱收敛的关系。

25. 定理 设$(\mu_n)\subset M_b$，$\mu\in M_b$，则$\mu_n\overset{w}{\Longrightarrow}\mu$当而且仅当$\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$并且$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(X)=\mu(X)$。

证明 必要性显然，往证充分性。任给$\varepsilon>0$，由于$\mu(X)<\infty$，存在紧集K使$\mu(K^c)<\varepsilon$（见Billingsley(1968)第一章定理1.4）。类似定理22中2)⇒1)时F_{ε_0}的选取，可找到包含K的有界闭集K_0使$\mu(\partial K_0)=0$。于是由$\mu_n\overset{l}{\Longrightarrow}\mu$推知

$$\lim_n\mu_n(K_0)=\mu(K_0).$$