

高等数学

GAO DENG

SHU XUE

蒙乃清 编著



航空工业出版社

高等数学

《高等数学》编写组编

航空工业出版社

1989

内 容 提 要

本书是在充分考虑学员学习特点的基础上编写的。全书内容为预备知识, 函数, 函数的极限与连续性, 导数与微分, 中值定理与导数的应用, 不定积分, 定积分及其应用, 无穷级数, 二元函数的微分法及二重积分, 微分方程简介, 书末还附有积分表及习题答案。

本书叙述详细, 说理浅显, 例题配合紧密, 图形较多, 直观易懂, 便于自学。本书作为大专函授教材, 同时, 可供在校大专生, 职工大学、夜大学、自学考试以及干部培训等人员学习参考。

高 等 数 学

《高等数学》编写组编

航空工业出版社出版发行

(北京市和平里小关东里14号)

——邮政编码: 100013——

全国各地新华书店经售

北京市通县向阳印刷厂印刷

1989年5月第1版

1989年5月第1次印刷

开本: 787×1092毫米1/16 印张: 23.5

印数: 1-1250

字数 588千字

ISBN 7-80046-127-0/O·003

定价·4.90元

前 言

本书是根据编者近年来在培养大专函授学员所编写的《高等数学》讲义的基础上，经补充和修改后编写成的。全书内容共分十章。第一章是预备知识，主要介绍平面解析几何的有关内容和汇总初等数学中的主要公式，作为学习以后各章内容的预备知识。第二章至第七章为一元函数的微积分。第八章为无穷级数。第九章为二元函数的微分法及二重积分。第十章为微分方程简介，着重介绍常微分方程的基本内容。教学时数约100学时。

根据函授学员的基础知识，阅读能力和学员的学习是业余、在职、分散、自学为主的特点，内容由浅入深，叙述详细，说理浅显，例题与内容配合紧密，图形较多，文图配合，直观易懂，便于自学。本书作为大专函授教材。同时，可供在校大专生、职工大学、夜大学、自学考试以及干部培训等人员学习参考。

本书的第二、三、四章由蒙乃清编写，第五、六、七章由刘惠祥编写，第一、八、九、十章由李宝君编写。全书由蒙乃清总纂，新乡师院张献英等教授审定。

由于我们水平有限，书中的错误请读者批评指正。

编 者

一九八八年七月

目 录

第一章 预备知识	(1)
§1.1 两个基本问题.....	(1)
§1.2 直线方程.....	(4)
§1.3 两直线间的位置关系.....	(8)
§1.4 圆的一般方程.....	(9)
§1.5 椭圆.....	(11)
§1.6 双曲线.....	(13)
§1.7 抛物线.....	(15)
§1.8 极坐标.....	(19)
§1.9 参数方程.....	(22)
§1.10 绝对值.....	(24)
§1.11 区间.....	(26)
§1.12 数列.....	(28)
§1.13 基本公式.....	(30)
习题一.....	(35)
第二章 函数	(39)
§2.1 函数概念.....	(39)
§2.2 函数的表示法.....	(42)
§2.3 函数的几种特性.....	(43)
§2.4 反函数.....	(46)
§2.5 基本初等函数.....	(48)
§2.6 初等函数.....	(52)
§2.7 建立函数关系的例题.....	(53)
习题二.....	(54)
第三章 函数的极限与连续性	(57)
§3.1 数列的极限.....	(57)
§3.2 函数的极限.....	(59)
§3.3 无穷大与无穷小.....	(64)
§3.4 极限的运算法则.....	(67)
§3.5 两个重要极限.....	(73)
§3.6 无穷小的比较.....	(77)
§3.7 连续函数的概念.....	(79)
§3.8 函数的间断点.....	(82)
§3.9 初等函数的连续性.....	(84)
§3.10 连续函数在闭区间上的性质.....	(89)

习题三	(90)
第四章 导数与微分	(94)
§4.1 导数概念	(94)
§4.2 导数的几何意义	(97)
§4.3 导数基本公式	(100)
§4.4 函数和、差、积、商的导数	(103)
§4.5 复合函数的导数	(107)
§4.6 高阶导数	(111)
§4.7 隐函数的导数	(112)
§4.8 由参数方程所确定的函数的导数	(114)
§4.9 函数的微分	(116)
§4.10 微分的运算	(118)
§4.11 微分在近似计算中的应用	(120)
习题四	(121)
第五章 中值定理与导数的应用	(128)
§5.1 中值定理	(128)
§5.2 罗必塔法则	(130)
§5.3 函数的单调增减性的判定法	(136)
§5.4 函数的极值及其求法	(137)
§5.5 最大值与最小值的求法	(142)
§5.6 曲线的凹凸及其判定法	(144)
§5.7 曲线的拐点及其求法	(146)
§5.8 描绘函数图形的方法	(147)
习题五	(149)
第六章 不定积分	(153)
§6.1 不定积分的概念	(153)
§6.2 基本积分公式	(156)
§6.3 第一类换元积分法	(158)
§6.4 第二类换元积分法	(162)
§6.5 分部积分法	(166)
§6.6 有理函数的分解	(168)
§6.7 有理函数的积分	(172)
§6.8 简单无理函数的积分举例	(176)
§6.9 积分表的使用	(177)
习题六	(178)
第七章 定积分及其应用	(183)
§7.1 定积分概念	(183)
§7.2 定积分的基本性质	(187)
§7.3 定积分与不定积分的关系	(190)
§7.4 定积分的换元法	(193)

§7.5	定积分的分部积分法	(196)
§7.6	广义积分	(197)
§7.7	平面图形的面积	(202)
§7.8	体积	(205)
	习题七	(208)
第八章	无穷级数	(215)
§8.1	无穷级数概念	(215)
§8.2	等比级数与调和级数	(218)
§8.3	无穷级数的基本性质	(220)
§8.4	级数收敛的必要条件	(223)
§8.5	正项级数敛散性的比较判定法	(225)
§8.6	正项级数敛散性的比值判定法	(228)
§8.7	交错级数及其敛散性的判定法	(231)
§8.8	绝对收敛与条件收敛	(232)
§8.9	幂级数及其收敛域	(236)
§8.10	幂级数的性质	(241)
§8.11	泰勒级数	(246)
§8.12	初等函数的直接展开法	(248)
§8.13	初等函数的间接展开法	(249)
§8.14	幂级数在近似计算中的应用	(256)
	习题八	(258)
第九章	二元函数的微分法及二重积分	(265)
§9.1	空间直角坐标系	(265)
§9.2	平面方程与球面方程	(267)
§9.3	二元函数的概念	(269)
§9.4	二元函数的极限与连续	(271)
§9.5	偏导数	(275)
§9.6	全微分	(277)
§9.7	复合函数的微分法	(280)
§9.8	隐函数的微分法	(285)
§9.9	二阶偏导数	(287)
§9.10	二元函数的极值	(291)
§9.11	二重积分的概念	(296)
§9.12	利用直角坐标计算二重积分	(298)
§9.13	利用极坐标计算二重积分	(304)
	习题九	(308)
第十章	微分方程简介	(313)
§10.1	微分方程的基本概念	(313)
§10.2	可分离变量的微分方程	(316)
§10.3	齐次微分方程	(319)

§10.4 一阶线性微分方程.....	(321)
§10.5 可降阶的二阶微分方程.....	(323)
§10.6 二阶常系数齐次线性微分方程.....	(326)
习题十	(329)
附表: 积分表	(332)
习题答案.....	(341)

第一章 预备知识

这一章着重介绍平面解析几何中的直线方程, 椭圆, 双曲线, 抛物线的标准方程, 极坐标, 参数方程以及不等式的解法, 点的邻域, 数列的单调性, 初等数学的基本公式等有关内容, 作为学习以后各章的预备知识。研究直线方程及二次曲线经常用到两点间的距离与线段定比分点的公式, 下面先介绍这两个问题。

§1.1 两个基本问题

一、两点间的距离

在平面直角坐标系中, 已知两点 $M_1(x_1, y_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2)$, 求 M_1 与 M_2 之间的距离。

如图1-1所示, 从 M_1, M_2 分别向 x 轴和 y 轴作垂线 M_1N_1, M_2N_2 和 M_1P_1, M_2P_2 。设 P_1M_1 的延长线与 M_2N_2 相交于 N , 那末, 在直角三角形 M_1NM_2 中, 斜边 M_1M_2 的长度就是两已知点 M_1 和 M_2 之间的距离 d 。

根据勾股定理, 得

$$d^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

所以 M_1, M_2 两点间的距离公式为

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1-1)$$

求平面上任意一点 $M(x, y)$ 到原点 $O(0, 0)$ 的距离时, 公式(1-1)变为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

例1 已知 $\triangle ABC$ 的三顶点 $A(6, 4), B(-1, 3), C(3, 0)$,

(1) 求此三角形的周长;

(2) 验证此三角形为直角三角形。

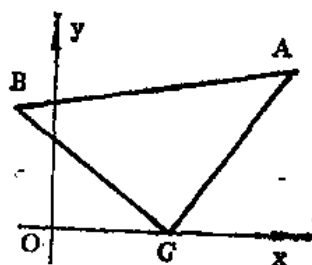


图 1-2

解 先作出 $\triangle ABC$ 的图形(图1-2), 然后计算。

(1) 三角形各边的长度为

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(-1-6)^2 + (3-4)^2} \\ &= \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |AC| &= \sqrt{(3-6)^2 + (0-4)^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |BC| &= \sqrt{(3+1)^2 + (0-3)^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

所以 $\triangle ABC$ 的周长为

$$L = AB + AC + BC = 5(2 + \sqrt{2})$$

(2) 因为 $AB^2 = AC^2 + BC^2$, 所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形。

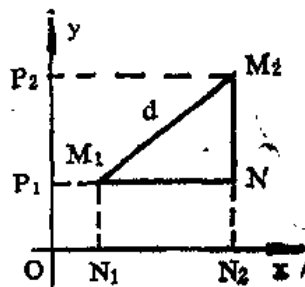


图 1-1

例2 设点 $M(x, y)$ 到两个坐标轴以及到定点 $N(3, 6)$ 的距离都相等, 试求点 M 的坐标。

解: 如图1-3所示, 根据题意得知

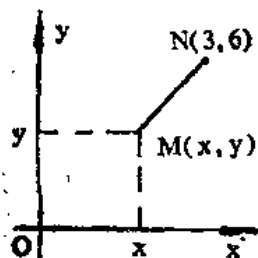


图 1-3

$$|x| = |y| = d$$

$$\text{即 } |x| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2}$$

两边平方后, 整理得

$$x^2 - 18x + 45 = 0$$

$$(x-15)(x-3) = 0$$

解得 $x_1 = 15, x_2 = 3, y_1 = 15, y_2 = 3$

所以所求的点为: $M_1(15, 15), M_2(3, 3)$ 。

二、线段的定比分点

设 $M_1(x_1, y_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2)$ 是两个已知点, 点 $M(x, y)$ 是线段 M_1M_2 上的一点, 它把线段 M_1M_2 分为 M_1M 与 MM_2 两段, 并使这两段的比为

$$(M_1M)/(MM_2) = \lambda$$

其中 λ 为一个定值, 我们把点 M 叫做分线段 M_1M_2 为定比 λ 的定比分点(图1-4)。现在我们利用两个已知点 M_1 与 M_2 的坐标来计算分点 M 的坐标 x 与 y 。

由 M_1, M, M_2 这三点分别向 x 轴作垂线 M_1N_1, MN, M_2N_2 , 则

$$M_1N_1 \parallel MN \parallel M_2N_2$$

根据平行线分线段成比例的定理, 得

$$(N_1N)/(NN_2) = (M_1M)/(MM_2) = \lambda$$

$$\text{即 } (x - x_1)/(x_2 - x) = \lambda$$

上式去分母, 整理得

$$(1 + \lambda)x = x_1 + \lambda x_2$$

$$\text{所以 } x = (x_1 + \lambda x_2)/(1 + \lambda)$$

再从 M_1, M, M_2 这三点分别向 y 轴作垂线 M_1P_1, MP, M_2P_2 , 同理可得

$$y = (y_1 + \lambda y_2)/(1 + \lambda)$$

因此, 分线段 M_1M_2 为定比 λ 的定比分点 $M(x, y)$ 的坐标是:

$$\begin{cases} x = (x_1 + \lambda x_2)/(1 + \lambda) \\ y = (y_1 + \lambda y_2)/(1 + \lambda) \end{cases} \quad (1-2)$$

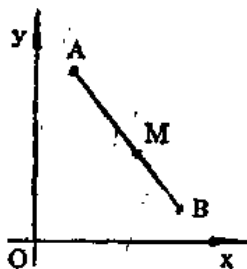


图 1-5

如果分点 $M(x, y)$ 是线段 M_1M_2 的中点, 则 $M_1M = MM_2$, 而 $\lambda = 1$, 此时公式(1-2)变为:

$$\begin{cases} x = (x_1 + x_2)/2 \\ y = (y_1 + y_2)/2 \end{cases} \quad (1-3)$$

利用公式(1-2)时, 应注意下面几点:

(1) 公式(1-2)中的 x_1, y_1 是线段 M_1M_2 的起点 $M_1(x_1, y_1)$ 的坐标, 而 x_2, y_2 是终点 $M_2(x_2, y_2)$ 的坐标, 在实际计算时, 起点与终点自行选定, 但顺序切不可写错。

(2) 如果分点 M 在线段 AB 上, 当取 A 点为起点时(图1-5), 则

$$\lambda = (AM)/(MB);$$

当取 B 点为起点时, 则 $1/\lambda = (BM)/(MA)$

这时的分点 M 叫做线段 AB 的内分点。

(3) 如果分点 M 在线段 AB 的延长线上(图1-6), 当取 A 为起点时,

$$\lambda = -(AM)/(MB)$$

当取 B 为起点时,

$$1/\lambda = -(BM)/(MA)$$

这时的分点 M 叫做线段 AB 的外分点。

例3 已知两点 $A(1, 2)$ 、 $B(3, -6)$, 点 C 把线段 AB 分成 $2:5$ 的两段, 求 C 点的坐标。

解 如图1-7所示, 设点 C 的坐标为 (x, y) , 由题意得知

$$\lambda = (AC)/(CB) = 2/5$$

这里选 A 为起点, 而 B 为终点, 按公式(1-2), 得

$$x = [1 + (2/5) \times 3] / [1 + (2/5)] = 11/7$$

$$y = [2 + (2/5) \times (-6)] / [1 + (2/5)] = -2/7$$

所求的分点 C 为 $(11/7, -2/7)$ 。

例4 已知两点 $M(-1, -3)$ 与 $N(3, 0)$, 现把线段 MN 延长到 P 点, 使线段 MP 的长度等于 7 , 求 P 点的坐标。

解 设 P 点的坐标为 (x, y) (图1-8), 已知 $|MP| = 7$, 而

$$MN = \sqrt{(3+1)^2 + (0+3)^2} = 5$$

这里选点 M 为起点, 而 N 为终点, 由于分点 P 在 MN 的延长线上, 故

$$\lambda = -(MP)/(PN) = -(MP)/[(MP) - (MN)] = -7/2.$$

由公式(1-2), 得

$$x = [-1 - (7/2) \times 3] / [1 - (7/2)] = 23/5$$

$$y = [-3 - (7/2) \times 0] / [1 - (7/2)] = 6/5$$

所以所求的分点为 $P(23/5, 6/5)$ 。

例5 已知 $\triangle ABC$ 的三顶点 $A(1, 4)$ 、 $B(-5, 0)$ 、 $C(-2, -1)$, 求此三角形三条中线交点的坐标。

解 作出 $\triangle ABC$ 的图形(图1-9), 设此三角形三条中线的交点为 $M(x, y)$, 而 AB 边的中点为 $D(x_0, y_0)$, 由公式(1-3), 得

$$x_0 = (1-5)/2 = -2$$

$$y_0 = (4+0)/2 = 2$$

于是中点为 $D(-2, 2)$ 。

因为点 M 是 $\triangle ABC$ 三条中线的交点, 根据平面几何(重心位置)得知

$$\lambda = (CM)/(MD) = 2$$

按公式(1-2)得

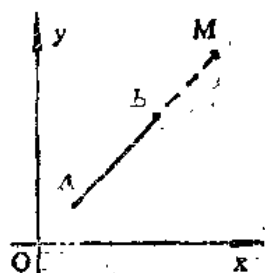


图 1-6

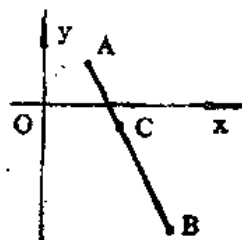


图 1-7

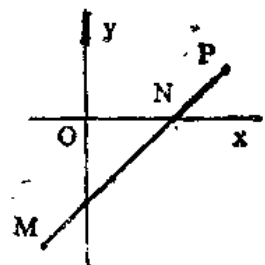


图 1-8

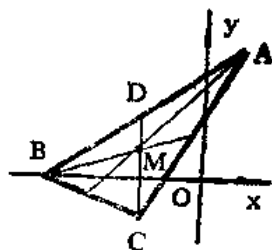


图 1-9

$$x = [-2 + (2 \times (-2))] / (1 + 2) = -2$$

$$y = [-1 + (2 \times 2)] / (1 + 2) = 1$$

所以 $\triangle ABC$ 三条中线的交点是 $(-2, 1)$ 。

例6 证明直角三角形斜边上的中点到三顶点的距离相等。

证 如图1-10所示, 取直角三角形的三顶点分别为: $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $O(0, 0)$, 设斜边 AB 上的中点为 $M(x, y)$, 由公式(1-3)得

$$x = a/2$$

$$y = b/2$$

$$\text{但 } |OM| = \sqrt{[(a/2) - 0]^2 + [(b/2) - 0]^2} = (1/2)\sqrt{a^2 + b^2} = (1/2)AB \text{ 于是得证。}$$

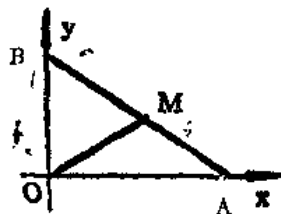


图 1-10

§1.2 直线方程

这一节先介绍直线方程的几种数学表达式, 包括点斜式、斜截式、两点式、截距式和一般式等, 下一节再讨论两直线之间的关系。有关直线的知识在今后的学习中会经常用到, 通过这一节内容的学习, 要求掌握直线方程的各种表达式, 理解不同的直线方程所表示的几何意义, 学会由已知条件求出直线方程以及根据给定的直线方程作出其图形等。

一、直线的斜角与斜率

为了确定一条直线的倾斜度大小和倾斜方向, 我们引进直线的斜角与斜率的概念。

如图1-11所示,

设一直线与 x 轴相交, 则由 x 轴的正方向按逆时针方向旋转到直线所转过的角度 α , 叫做该直线的斜角。当直线与 x 轴平行时, 我们规定此直线的斜角 $\alpha = 0$ 。因此, 直线斜角 α 的取值范围是 $0 \leq \alpha < \pi$ 。

任取一条直线的斜角 α 的正切, 叫做该直线的斜率, 用 k 表示, 即

$$k = \tan \alpha$$

(1-4)

当 $0 \leq \alpha < (\pi/2)$ 时, 则 $k \geq 0$; 当 $(\pi/2) < \alpha < \pi$ 时, 则 $k < 0$; 当 $\alpha = \pi/2$ 时, 则 k 不存在。根据斜率 k 的数值, 可求得直线的斜角 α , 反之亦然。斜角与斜率之值都反映了直线倾斜方向。

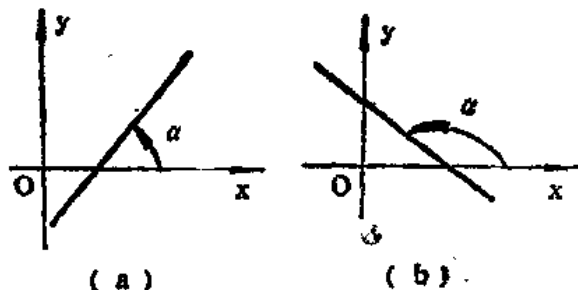


图 1-11

下面我们来求经过两已知点 $M_1(x_1, y_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率。

如图1-12所示, 从 M_1 、 M_2 两点分别向 x 轴作垂线 M_1N_1 , M_2N_2 , 再作 $M_1P \perp M_2N_2$, 则

$$\alpha = \angle M_2M_1P$$

由直角三角形 M_1PM_2 , 可得

$$k = \tan \alpha = \tan \angle M_2M_1P$$

$$= (PM_2) / (M_1P)$$

$$= (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

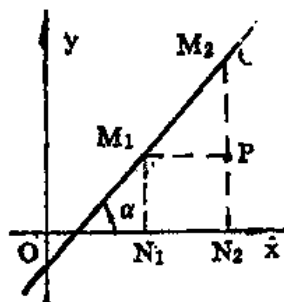


图 1-12

所以经过两定点 $M_1(x_1, y_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率公式为:

$$k = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) \quad (1-5)$$

二、直线的点斜式方程

已知直线 l 经过点 $M_1(x_1, y_1)$, 斜率为 k , 求此直线的方程。

设 $M(x, y)$ 是直线 l 上的任意一点(图1-13), 根据公式(1-5)得直线 l 的斜率为

$$k = (y - y_1) / (x - x_1)$$

即

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (1-6)$$

可以看出, 在直线 l 上的点都能满足方程(1-6), 不在直线 l 上的点, 一定不满足方程(1-6), 因为当点 M 不在直线 l 上时, 点 M 与点 M_1 所联成的直线的斜率不再等于 k 。方程(1-6)叫做直线的点斜式方程。

例1 已知直线经过点 $A(\sqrt{3}, -3)$, 且其斜角为 60° , 求此直线方程。

解 因为所求直线的斜角 $\alpha = 60^\circ$, 所以它的斜率为

$$k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

由公式(1-6)可得所求直线的方程为

$$y + 3 = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})$$

即

$$\sqrt{3}x - y - 6 = 0$$

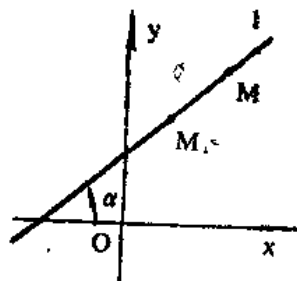


图 1-13

三、直线的斜截式方程

已知直线 l 在 y 轴上的截距为 b , 且它的斜率为 k , 求直线 l 的方程(图1-14)。

因为直线 l 经过点 $M(0, b)$, 所以利用公式(1-6)可得直线 l 的方程为:

$$y - b = k(x - 0)$$

即

$$y = kx + b \quad (1-7)$$

这个方程是由直线的斜率 k 及它在 y 轴上的截距 b 所确定的, 因此叫做直线的斜截式方程。截距 b 可为任一实数。

下面介绍方程(1-7)的特殊情形。

当 $k=0$ 时, 则(1-7)变为

$$y = b$$

此为平行于 x 轴的直线方程。

当 $k=0$, 且 $b=0$ 时, 则(1-7)式变为

$$y = 0$$

此为 x 轴的直线方程。

类似地, 如果直线 l 经过点 $A(a, 0)$, 且平行于 y 轴时, 则直线 l 的方程为(图1-15)

$$x = a$$

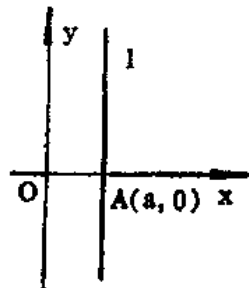


图 1-15

当 $a=0$ 时, 得 y 轴的方程为

$$x=0$$

四、直线的两点式方程

已知直线经过 $M_1(x_1, y_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2)$ 两点, 求此直线方程.

因为直线经过两已知点 M_1 与 M_2 , 所以它的斜率为

$$k=(y_2-y_1)/(x_2-x_1) \quad (x_1 \neq x_2)$$

但这条直线又经过点 $M_1(x_1, y_1)$, 因此按公式(1-6)得此直线的方程为

$$y-y_1=[(y_2-y_1)/(x_2-x_1)](x-x_1) \quad (1-8)$$

这个方程叫做直线的两点式方程.

五、直线的截距式方程

已知直线 l 在 x 轴与 y 轴上的截距分别是 a 与 b ($a \neq 0, b \neq 0$), 求此直线方程(图 1-16)

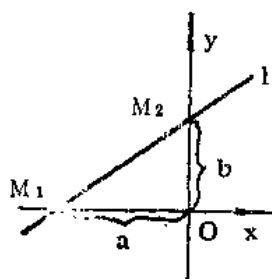


图 1-16

由于直线 l 在 x 轴与 y 轴上的截距分别为 a 与 b , 因此直线经过两已知点 $M_1(a, 0)$ 与 $M_2(0, b)$, 于是由公式(1-8)得直线 l 的方程为

$$y-0=[(b-0)/(0-a)](x-a)$$

整理后, 得

$$(x/a)+(y/b)=1 \quad (1-9)$$

这个方程由直线在 x 轴与 y 轴上的截距 a 与 b 所确定, 所以叫做直线的截距式方程.

例2 已知 $\triangle ABC$ 的三顶点 $A(2, 3)$ 、 $B(0, 7)$ 、 $C(-4, -1)$,

求 AC 边上中线的方程.

解 作出 $\triangle ABC$ 的图形(图1-17), D 为 AC 的中点, 由公式(1-2)得点 D 的坐标为

$$\begin{cases} x=(2-4)/2=-1 \\ y=(3-1)/2=1 \end{cases}$$

即 $D(-1, 1)$

由公式(1-8)得中线 BD 的方程为

$$y-7=[(1-7)/(-1-0)](x-0)$$

即 $6x-y+7=0$

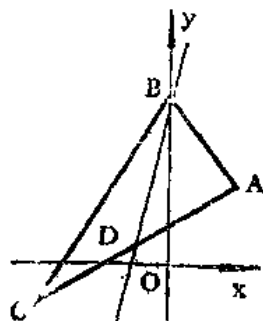


图 1-17

六、直线的一截方程

综合上述各种直线方程的形式得知: 在平面直角坐标系中, 任何一条直线都可用二元一次方程

$$Ax+By+C=0 \quad (1-10)$$

来表示.

现在我们来讨论二元一次方程

$$Ax+By+C=0$$

其中 A 、 B 、 C 均为常数, A 、 B 不能同时为零. 下面分三种情况来讨论:

(i) $A \neq 0, B \neq 0$. 这时方程(1-10)可化为

$$y=-(A/B)x-(C/B)$$

令 $-A/B=k$, $-C/B=b$, 则上式可写成

$$y=kx+b$$

此即斜截式直线方程。

(ii) $A=0$, $B \neq 0$ 。这时方程(1-10)可化为

$$y=-C/B$$

此即平行于 x 轴的直线方程。

(iii) $A \neq 0$, $B=0$ 。这时(1-10)可化为

$$x=-C/A$$

这是平行于 y 轴的直线方程。

由此可得出下面的结论：任何二元一次方程 $Ax+By+C=0$ 的图形是一条直线。

我们把方程(1-10)叫做直线的一般方程。

例3 已知直线 $y=kx+4$ 经过点 $P(-2, 6)$, 求此直线的斜角。

解 因为直线 $y=kx+4$ 经过点 $P(-2, 6)$, 故 P 点的坐标必满足此直线方程, 即

$$6=k \times (-2)+4$$

得 $k=-1$

设此直线的斜角为 α , 则有 $\operatorname{tg} \alpha=-1$, 所以 $\alpha=135^\circ$ 。

例4 已知直线经过点 $A(3, -5)$, 且其斜角等于直线 $x-2y-6=0$ 的斜角的二倍, 求此直线方程。

解 把直线 $x-2y-6=0$ 化为斜截式, 得

$$y=(1/2)x-3$$

可知此直线的斜率 $k_1=1/2$, 即 $\operatorname{tg} \alpha_1=1/2$ 。

设所求的直线的斜角为 α , 则根据题意得知

$$\alpha=2\alpha_1$$

从而得所求直线的斜率为

$$\begin{aligned} k &= \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 2\alpha_1 = 2\operatorname{tg} \alpha_1 / (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_1) \\ &= \left(2 \times \frac{1}{2} \right) / [1 - (1/2)^2] = 4/3 \end{aligned}$$

由公式(1-6)得所求的直线方程为

$$y+5=(4/3)(x-3)$$

即 $4x-3y-27=0$

例5 求直线 $3x+3y-5=0$ 的斜角与截距, 并作出图形。

解 把方程 $3x+3y-5=0$ 化为斜截式, 得

$$y=-x+(5/3)$$

由此可得直线的斜率 $k=-1$, 即 $\operatorname{tg} \alpha=-1$, 所以直线的斜角 $\alpha=135^\circ$ 。

把方程 $3x+3y-5=0$ 化为截距式:

$$[x/(5/3)] + [y/(5/3)] = 1$$

可见直线的横截距 $a=5/3$, 纵截距 $b=5/3$ 。

利用此直线的截距可作出图形(图1-18)。

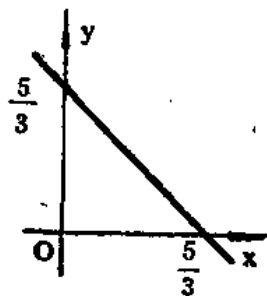


图 1-18

§1.3 两直线间的位置关系

这一节介绍平面上两条直线相互平行, 垂直的条件以及两条直线的交点的求法。

一、两直线的平行

已知两条直线 l_1 及 l_2 都不平行于 y 轴, 且它们的斜角分别为 α_1 与 α_2 , 斜率分别为 k_1 与 k_2 , 在 y 轴上的截距分别为 b_1 与 b_2 , 则此两直线的方程可以写成

$$l_1: y = k_1x + b_1$$

$$l_2: y = k_2x + b_2$$

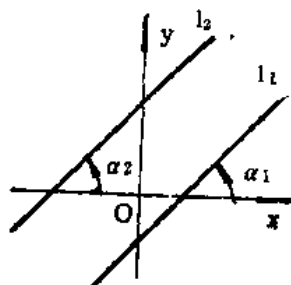


图 1-19

如图(1-19)所示, 设 $l_1 // l_2$, 则 $\alpha_1 = \alpha_2$, 因此 $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$, 即 $k_1 = k_2$, 所以, 两直线平行时, 它们的斜率必相等。

反过来, 如果已知两直线 l_1 与 l_2 的斜率相等, 就是 $k_1 = k_2$, 亦即 $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$, 由此可推得斜角 $\alpha_1 = \alpha_2$, 于是 $l_1 // l_2$ 。因此, 两条直线平行的充要条件是它们的斜率相等。

二、两直线的垂直

设两直线 l_1 与 l_2 互相垂直, 且它们的斜角分别为 α_1 与 α_2 , 则斜率 $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ 。从图 1-20, 可知

$$\alpha_2 = (\pi/2) + \alpha_1$$

因此 $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg}[(\pi/2) + \alpha_1]$

$$= -\operatorname{ctg} \alpha_1 = -1/\operatorname{tg} \alpha_1$$

即 $k_2 = -1/k_1$ 或 $k_1 k_2 = -1$

可见: 如果两直线互相垂直时, 则它们的斜率互为负倒数。

反过来, 如果 $k_1 k_2 = -1$, 则可推得 $l_1 \perp l_2$, 由此可得出下面的结论: 两条直线垂直的充要条件是它们的斜率互为负倒数。

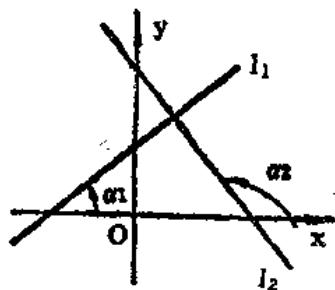


图 1-20

三、两直线的交点

设两直线 l_1 与 l_2 的方程分别为

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

如果直线 l_1 与 l_2 相交, 则它们的交点 $M(x_0, y_0)$ 的坐标必满足这两个方程, 因此, 求两条直线的交点就是求解方程组:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

例 1 求经过两直线 $3x + 5y - 13 = 0$ 与 $x + y - 1 = 0$ 的交点且垂直于直线 $7x - 5y - 10 = 0$ 的直线方程。

解 解方程组

$$\begin{cases} 3x+5y-13=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

得 $x=-4, y=5$, 于是给定的两直线的交点为 $(-4, 5)$ 。

把直线 $7x-5y-10=0$ 写成点斜式:

$$y=(7/5)x-2$$

可知此直线的斜率 $k_1=7/5$

设所求直线的斜率为 k , 根据两直线垂直条件, 得

$$k=-1/k_1=-5/7$$

由公式(1-6)得所求的直线方程为

$$y-5=(-5/7)(x+4)$$

$$\text{即 } 5x+7y-15=0$$

例2 设 $\triangle ABC$ 的三顶点为 $A(-10, 2), B(6, 4), C(0, -5)$, 求经过顶点 A 且平行于 BC 边的直线方程。

解 作出 $\triangle ABC$ 的图形(图1-21)。 BC 边的斜率为

$$k_{BC}=(-5-4)/(0-6)=3/2$$

设经过 A 点且平行于 BC 边的直线为 MN 。由于 $MN \parallel BC$, 故直线 MN 的斜率

$$\text{为 } k_{MN}=k_{BC}=3/2$$

由公式(1-6)得所求的直线方程为

$$y-2=(3/2)(x+10)$$

$$\text{即 } 3x-2y+31=0$$

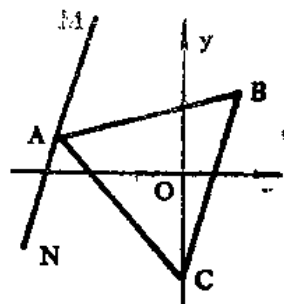


图 1-21

§1.4 圆的一般方程

一、圆的标准方程

我们知道, 圆心确定圆的位置, 而半径确定圆的大小。现在我们根据圆心的坐标以及圆的半径来求圆的方程。

已知圆心为 $C(a, b)$, 半径是 R , 求圆的方程(图1-22)。

设 $M(x, y)$ 是圆上任意一点, 那末, $|CM|=R$ 根据两点间的距离公式, 有

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

两边平方, 得

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (1-11)$$

可知: 圆上的任意一点的坐标都满足方程(1-11)。反过来, 凡是满足方程(1-11)的点 $P_1(x_1, y_1)$ 必定在圆上。因为, 此时有

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=R^2$$

上式两边取算术根, 得

$$\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}=R$$

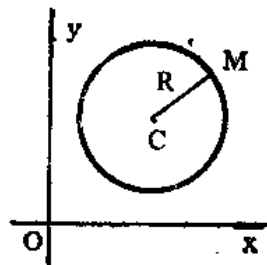


图 1-22