经济数学方法

李 茂 林 著

中央民族学院出版社

经济数学方法

李茂林 著

中央民族学院出版社
一九八九年·北京

经济数学方法

李茂林 著

•

中央民族学院出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京飞达印刷厂印装

787×1092毫米 32开本 13.6875印张 310千字

1989年9月第1版 1989年9月第1次印刷

印数：1—2000册

ISBN7-81001-029-3/G·10 定价：2.90元

前　　言

现代管理的一切目的都是围绕着使企业达到预期的最佳经济效益．为此必须在各种环境的影响与制约的条件下，进行科学的预测，权衡利弊，进行择优，做出决策．因此，管理就是决策，而决策的核心是择优．

经济数学方法作为管理科学的一部分，它也和所有的管理方法一样，是为一定的管理思想服务的工具．为了达到管理的目的，人们必须根据多变的条件正确地进行预测和决策；为了达到所做出的决策的目的，首先应该考虑如何应用线性最优计划方法研究现有人力、物力和资源的合理开发利用；用盈亏平衡分析的方法确定满意的经营策略；考虑原料、产品的合理运输．继而用网络技术等方法有效地组织生产，并在生产过程中进行监督和控制；一旦发现问题或有新的情况产生，要用投入产出分析方法等对计划进行调整，使企业协调、平衡地发展，达到预期的决策目标．

本书除对前面所提到的现代管理方法给出了系统而清晰的概念外，对所涉及的方法都给出了数学方法的理论推导，同时还注意了数学推导过程中的实际经济意义。总之，书中尽力争取做到数学方法赋予实际经济意义，而对一些经济理论又给予数学本身所固有的那种严密性的证明．因此，本书可作为大专院校经管类学生的参考资料．另外，书中对所有的理论和方法都给出了实例，所以本书还可作为经济工作者和企业管理人员学习参考或培训之用．

目　录

第一章　线性最优计划问题的基本概念……………………（1）
第一节　什么是线性最优计划问题……………………（1）
第二节　线性最优计划问题的标准型…………………（8）
第三节　线性最优计划问题的解………………………（14）
第四节　两个变量的线性最优计划问题的图解法……………………………………………（17）
第五节　线性最优计划问题的基本定理……………（27）
第二章　单纯形法及其经济意义…………………………（38）
第一节　初始基变量的确定……………………………（38）
第二节　基B的单纯形表………………………………（42）
第三节　换基迭代…………………………………………（47）
第四节　用单纯形法求解线性最优计划问题的一般步骤…………………………………………（58）
第五节　两段法……………………………………………（66）
第六节　大M法……………………………………………（78）
第七节　退化形式的线性最优计划问题……………（82）
第三章　对偶规划问题及其经济意义……………………（91）
第一节　对偶问题的提出………………………………（91）
第二节　对偶问题的构成………………………………（98）
第三节　对偶定理…………………………………………（112）
第四节　对偶单纯形法…………………………………（118）
第五节　平衡定理…………………………………………（133）

第六节　影子价格及应用…………………………（143）
第七节　最小化问题……………………………（146）
第八节　关于生产计划的调整问题………………（150）
第九节　关于按国家计划进行生产的问题………（181）
第四章　最优运输问题………………………………（193）
第一节　平衡最优运输问题的特点………………（193）
第二节　平衡最优运输问题的表上作业法………（197）
第三节　运价变换法……………………………（211）
第四节　非平衡最优运输问题……………………（221）
第五节　表上作业法的应用推广…………………（229）
第五章　相对效率方法………………………………（245）
第一节　什么是相对效率方法……………………（245）
第二节　相对效率方法的数学意义………………（246）
第三节　配套生产问题……………………………（259）
第六章　投入产出分析………………………………（269）
第一节　投入产出分析的基本概念………………（269）
第二节　价值型部门间投入产出模型……………（271）
第三节　实物型部门间投入产出模型……………（291）
第四节　部门间投入产出分析的应用……………（294）
第七章　边际分析……………………………………（310）
第一节　经济学中一些基本的量…………………（310）
第二节　边际概念…………………………………（312）
第三节　弹性系数…………………………………（313）
第四节　企业提高经济效益的根本途径…………（317）
第五节　盈亏平衡分析……………………………（319）
第六节　盈亏平衡分析的应用……………………（325）

第七节　边际贡献分析……………………………（327）
第八节　优化问题………………………………（334）
第八章　经济预测与决策……………………………（338）
第一节　经济预测的意义…………………………（338）
第二节　长期趋势预测……………………………（342）
第三节　移动平均预测法…………………………（358）
第四节　指数平滑预测法…………………………（361）
第五节　趋势调整指数平滑预测法………………（371）
第六节　时间序列季节性变化预测法……………（374）
第七节　专家调查法………………………………（385）
第八节　回归分析预测法…………………………（388）
第九节　风险型决策………………………………（400）
第十节　非确定型决策……………………………（408）

附表Ⅰ　……………………………………………（413）
附表Ⅱ　……………………………………………（415）
附表Ⅲ　……………………………………………（417）
附表Ⅴ　……………………………………………（423）
附表Ⅳ　……………………………………………（429）

第一章　线性最优计划问题的基本概念

第一节　什么是线性最优计划问题

线性最优计划是现代管理方法中计划管理常用的一种方法. 在企业的经营管理中常常要处理这样的一些问题：要完成一些活动（如制造一些产品　运输几类物资等），而完成的方式可有各种选择与搭配；另一方面借以完成这些活动的资源（如原料、设备能力、人力、土地、电力等)又有限制，或者是对活动的结果要求满足一定的标准（如产品的某些质量指标，产品的数量等)；人们所面临的问题是如何利用有限的资源或满足一定的标准而进行活动，从而使经济效益（如产值、利润、成本等）最优（如产值最高、利润最大、成本最低等）. 因此可以这样说，计划管理工作的任务就是要充分利用企业的一切资源，最大限度地完成各项计划指标，以获得最好的经济效益. 线性最优计划就是达到这一目标的一种有效方法.

什么是线性最优计划，可以先看一个实例.

例1.1-1：车间里要加工24件A种零件和要尽量多加工一些B种零件. 这天车间共有男工10人和女工14人，通常男工每人一天可以加工A种零件3件或B种零件2件；女工每人一天可加工A种零件2件或B种零件1件. 问怎样安排劳力

最合理？

在这里加工A种零件是重点任务，必须保证完成．初看起来，分配男工8人加工A种零件，其余的加工B种零件，这种分配似乎最省人力，但车间主任却安排12个女工加工A种零件，其余的两名女工和10名男工加工B种零件．表面上看后者安排似乎不合理，在人数上比安排8名男工多占用了4人．事实上，后一种方案比前一种要合理．按前一种方案，剩余的2名男工和14名女工加工B种零件，加工B种零件的总件数为：$2\times2+1\times14=18$（件）．

如果按后一种方案，12名女工同样可加工24件A种零件，其余的人去加工B种零件，那么，加工B种零件的总数为：$2\times10+1\times2=22$（件）．

可见，在同样完成24件A种零件的情况下，可以多加工B种零件4件．所以，对人力进行合理的安排，可以在同样人力的条件下，完成更多的任务．

这个例子讲的是两组人力加工两种零件，一种是重点任务，必须保证完成；另一种是非重点任务，要求完成得越多越好．假设安排男工x_1人，女工x_2人去加工A种零件，那么x_1，x_2分别是满足下列条件的非负整数：

$$0\leqslant x_1\leqslant10 \qquad (1.1-1)$$

$$0\leqslant x_2\leqslant14 \qquad (1.1-2)$$

因为男工每人每天可加工3件A种零件，x_1人一天可加工$3x_1$件；同样，女工每人每天可加工A种零件2件，即x_2人一天可加工$2x_2$件．要求保证完成24件A种零件的加工任务，x_1，x_2还应满足条件

$$3x_1+2x_2\geqslant24 \qquad (1.1-3)$$

剩下的男工（$10-x_1$）人，女工（$14-x_2$）人，加工B种零件的总数为：

$$S=2(10-x_1)+1(14-x_2)$$
$$=34-(2x_1+x_2)$$

于是问题变成：求满足条件（1.1—1）和（1.1—2）.（1.1—3）的非负整数x_1、x_2的值，使S取得最大值．这样，一个关于人力安排的问题就抽象成一个数学问题：

求　　$\max S=34-(2x_1+x_2)$

并使之满足

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\geqslant 24 & (1.1—4) \\ x_1\leqslant 10 & (1.1—5) \\ x_2\leqslant 14 & (1.1—6) \\ x_1,\ x_2\geqslant 0 & (1.1—7) \end{cases}$$

象例1.1—1这样，把一个实际的经济管理问题抽象成一个反映这个实际经济问题的数学形式，其数学形式被称为**经济数学模型**．简言之，经济数学模型是反映实际经济问题实质的数学形式．

我们把例1.1—1中要求变量x_1，x_2所满足的条件（1.1—4）至（1.1—7）叫作**约束条件**，函数S叫作**目标函数**．这种在一些约束条件（由等式或不等式给出）下，求目标函数的最大（或最小）值的问题叫作**最优计划问题**．如果某最优计划问题的经济数学模型为：

$$\min Z=f(x_1\cdots\cdots x_n)$$
$$〔或\quad \max S=f(x_1\cdots\cdots x_n)〕$$

$$D:\begin{cases} g_1(x_1\cdots\cdots x_n)\leqslant b_1 \\ g_1(x_1\cdots\cdots x_n)\leqslant b_2 \\ \cdots\cdots \\ g_m(x_1\cdots\cdots x_n)\leqslant b_m \\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,\cdots\cdots n \end{cases}$$

而且目标函数f（$x_1\cdots\cdots x_n$）和约束条件D都是线性函数。象这样目标函数和约束条件都是线性函数的最优计划问题就叫作**线性最优计划问题**．而目标函数或约束条件中出现非线性函数的最优计划问题就称为非线性最优计划问题．总而言之，最优计划问题是利用数学方法去讨论和研究如何最有效地筹划与使用资源的方法．从数学的角度上看，最优计划问题就是在一组约束条件（通常由等式或不等式给出）下，去求一个多变量函数的最大值或最小值．而线性最优计划问题是它的一个重要分支，也是经营管理中应用最多的一种方法．线性最优计划问题所研究的内容大致分为两类：一类是确定了一项任务之后，研究怎样用最少的人力物力去完成它；另一类是在一定的人力物力的条件下，研究怎样合理安排，使它们发挥最大的作用，从而完成最多的任务．其实这两类问题是一个问题的两个方面，就是寻求整个问题的某个方面的经济效益最优的问题

具有实际经济意义的经济数学模型，在经济管理中，约束条件表示所提出的解决问题的方案必须是可行和现实的，即企业在现有生产条件和经营能力的情况下能办到的．当然，如果企业生产和经营的规模有了变动，约束条件亦应随之改变，从而解决问题的措施和方案就要更新．目标函数是表示期望值与变量的相关式．期望值有最大，最小之分，由具体

问题的要求而确定．目标函数在经济管理中表示所提出的方案不仅可行，而且最佳．因此，经济数学模型意味着：企业在现有能力和条件下，为达到期望的最佳效果，怎样去充分挖掘潜力．

要解决一个经济问题，首先是建立其经济数学模型，只有这样才能达到利用数学方法来进行对问题的讨论和处理的目的．如果对一个实际问题建立不起其经济数学模型，就根本谈不上解决问题．至于建立经济数学模型是否有一般的方法可循的问题，回答是否定的．因为实际问题多种多样，千变万化，很难找出一个固定的程序和方法、要说有的话，那就是深入实际，了解有待解决的问题的全过程，找出影响问题的诸因素，分析判断诸因素在量方面的内在关系．这些内在关系分析判断清楚了，其经济数学模型也建立起来了．

例1.1—2：某工厂使用三台机床A_1,A_2，A_3生产加工五种产品B_1，B_2，B_3，B_4，B_5．各种产品每生产一件所要求的机床时间，各台机床在这个计划期内的总能力限制，以及各种产品每一件的价格，如下表：

	机床能力限制（小时）	每件产品占用的机床时间（小时）				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
机床A_1	100	4	3	1	2	0
机床A_2	40	1	0	0	1	2
机床A_3	60	2	4	0	1	2
每件产品的价格（元）		3	1	$\frac{1}{2}$	2	2

问应如何安排各种产品生产的件数，使得该工厂在这个

计划期内的总产值最大？

现在讨论怎样把上述实际的生产计划问题表达成一个数学问题．设产品B_1……B_5分别生产x_1……x_5件．既然每生产1件产品B_1需占用机床A_1的时间为4小时，那么生产x_1件产品B_1便占用$4x_1$小时．同时，生产x_2、x_3、x_4、x_5件产品B_2、B_3、B_4、B_5消耗机床A_1的时间分别为$3x_1$、$1x_3$、$2x_4$、$0x_5$小时．

同样机床A_2的消耗分别为$1x_1$、$0x_2$、$0x_3$、$1x_4$、$2x_5$（小时）

机床A_3的消耗分别为$2x_1$、$4x_2$、$0x_3$、$1x_4$、$2x_5$（小时）．

因此，各台机床总的消耗分别为：

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2+x_3+2x_4 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad +x_4+2x_5 \\ 2x_1+4x_2 \qquad\quad +x_4+2x_5 \end{cases}$$

由于各种机床能力的限制，应有：

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2+x_3+2x_4 \qquad \leqslant 100 \\ x_1 \qquad\qquad\qquad +x_4+2x_5 \leqslant 40 \\ 2x_1+4x_2 \qquad\quad +x_4+2x_5 \leqslant 60 \end{cases}$$

又由于在实际生产时，每种产品都可能生产，也可能不生产，所以各变量应满足条件：

$$x_j \geqslant 0, \qquad (j=1, \cdots\cdots, 5).$$

设S表示该工厂生产的各种产品的总值：

$$S=3x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3+2x_4+2x_5$$

因此，得这个问题的经济数学模型为：

求　$\max S=3x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3+2x_4+2x_5$

并使之满足条件

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2+x_3+2x_4 \leqslant 100 \\ x_1+x_4+2x_5 \leqslant 40 \\ 2x_1+4x_2+x_4+2x_5 \leqslant 60 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1,\cdots\cdots 5) \end{cases}$$

例1.1—3：要从A_1城调出蔬菜2，000吨，从A_2城调出1，100吨，分别供应B_1地1，700吨、B_2地1,100吨、B_3地200吨、B_4地100吨．已知每吨运费如下表：

每吨运费（元）　供应单位 / 调出单位	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	21	25	7	15
A_2	51	51	37	15

问如何调拨蔬菜才能使总的运费最少？

作一个蔬菜调拨计划，就是给出从每一个产地运到每一个销地的蔬菜的数量．假设用变量x_{ij}表示从A_i城调拨给B_j地的蔬菜数量．那么从A_1，A_2两城分别调拨给B_1，B_2,B_3，B_4四地的蔬菜数量总和应该分别等于2，000吨和1,100吨。又因A_1，A_2两城总调出量恰好等于$B_1\cdots\cdots B_4$四地的总需要量。所以x_{ij}应满足：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1100 \end{cases}$$

运到B_1、B_2，B_3，B_4四地的蔬菜的数量应该分别是1700吨、1100吨、200吨、100吨，所以x_{ij}还应满足：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}=1700 \\ x_{12}+x_{22}=1100 \\ x_{13}\times x_{23}=200 \\ x_{14}+x_{24}=100 \end{cases}$$

x_{ij}是运量，不能是负数，所以还应满足：

$$x_{ij}\geqslant 0,\quad (i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3\ \ 4)$$

假设总运费为Z，则：

$$Z=21x_{11}+25x_{12}+7x_{13}+15x_{14}+51x_{21}+51x_{22}$$
$$+37x_{23}+15x_{24}$$

因此，得蔬菜调拨问题的经济数学模型为：

求 $\min Z=21x_{11}+25x_{12}+7x_{13}+15x_{14}+51x_{21}$
$$+\ 51x_{22}+37x_{23}+15x_{24}$$

并使之满足条件

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1100 \\ x_{11}+x_{21} \qquad\qquad =1700 \\ x_{12}+x_{22} \qquad\qquad =1100 \\ x_{13}+x_{23} \qquad\qquad =200 \\ x_{14}+x_{24} \qquad\qquad =100 \\ x_{ij}\geqslant 0,\quad (i=1,\ 2;\ j=1\cdots\cdots 4) \end{cases}$$

第二节　线性最优计划问题的标准型

从第一节中的例1.1—1，例1.1—2，例1.1—3可以看出，线性最优计划问题的经济数学模型中有这样的几种情况：

目标函数有时要求实现最大化而有时又要求实现最小化；约束条件有的是“≤”，有的是“≥”，甚至有的是“=”；约束条件右端的常数也可能是正数、负数或零．这种多样性给问题的讨论带来诸多的不便，所以有必要规定线性最优计划问题的标准形式为：

$$\max S=C_1x_1+C_2x_2+\cdots\cdots+C_nx_n \qquad (1.2—1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_j\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots n \end{cases} \qquad (1.2—2)$$

其中c_j，b_i和a_{ij}均为实常数，x_j为要确定的实数．总可以假定$b_i\geqslant 0$，否则，在第i个方程两边乘以（−1）就可化为这种形式．

有时也用向量来表示：

$$\max S=CX$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j=b \\ x_j\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots n \end{cases}$$

其中 $C=(C_1,\ C_2,\ \cdots\cdots C_n)$，$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n)^T$，

$b=(b_1,\ b_2\cdots\cdots b_m)^T$，

$$p_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}=(a_{1j},\ a_{2j},\ \cdots\cdots a_{mj})^T。$$

有时亦可用矩阵的形式来表示：

$$\max S=CX$$

$$\begin{cases}AX=b\\X\geqslant 0\end{cases}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\cdots\cdots a_{1n}\\a_{21}a_{22}\cdots\cdots a_{2n}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}a_{m2}\cdots\cdots a_{mn}\end{pmatrix}=(p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots p_n)$$

$$0=(0,\ 0\cdots\cdots 0)^T$$

在经济管理中，C_j称为价值系数，b_i称为资源的限制数，a_{ij}是单位产品x_j对资源b_i的消耗量。在一般情况下，$X=(x_1,\ x_2\cdots\cdots x_n)^T$称为未知量向量；$b=(b_1\cdots\cdots b_m)^T$称为限定向量；$p_j=(a_{1j}\cdots\cdots a_{mj})^T$称为变量$x_j$的系数列向量；$A$称为约束方程组（1.2—2）$m\times n$阶的系数矩阵，且$m<n$，$m$，$n$为正整数.

因为实际中属于线性最优计划问题的经济数学模型是各式各样的，需要把它们化成标准型，并借助于标准型的求解法来进行求解.

下面讨论如何化标准型的问题.

（1）若要求目标函数实现最小化，即：

$$\min Z=CX$$

$$\begin{cases}AX=b\\X\geqslant 0\end{cases}$$

这时只需要把求目标函数的最小值变换为求目标函数的最大值，即

$$\min Z=-\max\ (-Z)$$