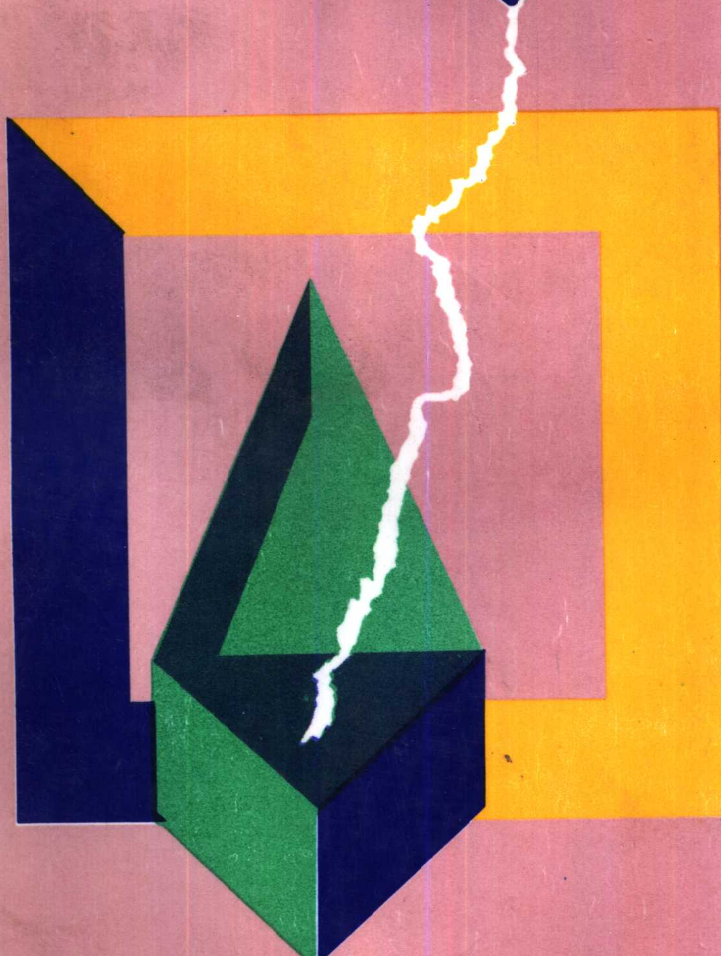
相干与衍推·逻辑

冯棉 著

上海人民出版社



.7

相干与衍推逻辑

冯 棉 著

上海人民出版社

（沪）新登字101号

责任编辑　秦建洲
封面装帧　诸象庆

相干与衍推逻辑
冯　棉　著
上海人民出版社出版、发行
（上海绍兴路54号）
新华书店上海发行所经销　常熟第七印刷厂印刷
开本850×1156　1/32　印张8.25　字数217,000
1993年8月第1版　1993年8月第1次印刷
印数1—2,000

ISBN 7-208-01532-5/B·189
定价8.20元

序

冯棉同志是我国逻辑学“金岳霖学术奖”获得者，他在撰著《经典逻辑与直觉主义逻辑》和《广义模态逻辑》二书之后，马不停蹄，现又完成《相干与衍推逻辑》一书并索序于予。

相干与衍推逻辑不是像模态逻辑那样的经典逻辑的扩张，而是如直觉主义逻辑那样的对经典逻辑的“修正”。不过直觉主义逻辑之产生是出自数学基础上的考虑，而相干与衍推逻辑的建构却更多地折射出哲学和语言学的背景。

我们知道经典命题逻辑联词中的通常解释为“如果…，则…”的蕴涵⊃(所谓实质蕴涵）实际上是作为一种真值函数而定义的：p⊃q仅当p真而q假时为假，其他场合一律为真。因此，一个真命题为任何命题所蕴涵，而一个假命题则蕴涵任何命题。诸如此类的所谓蕴涵怪论之出现，追原祸首盖在于实质蕴涵和人们日常所用的表示充分条件的“如果…，则…”实在相去太远(尽管对于数学推理不仅没有引起麻烦，反而觉得方便)。于是，如何改变这种状况，使表示“如果…，则…”的联词更符合人们通常用语的习惯，无论从逻辑自身来讲，或从它的应用来讲，都是一个值得研究的课题。

50年代以来，在莫绍揆教授、A.Church及W.Ackermann等人工作的基础上，号称相干与衍推逻辑的崭新的逻辑体系由A. Anderson与N. Belnap建立，并于70—80年代臻于完善。本书中的R等系统正是该体系的命题演算部分，它是一个视经典逻辑毫无逊色的公理系统，但除照样保留～、∧、∨等联词外，代替实质蕴涵⊃的乃是不仅顾及前后件的真值而且还顾及前后件在内容上联系的“相干蕴涵”→。这里所谓前后件在内容上的联系体现在前

件与后件至少有一个共同的命题变元(相干原理)。由于精心选定的公理满足它，推理规则满足它，于是就保证了每一个定理都满足它。这样一来，不仅像 $p\wedge\sim p\to q$, $p\to q\vee\sim q$ 这样的怪论不会出现，而且稍加分析可知所有其他的怪论也不会出现。当然，另一方面在该体系中也不存在作为析取三段论依据的定理 $\sim p\wedge(p\vee q)\to q$，而只有较弱的"如果$\sim A$ 和 $A\vee B$ 是定理，则B也是定理"。这也许是有所得必有所失吧。

无论如何，对于这样的形式体系，它的公理系统和自然推理系统，它的语义模型以及有关元理论的问题：相容性、可靠性与完全性（除了判定问题），所有这一切在本书中无不得到详尽的处理——这是读者应感谢作者的用力之勤的。作者的一贯风格：内容充实，论证严谨，解说亲切，文字流畅，在本书中又一次得到了表现。

我殷切期望通过此书的出版，我国逻辑界及关心逻辑科学的同志们能对什么是相干逻辑有所了解，并进而激发其研究的兴趣。

程其襄

1992年1月于沪滨

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　言

本世纪60年代前后，在莫绍揆、丘奇(A.Church)、阿克曼(W.Ackermann)等人工作的基础上，当代著名的逻辑学家安德森(A.R. Anderson)和贝尔纳普(N. D. Belnap)开创了一门崭新的现代逻辑分支——相干与衍推逻辑(Relevance and Entailment Logic)。这种逻辑比较接近人们日常使用的自然语言，并且能避免经典逻辑中的所谓“蕴涵怪论”，因而对人工智能的开发具有重大的理论意义和实际价值，受到国际逻辑学界和计算机科学界的高度重视。

本书向读者展示了以R和E为代表的相干与衍推命题逻辑系统，以及与R、E相近的其它一些系统，对各个逻辑系统(包括某些子系统)的基本特性和系统间的相互关系作了深入的考察。作为全书核心部分的系统R，还进一步给出了语义模型，并在模型的基础上对其可靠性和完全性作了严密而详尽的证明。

本书还有以下几个特点：

(1) 对一些较为抽象、艰深的理论问题，尽可能揭示其直观背景，在此过程中，融合了作者个人的体会和理解。

(2) 提出了一些新概念。例如，对R模型中的“结构”作了分类，并研究了不同结构的特性。

(3) 对某些重要的元定理，给出了较为简明的新证明。

本书可供广大逻辑工作者及大专院校哲学专业、逻辑专业、现代语言学专业、数学专业和计算机专业的高年级学生、研究生阅读，读者需具有集合论的基本知识并有一定的现代逻辑素养。

上海市逻辑学会顾问、上海市数学学会顾问程其襄教授审阅

了全部书稿并为之作序，上海人民出版社对本书的出版给予了大力的支持，在此一并致谢！

作　者

1991 年 11 月

于上海市华东师范大学

目　　录

第一章　重言衍推

§ 1.1　真值联结词

一般地说，学习或研究现代逻辑总是从命题逻辑入手的，因为比起谓词逻辑和逻辑学的其它部分来说，命题逻辑较为简单同时也更为根本。

考察命题之间的形式推理是命题逻辑的主要任务。所谓"命题"，是指具有真假涵义的语句。在自然语言中，命题又可以分为简单命题和复合命题，简单命题是不能再分解的命题，复合命题则可以分解为简单命题和联结词的组合。作为复合命题一部分的那些命题称为支命题。

自然语言中的联结词为数众多，但就其逻辑意义来说，则以"如果…，那末…"最为重要，因为它涉及逻辑学的核心——推理。其它重要的联结词还有："并非…"，"…并且…"，"…或者…"和"…当且仅当…"。含有这些联结词的复合命题的真假不仅取决于各个支命题的真假，而且往往同支命题之间内容上的联系有关，这一点在一个由"如果…，那么…"联结的复合命题中表现得尤为明显。

一个形式为"如果 A，那么 B"的复合命题，其支命题 A(称为前件)和 B(称为后件）的真假对整个复合命题的真假是有重大影响的，这集中表现为 A 真而 B 假时，复合命题"如果 A，那么 B"为假。可是如果前、后件均为真，或者前件为假，是否就可以断定复合命题为真呢？并不能。因为联结词"如果…，那末…"的正确使用还要求它所联结的两个命题（即前件和后件）具有某种因果的联系，而因果联系是一种内容方面的联系。

命题逻辑使用与日常语言不同的符号语言，用 p_1、p_2、p_3…等

表示任意的非特指的命题，称为命题变元（在本书中我们约定：可以把 p_1、p_2和 p_3 分别写作 p、q 和 r），并用专门的逻辑联结词取代日常语言的联结词。这些逻辑联结词是对日常语言联结词的某种逻辑抽象，从某个或某些侧面反映日常语言联结词的逻辑特性。不同的逻辑分支对逻辑联结词的理解可能有所不同，最早发展起来的经典命题逻辑采用的逻辑联结词是真值联结词，即否定词～，合取词∧，析取词∨，蕴涵词⊃和等值词≡，它们分别是"并非…"，"…并且…"，"…或者…"，"如果…，那末…"和"…当且仅当…"的一种逻辑抽象。真值联结词仅反映复合命题和支命题之间的真假关系方面的某种特征，而根本无视各个支命题之间在内容上的联系。

由命题变元和五个真值联结词可构成命题形式，它们体现了对应的命题或复合命题的形式结构。命题形式可按如下方式定义：

定义 1.1.1：命题形式的递归定义：

(1) 命题变元 $p_1, p_2, \cdots$ 都是命题形式；

(2) 如果 A、B 是命题形式，则～A、(A∧B)、(A∨B)、(A⊃B)和(A≡B)都是命题形式。

例 1.1.1：由上述定义可知：表达式～((p∨q)⊃r)是命题形式。因为先由(1)知 p、q 是命题形式，再由(2)推得(p∨q)是命题形式，又由(1)知 r 是命题形式，于是由(2)又推得((p∨q)⊃r)和～((p∨q)⊃r)是命题形式。表达式～(p⊃)则不是命题形式。

我们用 A、B、C、D 等表示任意的命题形式。通过下面的五个真值表，可以由 A 的真假唯一地确定～A 的真假，由 A 和 B 的真假

（表 1）

A	～A
1	0
0	1

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

唯一地确定(A∧B)、(A∨B)、(A⊃B)和(A≡B)的真假。这些真值表也就是五个真值联结词的定义，表中的1表示“真”，0表示“假”，并称1和0(即“真”和“假”)为真值。

由表4定义的蕴涵词⊃称为“真值蕴涵”或“实质蕴涵”，它有

(表 2)

A	B	(A∧B)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(表 3)

A	B	(A∨B)
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(表 4)

A	B	(A⊃B)
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(表 5)

A	B	$(A\equiv B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

如下几个重要的特性:

(1) 当A取值0时,无论B取值1或0,$(A\supset B)$都取值1,这意味着假命题可以蕴涵一切命题。

(2) 当B取值1时,无论A取值1或0,$(A\supset B)$都取值1,这意味着真命题可以被任何命题所蕴涵。

(3) $(A\supset B)$取值0,当且仅当A取值1并且B取值0。

根据实质蕴涵的这些特性,我们可以将蕴涵式$(A\supset B)$和它所对应的复合命题"如果A,那么B"作一对比。首先,我们注意到两者有一个基本的共同点,即:当A真而B假时两者都是假命题。其次,我们亦不难发现两者有着明显的差别,主要表现在:复合命题"如果A,那么B"要成为一个真命题,除了要求不能A真而B假外,还要求A、B之间有着某种内容方面的联系,而蕴涵式$(A\supset B)$则没有后一要求。正因为如此,如下的命题:

(1) 如果$1+1=2$,那么牛顿(I.Newton)是物理学家;

(2) 如果$1+1\neq 2$,那么牛顿是物理学家;

(3) 如果$1+1\neq 2$,那么牛顿不是物理学家;

在日常语言中一般都不会当作真命题,因为它们的前、后件之间没有内容上的联系。但它们所对应的蕴涵式却都是真命题,因为这些蕴涵式或者前件为假((2)和(3)),或者后件为真((1)和(2))。

尽管实质蕴涵与日常语言中的联结词"如果…,那末…"有着某种距离,但它仍然被广泛地使用着,这是因为实质蕴涵简便易行

并且适合于数学推理和元逻辑的讨论。

为了减少命题形式中括号的数目，我们作如下的约定：

(1) 命题形式的最外层的那个括号可以省略。比如$(p\supset q)$可以简写为$p\supset q$，$((p\vee q)\wedge r)$可以简写为$(p\vee q)\wedge r$。

(2) 五个真值联结词的结合能力从强到弱依次为：$\sim$最强，$\wedge$和$\vee$其次，$\supset$和$\equiv$最弱。于是$(\sim p\supset(q\vee r))$可简写为$\sim p\supset q\vee r$，命题形式$(p\equiv((\sim q\wedge r)\supset p))$则可简写为$p\equiv(\sim q\wedge r\supset p)$，但$\sim(p\supset q)$不能简写为$\sim p\supset q$。

一个包含n(n为自然数)个不同的命题变元的命题形式，可以看作为一个n元真值函数的表达式，并可依据表1—表5给出这一真值函数相应的真值表。所谓真值函数，是指每个自变元仅取“真”、“假”两个值，而函数值亦为“真”或“假”的函数。换言之，一个n元真值函数就是以$\{1,0\}^n$为定义域，以$\{1,0\}$的非空子集为值域的n元函数。例如由表1知，$\sim p$是一个一元真值函数的表达式，其定义域是$\{1,0\}$，值域亦为$\{1,0\}$；$p\vee\sim p$和$p\wedge\sim p$也都是一元真值函数的表达式，其定义域都是$\{1,0\}$，但值域分别为$\{1\}$和$\{0\}$。

定义 1.1.2：一个n元真值函数，若对一切自变元的取值，函数值均为真，则称这个n元真值函数是重言的真值函数。换言之，重言的真值函数是值域为$\{1\}$的真值函数。一个命题形式，若可以作为一个重言的真值函数的表达式，则称为重言式。又若$A\equiv B$是重言式，则称A重言等值于B。

定义 1.1.3：一个n元真值函数，若对一切自变元的取值，函数值均为假，则称为矛盾的真值函数。换言之，矛盾的真值函数是值域为$\{0\}$的真值函数。一个命题形式，若可以作为一个矛盾的真值函数的表达式，则称为矛盾式。

由上述定义可知：命题形式可以分成三类，一类是重言式，一类是矛盾式，剩下的则既非重言式也非矛盾式。在经典命题逻辑中，视重言式为逻辑规律，因而具有特别重要的意义；矛盾式则是逻辑矛盾。下面是有关重言式的几个重要结果。

命题 1.1.1：若命题形式A和 $A\supset B$ 都是重言式，则B也是重言式。

证明：

已知A和 $A\supset B$ 是重言式，因而A和 $A\supset B$ 都只能取值1，由表4知此时B亦值为1，这表明B也是重言式。证毕。

命题 1.1.2（代入法则）：设命题形式A是含有n个不同的命题变元 p_{i1}、p_{i2}、…、p_{in} 的重言式，用n个命题形式 A_1、A_2…、A_n 分别代换 p_{i1}、p_{i2}、…、p_{in} 的每一次出现，所得的新的命题形式为B，则B亦为重言式。

证明：

设重言式A是真值函数 $f(p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{in})$ 的表达式，设B中包含m个命题变元 p_{j1}、p_{j2}、…、p_{jm}，B是真值函数 $f'(p_{j1}, p_{j2}, \cdots, p_{jm})$ 的表达式。由于 $f'(p_{j1}, p_{j2}, \cdots, p_{jm}) = f(A_1, A_2, \cdots, A_n)$，而 $f(p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{in})$ 是重言的真值函数，恒取值1，因而 $f'(p_{j1}, p_{j2}, , \cdots, p_{jm})$ 也恒取值1，这表明B是重言式。证毕。

命题 1.1.3（置换法则）：设命题形式C是命题形式A的一部分，$C\equiv D$ 是重言式，用D取代A中C的一次或多次出现而得的新的命题形式为B，则 $A\equiv B$ 是重言式。

证明：

A与B的不同之处仅在于A中C的一次或多次出现在B中换成了D，已知 $C\equiv D$ 是重言式，因而对于一切命题变元的取值，C与D都将有相同的真值，于是A与B也将有同样的值，这表明A重言等值于B。证毕。

命题 1.1.4（置换法则的推论）：设 $C\equiv D$ 和A都是重言式，C是A的一部分，用D取代A中C的一次或多次出现所得的命题形式为B，则B亦为重言式。

证明：

由 $C\equiv D$ 运用置换法则即知 $A\equiv B$ 是重言式，又已知A是重言式，故 $A\equiv B$ 和A都只能取值1，由表5知此时B亦取值1，这表明B是重言式。证毕。

代入法则和置换法则(包括推论)有着广泛的应用，请看下面的实例。

例 1.1.2：由真值表可知 $p\supset(q\supset p)$ 是重言式，再使用代入法则，分别以命题形式 A、B 来取代 p、q 的每一次出现，得到的新的命题形式 $A\supset(B\supset A)$ 仍是重言式。

例 1.1.3：$p\equiv\sim\sim p$ 是重言式，p 是 $p\vee q$ 的一部分，由置换法则可知 $p\vee q\equiv\sim\sim p\vee q$ 仍是重言式。

例 1.1.4：$p\supset(q\supset p)$ 和 $p\equiv\sim\sim p$ 都是重言式，p 是 $p\supset(q\supset p)$ 的一部分，由置换法则的推论可知 $p\supset(q\supset\sim\sim p)$ 和 $\sim\sim p\supset(q\supset p)$ 都是重言式（即用 $\sim\sim p$ 取代 $p\supset(q\supset p)$ 中 p 的一次出现），亦可知 $\sim\sim p\supset(q\supset\sim\sim p)$ 也是重言式（即用 $\sim\sim p$ 取代 $p\supset(q\supset p)$ 中 p 的两次出现）。

命题逻辑中的命题变元 p_1，p_2，…有可数个（即和全体自然数 1—1 对应），因而由这些命题变元和真值联结词组成的重言式为数无穷（亦为可数个）。其中有些重言式在逻辑推理中经常使用，更显重要。下面是重要的重言式的一览表：

(1) $A\supset A$ （同一律）

(2) $A\vee\sim A$（或 $\sim A\vee A$） （排中律）

(3) $\sim(A\wedge\sim A)$（或 $\sim(\sim A\wedge A)$） （矛盾律）

(4) $A\supset\sim\sim A$ （双重否定律）

(5) $\sim\sim A\supset A$ （双重否定律）

(6) $A\equiv\sim\sim A$ （双重否定律）

(7) $A\equiv A\vee A$

(8) $A\equiv A\wedge A$

(9) $(A\supset\sim A)\supset\sim A$

(10) $(\sim A\supset A)\supset A$

(11) $A\supset A\vee B$

(12) $B\supset A\vee B$

(13) $A\wedge B\supset A$

(14) $A\wedge B\supset B$

(15) $A \vee B \equiv B \vee A$ （析取交换律）

(16) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ （合取交换律）

(17) $\sim(A \vee B) \equiv \sim A \wedge \sim B$ （德摩根律）

(18) $\sim(A \wedge B) \equiv \sim A \vee \sim B$ （德摩根律）

(19) $(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$

(20) $(A \supset \sim B) \supset (B \supset \sim A)$

(21) $(\sim A \supset B) \supset (\sim B \supset A)$

(22) $(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$

(23) $A \wedge \sim A \supset B$

(24) $A \supset B \vee \sim B$

(25) $A \supset (B \supset B)$

(26) $A \supset (B \supset A)$

(27) $\sim A \supset (A \supset B)$

(28) $(A \supset B) \vee (B \supset A)$

(29) $A \supset ((A \supset B) \supset B)$

(30) $A \wedge (A \supset B) \supset B$

(31) $A \supset (B \supset A \wedge B)$

(32) $A \equiv A \vee (B \wedge \sim B)$

(33) $A \equiv A \wedge (B \vee \sim B)$

(34) $A \wedge B \equiv \sim(\sim A \vee \sim B)$

(35) $A \vee B \equiv \sim(\sim A \wedge \sim B)$

(36) $A \supset B \equiv \sim A \vee B$

(37) $A \supset B \equiv \sim(A \wedge \sim B)$

(38) $(A \equiv B) \equiv (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

(39) $(A \equiv B) \equiv (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$

(40) $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$

(41) $(A \supset B) \supset ((\sim A \supset B) \supset B)$

(42) $(A \supset B) \supset ((A \supset \sim B) \supset \sim A)$

(43) $(\sim A \supset B) \supset ((\sim A \supset \sim B) \supset A)$

(44) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ （析取结合律）

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com