第3篇　相似理论与模化

目　录

随着科学技术的迅速发展，近代工程设计所面临的任务更加复杂，解决问题的手段也更加先进。

量纲分析是解决工程技术问题的重要手段之一，这是因为：

1）借助于量纲分析，在存在着多种影响因素的情况下，往往能够分辨出哪些因素是重要的，因而其他因素在设计中可以不加考虑。

2）量纲分析是建立相似律的基本方法，而相似律既是设计模型试验的理论依据，又是整理试验数据，推广试验结果应用范围所必需遵循的原则。

本篇从量纲分析出发，给出一般的相似原理和模化原则，以及它们在若干常见问题中的应用。

第1章 量纲分析及相似与模化的基本原理

1 基本量与导出量

在描述物质机械运动和宏观热运动的物理量中，一般有四个相互独立的物理量㊀，称为基本量。这些量通常取为长度、时间、质量和温度或者长度、时间、力和温度。前者称为$L-T-M-\Theta$系统，后者称为$L-T-F-\Theta$系统。每一个基本量都具有这样的特性，即：当基本量的单位缩小x倍时，其数值（度量）由q变为xq。

其他物理量的数值是通过将测量所得某些基本量的数值按指定方式组合而得，因而称这些其他的物理量为导出量。

根据这样一个事实，即两个问题中，同一性质物理量的两个数值的比例不因基本量单位的变化而异（例如，不论用什么长度单位，甲物的高度总是乙物宽度的某一倍数），可以证明，若q_1，q_2，……q_n为基本量，q为任一其他物理量，则有〔1〕〔2〕：

$$q=cq_1^{a_1}q_2^{a_2}\cdots q_n^{a_n} \qquad (3\cdot1\text{-}1)$$

式中 c，a_1，a_2，…，a_n是与基本量无关的纯数。显然，当q_1，…，q_n的单位缩小x_1，…，x_n倍时，导出量的数值根据式（3·1-1）由q变为q'，即

$$q'=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}q \qquad (3\cdot1\text{-}2)$$

2 量纲的定义和常见物理量的量纲

在$L-T-M-\Theta$系统中，如q_1为长度的数值，q_2为时间的数值，q_3为质量的数值，q_4为温度的数值，则式（3·1-1）特殊化为

$$q=cq_1^{a_1}q_2^{a_2}q_3^{a_3}q_4^{a_4} \qquad (3\cdot1\text{-}3)$$

这时我们定义q的量纲为$L^{a_1}T^{a_2}M^{a_3}\Theta^{a_4}$。通常以〔$q$〕表示$q$的量纲。于是有

$$[q]=L^{a_1}T^{a_2}M^{a_3}\Theta^{a_4} \qquad (3\cdot1\text{-}4)$$

同理在$L-T-F-\Theta$系统中

$$[q]=L^{b_1}T^{b_2}F^{b_3}\Theta^{b_4} \qquad (3\cdot1\text{-}5)$$

将量纲的定义用于基本量，则在$L-T-M-\Theta$系统中

〔长度〕$=L$ 〔时间〕$=T$ 〔质量〕$=M$ 〔温度〕$=\Theta$

在$L-T-F-\Theta$系统中

〔长度〕$=L$ 〔时间〕$=T$ 〔力〕$=F$ 〔温度〕$=\Theta$

根据量纲的定义，在$L-T-M-\Theta$系统中显然有

$$[q^n]=L^{na_1}T^{na_2}M^{na_3}\Theta^{na_4} \qquad (3\cdot1\text{-}6)$$

如果另一个物理量q'的量纲为

$$[q']=L^{a'_1}T^{a'_2}M^{a'_3}\Theta^{a'_4}$$

则由式（3·1-5）和式（3·1-6）一定有

$$[qq']=L^{a_1+a'_1}T^{a_2+a'_2}M^{a_3+a'_3}\Theta^{a_4+a'_4}$$
$$=[q][q'] \qquad (3\cdot1\text{-}7)$$

在$L-T-F-\Theta$系统中，只需在以上公式中，将M改为F，将a改为b。

如果对于某个q来说，a_1、a_2、a_3、a_4都等

㊀ 如还包括电学效应，则需增加另一基本量，如电流。

于零，我们有

$$[q]=L^0T^0M^0\Theta^0\equiv 1 \qquad (3\cdot1\text{-}8)$$

这时我们说 q 是无量纲的纯数。显然，无量纲量的数值不因单位的选择而异。

例如，速度的定义是距离在单位时间内的变化。因此

$$[速度]=LT^{-1}$$

同理

$$[加速度]=LT^{-2}$$

再如，牛顿第二定律给出

$$f=ma$$

式中 f——力

m——质量

a——加速度

根据运算法则式（3·1-6）和式（3·1-7），我们得到

$$[f]=LT^{-2}M \quad (L-T-M-\Theta系统)$$

$$[m]=L^{-1}T^2F \quad (L-T-F-\Theta系统)$$

表 3·1-1 给出常见物理量的量纲。

表3·1-1 常见物理量的量纲

物理量	定律或定义	量纲 $L-T-M-\Theta$	量纲 $L-T-F-\Theta$
长度 l，位移 u_i		L	L
质量 m		M	$L^{-1}T^2F$
时间 t，周期		T	T
温度 θ		Θ	Θ
面积 A	两个长度的乘积	L^2	L^2
体积 V	三个长度的乘积	L^3	L^3
密度 ρ	单位体积的质量	ML^{-3}	$L^{-4}T^2F$
速度 v	单位时间的位移的变化	LT^{-1}	LT^{-1}
加速度 a	单位时间的速度的变化	LT^{-2}	LT^{-2}
力 F	牛顿第二定律	MLT^{-2}	F
动量，冲量	质量与速度的乘积，力与时间的乘积	MLT^{-1}	TF
角度 φ（以弧度计）	弧长与曲率半径之比	$L^0T^0M^0\Theta^0$	$L^0T^0F^0\Theta^0$
角速度 $\dot{\varphi}$	单位时间的角度变化	T^{-1}	T^{-1}
角加速度 $\ddot{\varphi}$	单位时间角速度的变化	T^{-2}	T^{-2}
力矩	力与力臂的乘积	ML^2T^{-2}	LF
转动惯量 I	质量与距离平方的乘积	ML^2	LT^2F
角动量	$I\dot{\varphi}$	ML^2T^{-1}	LTF
压力 p	F/A	$ML^{-1}T^{-2}$	$L^{-2}F$
应力 σ（正应力或剪应力）	单位面积的力	$ML^{-1}T^{-2}$	$L^{-2}F$
弹性模量 E	虎克定律	$ML^{-1}T^{-2}$	$L^{-2}F$
应变	$\frac{\partial u_i}{\partial x}$	$L^0T^0M^0\Theta^0$	$L^0T^0F^0\Theta^0$
应变率或速度梯度	$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x\partial t}$	T^{-1}	T^{-1}
功	F_iu_i	ML^2T^{-2}	LF
动能	$\frac{1}{2}mv^2$，$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$	ML^2T^{-2}	LF
位势能	能量守恒定律	ML^2T^{-2}	LF
热能 Q	能量守恒定律	ML^2T^{-2}	
单位体积能量		$ML^{-1}T^{-2}$	$L^{-2}F$
比热（单位质量）	单位质量物质升温一度所需之热	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$
比热（单位体积）	单位体积物质升温一度所需之热	$ML^{-1}T^{-2}\Theta^{-1}$	$L^{-2}F\Theta^{-1}$
温度梯度	单位长度的温度变化	ΘL^{-1}	$L^{-1}\Theta$
热流	$Q/A\theta t$	$MT^{-3}\Theta^{-1}$	$L^{-1}T^{-1}F\Theta^{-1}$
热传导系数	傅立叶导热定律	$MLT^{-3}\Theta^{-1}$	$T^{-1}F\Theta^{-1}$

（续）

物　理　量	定　律　或　定　义	量　纲	
		L-T-M-Θ	L-T-F-Θ
热机效率	所作之功与加入之热的比	$M^0L^0T^0\Theta^0$	$L^0T^0F^0\Theta^0$
粘性系数　μ	$\sigma=\mu\dfrac{\partial v}{\partial y}$	$ML^{-1}T^{-1}$	$T^{-3}F$
干摩擦系数	摩擦力与正压力之比	$M^0L^0T^0\Theta^0$	$L^0T^0F^0\Theta^0$
扩散系数	扩散定律	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
表面张力	液体表面上单位长度的法向收缩	MT^{-2}	$L^{-1}F$
断裂韧性　K_c	正比于作用应力和裂纹长度开方的乘积	$ML^{-1/2}T^{-2}$	$L^{-3/2}F$

应当指出，不一定要一成不变地选取长度、时间、质量或力以及温度作为基本量。对于具体的问题往往选择已知条件中的某几个量纲相互独立的物理量作为基本量，其他则作为导出量。

3　π 定理

π 定理的表述：设一物理系统的 N 个不同的物理量 q_1，q_2，…，q_N 之间存在一定的函数关系：

$$f(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_N)=0 \qquad (3\cdot1\text{-}9)$$

如果 q_i（$i=1,\ 2,\cdots,N$）中，最多有 m 个物理量的量纲是相互独立的（m 一般不大于 4），那么式（3·1-9）可以演化为另一个函数关系：

$$f(\pi_1,\ \pi_2,\cdots,\pi_{N-m})=0 \qquad (3\cdot1\text{-}10)$$

其中　$\pi_j(j=1,2,\cdots,N-m)$ 是由 $\prod\limits_{i=1}^{N}q_i^{a_{ij}}$ 组成的 $N-m$ 个不同的无量纲量。以上两式以及下面的公式中的 f 除特别指出外仅表示某种确定的函数关系，在不同场合下具体形式不一定一样。

π 定理的证明可参看文献〔3〕〔4〕〔5〕。

π 定理的几点说明：

1）定理中强调了，同一个物理系统的物理量不论采用什么基本量的单位，如式（3·1-9）所表达的函数关系都是成立的。

2）q_i（$i=1,\ 2,\cdots,N$）中，最多有 m 个量纲相互独立的物理量。我们可以令这些 q_i 为 q_{N-1}，q_{N-2}，…，q_{N-m+1}，并认为它们是基本量，那末根据式（3·1-1），其他 q_i（$i=1,\ 2,\cdots,N-m$）可表示为

$$q_i=\pi_i q_N^{a_{N,i}}q_{N-1}^{a_{N-1,i}}\cdots q_{N-m-1}^{a_{N-m-1,i}}$$

或者

$$\pi_i=\frac{q_i}{q_N^{a_{N,i}}q_{N-1}^{a_{N-1,i}}\cdots q_{N-m-1}^{a_{N-m-1,i}}} \qquad (3\cdot1\text{-}11)$$

$$i=1,\ 2,\cdots,N-m$$

这些 π_i 是无量纲数，而且显然是各不相同的，因为除作为基本量的 q_N，q_{N-1}，…，q_{N-m-1} 外，每个 π_i 只包含一个导出量 q_i。显然，我们可以把这些 π_i 代入式（3·1-10）。

3）π_i 的个数是固定的但其形式不是唯一的。因为如果按式（3·1-11）所取的 π_i 为一组，那末，按下面的方式用 π_1' 代替 π_1，这样所组成的新组 π_1'，π_2，…，π_{N-m} 也同样是可行的：

$$\pi_1'=\pi_1\pi_2^{a_2}\pi_3^{a_3}\cdots\pi_{N-m}^{a_{N-m}} \qquad (3\cdot1\text{-}12)$$

显然，我们可以根据具体情况选取方便的无量纲数组。

4）π_i 通常是同一个问题中，两个相同性质的物理量的比例，如长度与宽度之比、作用力之比、动量之比、能量之比等。

4　相似、相似准数与相似律

设在一工程技术问题中，我们已知一物理量 q 以某种方式依赖于其他物理量 q_i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$）。由于 q 是因变量，q_i 是自变量，为了方便起见，我们不写成式（3·1-9）的形式，而写为

$$q=f(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_{N-1}) \qquad (3\cdot1\text{-}13)$$

在这里，函数 f 的具体形式是需要由实验和理论分析确定的。

根据 π 定理，由式（3·1-13）得出

$$\pi=f(\pi_1,\pi_2,\cdots,\ \pi_{N-m-1}) \qquad (3\cdot1\text{-}14)$$

其中

$$\pi=\frac{q}{q_N^{a_N}q_{N-1}^{a_{N-1}}\cdots q_{N-(m-1)}^{a_{N-(m-1)}}} \tag{3·1-15}$$

式（3·1-14）是相似律的基础。如果有两个工程技术问题它们受相同的物理规律的支配（即使这些规律的细节可能还不清楚），那末，在第一个问题（系统）中有

$$q=f(q_1, q_2, \cdots, q_{N-1}) \tag{3·1-16}$$

在第二个问题（系统）中有

$$q'=f(q_1', q_2', \cdots, q_{N-1}') \tag{3·1-17}$$

式（3·1-16）和式（3·1-17）中代表运算的函数是完全相同的。从而

$$\pi=f(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{N-m-1})$$

$$\pi'=f(\pi_1', \pi_2', \cdots, \pi_{N-m-1}')$$

中的 f 也是相同的。因此在 $\pi_i=\pi_i'$（$i=1, 2, \cdots, N-m-1$）的条件下，有

$$\pi=\pi'$$

这就是说，两个问题中因变量的互相换算满足下述关系：

$$q=q'\frac{q_N^{a_N}q_{N-1}^{a_{N-1}}\cdots q_{N-m+1}^{a_{N-m+1}}}{q_N'^{a_N'}q_{N-1}'^{a_{N-1}'}\cdots q_{N-m+1}'^{a_{N-m+1}'}} \tag{3·1-18}$$

相似律可陈述如下：在物理上相同的两个问题中，如果相应的 π_i 都彼此相等，那么含有因变量的 π 也必然相等（π 可能不止一个，但两个问题中相应的 π 相等），并满足类似于式（3·1-18）所规定的换算关系。这时我们说两个问题是相似的。

π_i 称为相似准数。

由于在相似准数相等的条件下，因变量之间存在着直接的换算关系，因此在工程中广泛使用与实物相似的模型进行实验，以取得工程设计所需的各种数据或建立函数 f 的具体形式。

5 π 定理在整理实验规律时的应用

式（3·1-13）包含 $N-1$ 个自变量。为了通过实验确定 q 对 $q_1, q_2, \cdots, q_{N-1}$ 的依赖关系，需要做 $N-1$ 个变数的试验。另一方面，式（3·1-14）却只包含 $N-m-1$ 个变量，因此只需做 $N-m-1$ 个变数的试验。后者的试验次数远比前者为少，因为 m 通常等于3（力学问题）或4（包含热效应在内的力学问题）。按照 π 定理的要求安排实验和整理实验规律，不仅可以节约大量实验而且可以使实验结果具有更大的普遍性。

6 运用量纲分析和 π 定理时应注意之点

1）在列出式（3·1-13）中的自变量时，要保证 $q_1, q_2, \cdots, q_{N-1}$ 确实都是自变量，避免在 q_i 中混入因变量，而因变量只能放在等式左面以 q 的形式出现。

不要在 q_i 中丢掉反映问题主要矛盾的自变量，否则将不能找出 q 与自变量之间的正确关系。

究竟有几个自变量，这个问题不是量纲分析所能答复的。只有对物理过程的深入认识才能解决这个问题。

2）式（3·1-14）中函数 f 的具体形式只能通过理论和实验才能解决，即依赖于对过程实质的认识，而不是 π 定理所能解决的。

在用实验方法整理函数 f 的形式时，往往能在自变量的某一范围内，采用指数关系的形式，即：

$$\pi=c\pi_1^{a_1}\pi_2^{a_2}\cdots\pi_{N-m-1}^{a_{N-m-1}}$$

把实验曲线画在对数座标纸上，便得方程：

$$\ln\pi=\ln c+\alpha_1\ln\pi_1+\alpha_2\ln\pi_2+\cdots+\alpha_{N-m-1}\ln\pi_{N-m-1}$$

于是，由曲线的斜率定出方幂 α_i，截距定出常数因子 c。

3）分析无量纲数 π_i 的物理意义和比较它们数值的大小，往往能提供一些关于哪些自变量能够被忽略的线索和加深对物理过程的认识。例如，对于一个质点的运动，如果作用有两个性质类似的力 F_1 和 F_2，如果 $\frac{F_2}{F_1}\ll 1$，则有时（取决于我们感兴趣的 q）可以忽略 F_2，由 $\frac{F_2}{F_1}$ 所形成的 π_i 将不在式（3·1-14）中出现。

4）在式（3·1-9）或式（3·1-13）中，我们是从一般的函数 f 出发的。如果我们进一步知道这个物理现象的实质或者知道描述这个物理系统的微分方程和有关的初始和边界条件，那么所得到的相似准数 π_i 和无量纲的因变量 π 依赖于相似准数 π_i 的关系将更为具体，并找到简化的途径。

指出这一点是很必要的。因为在许多情况下，q_i 的数目比较多，在模型试验中要满足所有的 π_i 都相等的条件往往是办不到的。但是如果进行深入的分析（包括通过微分方程的分析），得到了简化的模型，那么虽不能实现完全的模拟，但局部模拟（指部分的 q 能够模拟）常是可能的。在以后几章中，

有时我们将从微分方程出发建立相似准数。

但是，应该说明，复杂的问题往往找不到合适的方程来进行描述。相反，如果对问题进行定性但透彻的分析，抓住了问题中的主要矛盾和本质关联，就能找出正确的相似准数并对问题实现正确的简化。因此关键在于对问题的实质要尽力进行正确的深入的分析，不在于分析手段在形式上的“高低”。

5）基本量的数目m通常不大于4。这是因为在包括热学效应的力学系统中，有4个独立的量纲L-T-M-Θ或L-T-F-Θ。

力的量纲F与质量的量纲M之所以不是独立的，是因为它们之间受牛顿第二定律的约束。然而，如果在所讨论的特定问题中，不需要使用牛顿第二定律，那末力单位和质量单位就相互独立了。这时，基本量纲的数目可以是5。

同理，如果在所讨论的问题中，不需要考虑热能与机械能之间的转换，即两者之间无需用焦耳定律联系起来，则热量的单位可以单独予以定义。这样就又可以增加一个新的基本量纲Q，其单位可以用卡。

所以，在特定情况下，基本量纲的数目最多可增为6个。

基本量的数目愈多（m愈大），则$N-m-1$愈小，π_i的数目就愈小。要注意在量纲分析中利用这个便利条件，详见下例。

7　示　例

设有一内径为R的水平直管，其长为l。这个管道用来输送粘性系数为μ，密度为ρ的不可压缩流体，平均流速为w。求管子两端的压差Δp与这些参数的关系。

（1）建立$q=f(q_1, q_2, \cdots, q_{N-1})$

显然，Δp应视为因变量。凡是知道粘性系数定义的人，都知道摩阻是与μ和速度梯度的乘积成正比的。在本例的条件下，速度梯度与w/R成正比。另外管子愈长，阻力必然愈大，因此Δp应是l的函数。当然，由于速度分布在半径方向是变化的，所以不同半径处的流体微元间可能有动量的传递，而流体微元的平均动量表达式为ρw。根据以上分析，可以予期Δp应是μ、R、l、w、ρ的函数，即

$$\Delta p=f(\mu, R, l, w, \rho) \quad (3\cdot1\text{-}19)$$

在列出上式时，我们没有考虑流体中有气泡或传热的情况，没有考虑管壁的粗糙度，也没有考虑到粘性力所产生的热效应。因此所得到的结果自然不能应用于这些因素比较重要的那些问题中去。

（2）列出各物理量的量纲

物理量	量　纲	物理量	量　纲
Δp	$L^{-1}T^{-2}M$	w	LT^{-1}
l	L	ρ	ML^{-3}
R	L	μ	$L^{-1}T^{-1}M$

（3）选择基本量

从上表可见，R、w、ρ可看作是基本量，因为它们之间在量纲上是相互独立的，而且其他物理量的量纲可以用R、w、ρ的组合（$R^{a_1}w^{a_2}\rho^{a_3}$）来表示。于是$N=6$，$m=3$。

（4）形成π和π_i

根据π定理，因为$N-m=3$，应当形成3个不同的无量纲数，我们取为：

$$\pi=\frac{\Delta p}{\rho w^2}$$

$$\pi_1=\frac{l}{R}$$

$$\pi_2=\frac{\rho w R}{\mu}$$

因此有

$$\frac{\Delta p}{\rho w^2}=f\left(\frac{l}{R}, \frac{\rho w R}{\mu}\right) \quad (3\cdot1\text{-}20)$$

（5）函数f的确定

从物理上考虑，如果管子很长（相对于R），则进出口两端的端部效应的影响区长度与l相比就很小。这时，Δp应该正比于l，因此

$$\frac{\Delta p}{\rho w^2 l}=f\left(\frac{\rho w R}{\mu}\right) \quad (3\cdot1\text{-}21)$$

这个公式曾为许多试验所证实，所用流体包括水、油、空气等。

（6）f的极限情况

在流速很小的情况下，更确切地说在$\rho w R/\mu$很小的情况下，惯性力与粘性摩阻相比应当很小。根据这种考虑，Δp应当与密度无关，因此式(3·1-21)中的f应具有下述特殊形式：

$$f\left(\frac{\rho w R}{\mu}\right)=\frac{c\mu}{\rho w R} \quad (3\cdot1\text{-}22)$$

其中c是无量纲常数。于是式（3·1-21）变为

$$\Delta p = c\frac{\mu w l}{R^2} \qquad (3\cdot1\text{-}23)$$

同样的结果可以用增加基本量个数的方法来得到（参看本章第6节）。忽略惯性相当于不应用牛顿第二定律。于是质量和力量纲上是独立的。因此，基本量就有4个。

列出诸量的量纲：

物理量	量纲	物理量	量纲
Δp	FL^{-2}	w	LT^{-1}
l	L	ρ	ML^{-3}
R	L	μ	$FL^{-2}T$

其中R、μ、w、ρ可选为基本量。于是

$$\pi = \frac{\Delta p}{\mu}\ \frac{R}{w}$$

$$\pi_1 = \frac{R}{l}$$

在这两个无量纲数中，ρ的方幂都是零。因为知道压差正比于管长，从而

$$\frac{\Delta p}{\mu}\ \frac{R}{w} = f\left(\frac{l}{R}\right) = c\frac{l}{R}$$

这就是前面已推导出的式（3·1-23）。式（3·1-23）所表示的流动称为泊肃叶流动。

第2章 强度和振动问题的模化[6][7][8]

1 三维弹性体的变形和应力

1）几何模拟 我们要求模型与实物几何相似。若令l为实物的特征长度，l_m为模型的特征长度，α_l表示实物尺寸与模型尺寸的比例，也称几何相似倍数，则$\alpha_l = l/l_m$。以x，y，z表示实物中任一点的座标，则模型中相应点的位置x_m，y_m，z_m为

$$(x_m, y_m, z_m) = \left(\frac{x}{\alpha_l}, \frac{y}{\alpha_l}, \frac{z}{\alpha_l}\right) \qquad (3\cdot2\text{-}1)$$

2）载荷模拟 在一般机械强度问题中，重力往往是可以忽略的。这是因为，重力所引起的应力（$\approx\rho g l$）与屈服应力Y的比值，即$\rho g l/Y$是个很小的量。这里，ρ是材料的密度，g是重力加速度。因此在载荷模拟中，不考虑重力影响。

在实物表面S_σ上作用有分布载荷$\Sigma^i(x, y, z)$，用单位面积上的作用力来度量。Σ^i可以写为

$$\Sigma^i = \Sigma f^i\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}\right) \qquad (3\cdot2\text{-}2)$$

Σ称为特征分布载荷，f^i是表示载荷分布规律的函数。在模型中，我们要求分布载荷$\Sigma_m^i = \Sigma_m f_m^i$，其中$f_m^i$与$\Sigma_m$各为

$$\left.\begin{aligned} & f_m^i\left(\frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m}\right) \\ & = f^i\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}\right) \\ & \Sigma_m = \frac{1}{\alpha_\Sigma}\Sigma \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot2\text{-}3)$$

在实物表面上若作用有N个集中力$F^i_{(n)}$（$n=1, 2, \cdots N$），在模型相应的位置上，要求取相应的集中力为

$$F^i_{m(n)} = \frac{F^i_{(n)} l_m^2}{l^2}\ \frac{1}{\alpha_\Sigma} = \frac{1}{\alpha_\Sigma \alpha_l^2} F^i_{(n)} \qquad (3\cdot2\text{-}4)$$

把这个式子改写一下，即是

$$\frac{F^i_{m(n)}}{L_m^2} = \frac{1}{\alpha_\Sigma}\ \frac{F^i_{(n)}}{L^2}$$

这意味着，在模型和实物之间，集中力$F^i_{(n)}$与特征面积l^2的比值相差α_Σ倍，这正是分布载荷的比值，从而$\frac{F^i_{(n)}}{L^2}$的地位和Σ^i的地位相当，彼此可以互相折合。所以下面我们只讨论分布载荷的问题就足够了。

3）位移模拟 在实物的另一部分表面S_u上，可能规定有位移W^i。我们将$W^i(x, y, z)$写为

$$W^i = W g^i\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}\right) \tag{3·2-5}$$

式中 W 称为特征位移。在模型上，我们在相应点上要求

$$g_m^i\left(\frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m}\right) = g^i\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}\right)$$

$$W_m = W\frac{l_m}{l}\ \frac{1}{\alpha_W} = \frac{W}{\alpha_l \alpha_W} \tag{3·2-6}$$

注意，在式（3·2-5）中不包括刚体运动的那部分位移，因为这一部分既不产生应变也不产生应力。

4）材料模拟　对于各向同性线弹性体只有两个弹性常数，可以取弹性模量 E 和泊松比 ν。ν 已是无量纲数，因此模型材料的 ν_m 必须等于实物材料的 ν。

若实物是由几种材料组成的，其弹性常数分别为（E_1，ν_1），（E_2，ν_2），…。则模型材料的（E_{m1}，ν_{m1}），（E_{m2}，ν_{m2}），…必须满足下述条件：

$$\left.\begin{array}{l} E_1:E_2:E_3:\cdots = E_{m1}:E_{m2}:E_{m3}:\cdots \\ \nu_1 = \nu_{m1},\ \ \nu_2 = \nu_{m2}\cdots \end{array}\right\} \tag{3·2-7}$$

我们可取（E_1，ν_1）为实物材料性质的特征常数，（E_{m1}，ν_{m1}）为模型材料的特征常数。

5）实物中任意点的位移 $W^i(x, y, z)$，应力 σ_{ij}，应变 ε_{ij} 可以写为

$$\left.\begin{array}{l} W^i = f^i(\Sigma, W, l, E_1, \nu_1, x, y, z) \\ \sigma_{ij} = g_{ij}(\Sigma, W, l, E_1, \nu_1, x, y, z) \\ \varepsilon_{ij} = h_{ij}(\Sigma, W, l, E_1, \nu_1, x, y, z) \end{array}\right\} \tag{3·2-8}$$

我们可将 π 定理分别应用于以上各式。例如 σ_{ij} 可表示为

$$\frac{\sigma_{ij}}{E_1} = G_{ij}\left(\frac{\Sigma}{E_1}, \frac{W}{l}, \nu_1, \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}\right) \tag{3·2-9}$$

在线性范围内，Σ 和 W 的作用是可以叠加的，同时，σ_{ij} 与 Σ 和 W 的关系应是线性的。因此，物理上的考虑使我们能把式（3·2-9）进一步简化为

$$\sigma_{ij} = \Sigma p_{ij}\left(\nu_1, \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}\right) + E_1\frac{W}{l}q_{ij}\left(\nu_1, \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}\right) \tag{3·2-10}$$

在满足本节1）至4）各项相似条件的情况下，模型中的应力 σ_{mij} 为

$$\begin{aligned} \sigma_{mij} &= \Sigma_m p_{ij}\left(\nu_1, \frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m}\right) + E_{m1}\frac{W_m}{l_m}q_{ij}\left(\nu_1, \frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m}\right) \\ &= \frac{\Sigma}{\alpha_\Sigma}p_{ij}\left(\nu_1, \frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m}\right) + E_1\frac{W}{l} \times \frac{E_{m1}}{E_1}\ \frac{W_m}{W}\ \frac{l}{l_m}q_{ij}\left(\nu_1, \frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m}\right) \\ &= \frac{\Sigma}{\alpha_\Sigma}p_{ij}\left(\nu_1, \frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m}\right) + E_1\frac{W}{l} \times \frac{E_{m1}}{E_1}\ \frac{\alpha_l}{\alpha_w}q_{ij}\left(\nu_1, \frac{x_m}{l_m}, \frac{y_m}{l_m}, \frac{z_m}{l_m}\right) \end{aligned} \tag{3·2-11}$$

因此，若取

$$\alpha_W = \alpha_\Sigma \alpha_l \frac{E_{m1}}{E_1} \tag{3·2-12}$$

则模型中的应力与实物中的应力有下述关系：

$$\sigma_{mij} = \frac{1}{\alpha_\Sigma}\sigma_{ij} \tag{3·2-13}$$

作为一个特殊情况，如果模型所使用的材料与实物相同，即

$$\frac{E_{m1}}{E_1} = 1$$

并且 $\alpha_W = \alpha_l$ 和 $\alpha_\Sigma = 1$，即

$$\frac{W_m}{l_m} = \frac{W}{l} \qquad \Sigma_m = \Sigma$$

我们有

$$\sigma_{mij} = \sigma_{ij}$$

这就是说，在几何相似的条件下，相应点应力相等。同理，可以证明，在几何相似条件下，

$$\varepsilon_{mij} = \varepsilon_{ij}$$

$$W_m^i = \frac{l_m}{l}W^i = \frac{W^i}{\alpha_l}$$

2　有限弹性体的自振频率

我们知道有限弹性体在给定支撑条件下，是有特定的自振频率的。这时，材料的密度是重要因素，因为它反映了惯性力。因此我们取 ρ_1 为实物的特征密度。如支撑条件可以表示为某一个面上的位移等于零。于是自振频率 ω 可以表示为

$$\omega = f(l, \rho_1, E_1, \nu_1) \tag{3·2-14}$$

应用π定理，我们有

$$\frac{\omega l}{\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}}=f(\nu_1) \tag{3·2-15}$$

因此，模型与实物间频率的换算关系为（注意：若材料相同，即$\nu_1=\nu_{m1}$）

$$\frac{\omega_m l_m}{\sqrt{\frac{E_{m1}}{\rho_{m1}}}}=\frac{\omega l}{\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}} \tag{3·2-16}$$

由式（3·2-15）得到一个重要的结论：在几何相似条件下，弹性体的振动频率与特征尺寸成反比，振动周期与特征尺寸成正比。

3　强迫振动条件下的载荷模拟

在动力学问题中，自振周期是一个自然的时间尺度。因此，外载荷Σ^i可写为

$$\Sigma^i(x,y,z,t)=\Sigma f^i\left(\frac{x}{l},\frac{y}{l},\frac{z}{l},\frac{t}{l}\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}\right)$$

于是，分布载荷的模拟条件是

$$f_m^i\left(\frac{x_m}{l_m},\frac{y_m}{l_m},\frac{z_m}{l_m},\frac{t}{l_m}\sqrt{\frac{E_{m1}}{\rho_{m1}}}\right)$$

$$=f^i\left(\frac{x}{l},\frac{y}{l},\frac{z}{l},\frac{t}{l}\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}\right) \tag{3·2-17}$$

在动力学问题中，初始条件有时会引起新的无量纲参数。但是，在许多情况下，例如当结构有阻尼时，初始条件对振动的影响可以忽略不计。在这种情况下，我们有（参看式（3·2-10）和式（3·2-11））

$$\sigma_{mij}=\frac{\sigma_{ij}}{\alpha_\Sigma}=\frac{\Sigma}{\alpha_\Sigma}g_{ij}\left(\nu_1,\frac{x}{l},\frac{y}{l},\frac{z}{l},\frac{t}{l}\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}\right) \tag{3·2-18}$$

这里要说明，如果问题中还存在外加集中载荷以及表面上的规定位移，讨论和前一节类似，不影响这里所作的结论。

4　结构问题的模化

结构通常可以简化为梁、轴、板、壳或它们的组合体。做为具有某些特殊形状的弹性体，它们当然也必须遵循前几节所述的相似原则。但是，它们的特殊性往往可以带来进一步的简化。

我们以一个变截面直柱在轴向力P作用下的稳定问题为例，求失稳时的临界载荷。为此，先列出基本方程和边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&E\frac{d^2}{dx^2}\left(I\frac{d^2W}{dx^2}\right)+P\frac{d^2W}{dx^2}=0\\&W(0)=W(l)=0\end{aligned}\right\} \tag{3·2-19}$$

式中　$I(x)$——直柱截面对中性轴的截面矩

l——柱的长度

W——直柱失稳时垂直于直柱轴线的位移

x——沿直柱轴线的座标。$x=0$和$x=l$是直柱的两个端点

引入无量纲变数和参数：

$$W^*=\frac{W}{l}\qquad x^*=\frac{x}{l}\qquad I^*(x^*)=\frac{I(x^*)}{I_0}$$

$$I_0=I(0)\qquad P^*=\frac{Pl^2}{EI_0}$$

于是，式（3·2-19）变为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2}{dx^{*2}}\left(I^*(x^*)\frac{d^2W^*}{dx^{*2}}\right)+P^*\frac{d^2W^*}{dx^{*2}}=0\\&W^*(0)=W^*(1)=0\end{aligned}\right\} \tag{3·2-20}$$

在$I^*(x^*)$为已知的条件下，上述微分方程只有在参数P^*为特定数值时才有不恒等于零的解。因此临界载荷的计算公式为

$$\frac{Pl^2}{EI_0}=\text{随函数}I^*(x^*)\text{变化的特定数值} \tag{3·2-21}$$

为使模型与实物间的临界载荷能互相转换，我们只要求模型的$I^*(x^*)$与实物的$I^*(x^*)$完全相等，而不必要求满足几何相似等条件。

第 3 章　流体力学问题的模化[9][10]

1　流体力学的基本方程

流体力学的基本方程有：1）质量守恒方程，2）动量守恒方程，3）能量守恒方程，4）状态方程。我们在这里只考虑一种单相的、没有化学反应的介质。关于在化工方面的应用，可参看[11]。

在笛卡尔座标系中，质量守恒方程表示为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho w_i}{\partial x_i}=0 \qquad (3\cdot3\text{-}1)$$

动量守恒方程表示为

$$\frac{\partial w_i}{\partial t}+w_j\frac{\partial w_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+X_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad (3\cdot3\text{-}2)$$

能量守恒方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(h+\frac{1}{2}q^2+V\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}w_j) \qquad (3\cdot3\text{-}3)$$

式中　V 是体力 X_i 的势函数，即

$$X_i=-\frac{\partial V}{\partial x_i} \qquad (3\cdot3\text{-}4)$$

在以上诸式中 t 表示时间，$x_i(i=1, 2, 3)$ 是空间座标，ρ 是密度，w_i 是介质微元的质点速度，p 是压力，X_i 是单位质量的体积力，τ_{ij} 是粘性应力张量，h 是单位质量的焓，它是内能 u 与 p/ρ 之和，$\frac{1}{2}q^2=\frac{1}{2}w_iw_i$ 是单位质量的动能，q_i 是热流向量（热通量）。

应当说明上述公式中对下标 i（或 j）使用了一种简化约定。凡某一项中 i（或 j）只出现一次，就代表 i（或 j）可以是 1、2 或 3，凡某一项中 i（或 j）重复出现两次，则该项代表 i（或 j）轮番取 1、2 和 3 的三项和。例如式（3·3-2）实际上是三个公式，即

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}+w_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1}+w_2\frac{\partial w_1}{\partial x_2}+w_3\frac{\partial w_1}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}+X_1+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3}\right)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t}+w_1\frac{\partial w_2}{\partial x_1}+w_2\frac{\partial w_2}{\partial x_2}+w_3\frac{\partial w_2}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}+X_2+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3}\right)$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t}+w_1\frac{\partial w_3}{\partial x_1}+w_2\frac{\partial w_3}{\partial x_2}+w_3\frac{\partial w_3}{\partial x_3}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3}+X_3+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3}\right)$$

下面将继续使用这类约定。

状态方程共有两个，它们是

$$p=p(\rho, T) \qquad (3\cdot3\text{-}5)$$

$$u=u(\rho, T) \qquad (3\cdot3\text{-}6)$$

前者称为热状态方程，后者称为热量状态方程。

在许多情况下，热通量 q_i 和粘性应力张量 τ_{ij} 可以表示为

$$q_i=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i} \qquad (3\cdot3\text{-}7)$$

$$\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}+\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\frac{\partial w_k}{\partial x_k} \qquad (3\cdot3\text{-}8)$$

式中　λ——介质的导热系数

　　　μ——粘性系数

当 $i=j$，符号 $\delta_{ij}=1$；而当 $i\neq j$，$\delta_{ij}=0$。

在适当的初始条件和边界条件下，上述方程组有确定的解。通过一些具体的假设，由这个方程组可以导出不可压缩无粘性流体，不可压缩粘性流体，可压缩无粘性气体，可压缩粘性气体的基本方程（详见第 5 篇《流体力学》和第 6 篇《热工学》）。

2　相似准数

以重力作用下的物体定常绕流问题为例，可导出无量纲相似准数如下。

令 p_0、ρ_0，T_0、u_0 表示来流的未扰动状态，

以 w_0 表示来流的速度。我们令 l 代表物体的特征长度，并只考虑物体的实物和模型形状是几何相似的情况。由于我们所考虑的问题是定常的，因此，所有因变量对时间 t 的偏导数都等于零。

引入无量纲变数

$$\left.\begin{array}{lll} x_i^*=\dfrac{x_i}{l} & \rho^*=\dfrac{\rho}{\rho_0} & p^*=\dfrac{p}{p_0} \\ T^*=\dfrac{T}{T_0} & u^*=\dfrac{u}{u_0} & w_i^*=\dfrac{w_i}{w_0} \\ X_i^*=\dfrac{X_i}{g} & \tau_{ij}^*=\dfrac{\tau_{ij}}{\mu_0 w_0/l} & q_i^*=\dfrac{q_i}{\lambda_0 T_0/l} \end{array}\right\} \tag{3·3-9}$$

式中　g——重力加速度

μ_0、λ_0——未扰动气流的粘性系数和导热系数

于是状态方程可表示为无量纲量的形式：

$$p^*=p^*(\rho^*,\ T^*) \tag{3·3-10}$$

$$u^*=u^*(\rho^*,\ T^*) \tag{3·3-11}$$

μ 和 λ 也都是介质状态参量温度和密度的函数，因此又有

$$\mu^*=\frac{\mu}{\mu_0}=\mu^*(\rho^*,\ T^*) \tag{3·3-12}$$

$$\lambda^*=\frac{\lambda}{\lambda_0}=\lambda^*(\rho^*,\ T^*) \tag{3·3-13}$$

如果式（3·3-10）～（3·3-13）的右端所出现的无量纲函数形式对两种介质都相同，我们说这两种介质的输运性质相似，是互相模拟的。

根据式（3·3-10）～（3·3-13），我们有

$$q_i^*=-\lambda^*\frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} \tag{3·3-14}$$

$$\tau_{ij}^*=\mu^*\left(\frac{\partial w_i^*}{\partial x_j^*}+\frac{\partial w_j^*}{\partial x_i^*}\right)-\frac{2}{3}\mu^*\delta_{ij}\frac{\partial w_k^*}{\partial x_k^*} \tag{3·3-15}$$

质量方程、动量方程和能量方程可分别表示为

$$\frac{\partial \rho^* w_i^*}{\partial x_i^*}=0 \tag{3·3-16}$$

$$w_j^*\frac{\partial w_i^*}{\partial x_j^*}=-\frac{p_0}{\rho_0 w_0^2}\ \frac{1}{\rho^*}\ \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*}+\frac{gl}{w_0^2}X_i^* + \frac{\mu_0}{\rho_0 w_0 l}\ \frac{1}{\rho^*}\ \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j^*} \tag{3·3-17}$$

$$w_i^*\frac{\partial u^*}{\partial x_i^*}=-\left(\frac{\lambda_0}{c_{p0}\mu_0}\right)\left(\frac{\mu_0}{\rho_0 w_0 l}\right)\left(\frac{c_{p0}T_0}{u_0}\right)\frac{1}{\rho^*}\ \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i^*} -\left(\frac{p_0}{\rho_0 w_0^2}\right)\left(\frac{w_0^2}{u_0}\right)\frac{p^*}{\rho^*}\ \frac{\partial w_i^*}{\partial x_i^*} +\left(\frac{\mu_0}{\rho_0 w_0 l}\right)\left(\frac{w_0^2}{u_0}\right)\frac{\tau_{ij}^*}{\rho^*}\ \frac{\partial w_i^*}{\partial x_j^*} \tag{3·3-18}$$

式中　c_{p0}——来流的定压比热

在上述方程中，出现各种相似准数，我们将它们列入表 3·3-1 中。

表3·3-1　几种相似准数的物理意义

相似准数	名称与符号	物理意义
$\dfrac{w_0^2}{gl}$	弗劳德数 Fr	惯性力与重力之比
$\dfrac{\rho_0 w_0 l}{\mu_0}$	雷诺数 Re	惯性力与粘性力之比
$\dfrac{\mu_0 c_{p0}}{\lambda_0}$	普朗特数 Pr	粘性效应与热传导效应之比
$\dfrac{w_0}{\sqrt{\dfrac{p_0}{\rho_0}}}$, $\dfrac{w_0}{\sqrt{u_0}}$	相当于马赫数 M（马赫数的定义是来流的质点速度与声速之比）	惯性与可压缩性之比
$\dfrac{c_{p0}T_0}{u_0}$		焓与内能之比约等于$\dfrac{\text{定压比热}}{\text{定容比热}}$

如果我们把式（3·3-10）和式（3·3-11）进一步具体化。譬如讨论理想气体的情况，就可以更清楚地看出上表中最后两行的无量纲量的意义。对于理想气体，状态方程为

$$p=R\rho T \tag{3·3-19}$$

式中　R是一常数。理想气体的定压比热c_p和定容比热 c_v 只是温度的函数，它们满足

$$c_p=c_v+R \tag{3·3-20}$$

理想气体的绝热指数 κ 的定义是

$$\kappa=\frac{c_p}{c_v} \tag{3·3-21}$$

声速 a 的表达式是

$$a^2=\kappa\frac{p}{\rho}=\kappa RT \tag{3·3-22}$$

因此，理想气体的内能可写为

$$u=\int_0^T c_v \mathrm{d}T$$

$$\frac{u_0}{c_{p0}T_0}=\int_0^{T_0}\frac{c_p-R}{c_{p0}T_0}\mathrm{d}T$$

$$=\int_0^1\frac{c_p}{c_{p0}}\mathrm{d}T^*-\int_0^1\left(1-\frac{1}{\kappa_0}\right)\mathrm{d}T^*$$

$$=\int_0^1\frac{c_p}{c_{p0}}\mathrm{d}T^*-\left(1-\frac{1}{\kappa_0}\right)\quad(3\cdot3\text{-}23)$$

$$u^*=\left[\int_0^{T^*}\frac{c_p}{c_{p0}}\mathrm{d}T^*-\left(1-\frac{1}{\kappa_0}\right)T^*\right]\Big/\left[\int_0^1\frac{c_p}{c_{p0}}\mathrm{d}T^*-\left(1-\frac{1}{\kappa_0}\right)\right]\quad(3\cdot3\text{-}24)$$

在理想气体条件下，式（3·3-19）可以表示为下述无量纲形式

$$p^*=\rho^*T^*\quad(3\cdot3\text{-}25)$$

根据以上的结果，我们有

$$\frac{w_0}{\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}}=\sqrt{\kappa_0}\,M_0\quad(3\cdot3\text{-}26)$$

$$\frac{w_0^2}{u_0}=(\kappa_0-1)M_0^2\frac{c_{p0}T_0}{u_0}\quad(3\cdot3\text{-}27)$$

综上所述，两个定常绕流问题的相似条件要求马赫数 M_0、雷诺数 Re_0、弗劳德数 Fr_0、普朗特数 Pr_0 和绝热指数 κ_0 在两个问题中是相同的。另外还要求$\frac{c_p}{c_{p0}}$、λ_0^*、μ^*分别是 T^*的确定函数。

剩下来的相似参数，必需从边界条件中去找。物体上的边界条件一般有三类：

1）物体表面上的速度等于零

$$w_i=w_i(x_{iw})=0$$

也即

$$w_i^*=w_i^*(x_{iw}^*)=0\quad(3\cdot3\text{-}28)$$

式中，下标 w 表示物体表面的意思。因此，这个边界条件不引入新的无量纲参数。

2）物体表面上的热流量是给定的，也即

$$q_{iw}^*=\frac{q_{iw}l}{\lambda_0T_0}=q_{iw}^*(x_i^*)$$

在1）和2）这两个条件下，物体表面的温度分布是被确定的，即有

$$\frac{q_{iw}^*}{T_w^*-1}=\frac{q_{iw}l}{\lambda_0(T_w-T_0)}=f(x_i^*)\quad(3\cdot3\text{-}29)$$

我们称$\frac{q_{iw}^*}{T_w^*-1}$为努谢尔特数，以 N_u 表示之，它是解的一部分。

3）物体的表面温度 T_w^* 是给定的。这时 N_u 也是因变量。因而这种边界条件除 N_u 外没有别的新的相似准数。

上面讨论的是一般模拟原则，在许多具体问题中还可以大大简化，这在以后还要说明。

3　其他相似准数

这里补充其他几个常用相似准数。

1）在旋转机械的内流问题中，上述无量纲参数中的 w_0 可以理解为平均流速。若旋转机械的角速度为 ω，则在基本方程中需补充另一个无量纲参数$\frac{\omega l}{w_0}$。在旋转机械中，这个参数往往是和比转数联系着的，在气象和海流问题中，被称为罗斯贝数。

2）如果运动是非定常的，例如当绕流物体以频率 f 振动时，则需补充引入无量纲参数$\frac{fl}{w_0}$，这个参数称之为折合频率。

3）在自然对流问题中，不存在来流速度 w_0，因此不必引进 w_0 做为速度的尺度。这种情况下，对流的驱动力是温度造成的密度的变化，即

$$X_i=g\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)n_i=g\beta\Delta Tn_i$$

$$=g\beta\Delta T_w\frac{\Delta T}{\Delta T_w}n_i\quad(3\cdot3\text{-}30)$$

式中　β——定压体膨胀系数

$\Delta T=T-T_0$，$\Delta T_w=T_w-T_0$

n_i——单位向量（$n_in_i=1$）

注意在以上公式中，我们忽略了压力对密度的影响。

由式（3·3-29）可见，在自然对流问题中，用 ΔT 作为因变量，ΔT_w 作为温度标尺是更为合理的。根据以上考虑，式（3·3-17）右端的第二项变为

$$g\frac{l}{w_0^2}X_i^*=\frac{g\beta\Delta T_wl}{w_0^2}n_i\frac{\Delta T}{\Delta T_w}$$

如果把其中的无量纲系数$\frac{g\beta\Delta T_wl}{w_0^2}$与雷诺数的平方相乘，便得到

$$\left(\frac{w_0l\rho}{\mu}\right)^2\frac{g\beta\Delta T_wl}{w_0^2}=\frac{\rho^2gl^3\Delta T_w}{\mu^2}\quad(3\cdot3\text{-}31)$$

这个新的无量纲参数称之为葛拉晓夫数，并以 G_r 表示之。

4）在沸腾换热这样一类发生相变的多相流的

问题中，还应考虑相变潜热 H_0 和气泡的表面张力 σ_0 这两个因素，从而相应地引进两个相似准数雅各布数 Ja 和韦伯数 We。

雅各布数 Ja 表示相同体积的液相介质所携带的热量和蒸气介质的相变潜热之比，定义为

$$Ja=\frac{c_p\rho_l(T_w-T_b)}{H_0\rho_v}$$

式中　c_p、ρ_l——液相介质的定压比热和密度

T_w、T_b——热壁和气泡的温度

ρ_v——蒸气的密度

韦伯数 We 表示惯性力和表面张力之比，定义为

$$We=\frac{\rho_l v_b^2 D_b}{\sigma_0}$$

式中　v_b、D_b——气泡相对于热壁的速度和气泡的直径

人们还习惯用沸腾数 Bo 作为因变量以代替努谢尔特数，定义为

$$Bo=\frac{q}{H_0\rho_v v_b}$$

它表示热流量与相变热之比。

5）气蚀系数　在水力机械、水面或水下螺旋浆推进和水翼等问题中，气蚀是影响其性能的重要因素。根据伯努利定理，我们知道，流速愈大，流体的静压就愈小。当压力小至汽化压力时，液体中就出现气泡。若以 p_c 表示气化压力，这样就需要引入另一个无量纲参数，这个参数的形式取为

$$\sigma=\frac{p_0-p_c}{\frac{1}{2}\rho_0 w_0^2}\tag{3·3-32}$$

σ 称之为气蚀系数。

4　流体运动的分类

前面，我们从比较普遍的角度出发，给出了液体和气体的基本方程和初始及边界条件，并引入了许多相似准数和基本函数 $\left(如\frac{\mu}{\mu_0}=f\left(\frac{T}{T_0}\right)\right)$。我们实际上所需研究的问题通常是可以大为简化的。当然也有许多问题比这里讨论的情况更为复杂，例如多相流，有化学反应的流动，有热辐射的流动，电磁流体的运动等就是这样。这些问题可参看专门的书刊。

表 3·3-2 给出几种条件下的主要相似准数，表中不包括纯几何相似的准数。

表3·3-2　几种条件下的主要相似准数

条件	相似准数	备注
1）不可压缩流体 $(M_0=\infty)$	Fr	在重力波的问题中而且时间过程比较长才需考虑
	Re	反映粘性摩阻，当 Re 很小时为Stokes流动，其次为层流边界层，Re 大时为湍流边界层。
	$\frac{\omega l}{w_0}$	在旋转机械中才需考虑
	σ	在产生气蚀的情况下才需考虑
	$Eu(欧拉数)=\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho_0 w_0^2}$	常作为因变量
2）可压缩流体	除 Fr、Re、$\frac{\omega l}{w_0}$、σ、$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho_0 w_0^2}$ 外还有：	
	M_0	反映可压缩性效应 $M<0.3$　时可不考虑 $0.3<M<1$ 为亚声速流动 $M\approx 1$　为跨声速流动，局部出现击波 $M>1$　为超声速流动，出现击波 $M\gg 1$　为高超声速流动，边界层对击波波后流动有强烈干扰，这时除 M_0 与 Re 外，必须考虑 Pr 与 Nu
	Pr	有热传导效应时才需考虑
	Nu	常作为因变量
		另外，当 $M\gg 1$，还需考虑电离、烧蚀和化学反应等效应

（续）

条　件	相似准数	备　注
3）自然对流换热	除 Fr、Re、$\frac{\omega l}{w_0}$、σ、$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho_0 w_0^2}$ 外还有：	
	Gr	
	Pr	对于空气而言，$Pr\approx 1$
	Nu	常作为因变量
4）强迫对流换热	除 Fr、Re、$\frac{\omega l}{w_0}$、σ、$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho_0 w_0^2}$ 外还有：	
	Pr	
	Re	
	Nu	常作为因变量
	M	只有在 $M>0.3$ 时才需考虑
5）沸腾换热	除 Fr、Re、$\frac{\omega l}{w_0}$、σ、Eu 外还有：	
	Pr	
	Ja	
	We	
	Nu 或 Bo	常作为因变量

5　几个简单的典型例子

5·1　旋转水力机械的比转速

对于一定型号的水力机械来说，在给定流体密度 ρ、平均流速 w_0、特征尺寸 l、旋转角速度 ω、粘性系数 μ 和重力加速度 g 的条件下，扬水程 H 就被确定，因此有

$$H = f(\rho, w_0, l, \omega, \mu, g) \quad (3\cdot3\text{-}33)$$

根据量纲分析，我们有

$$\frac{H}{l} = f\left(\frac{\omega l}{w_0},\ \frac{\rho w_0 l}{\mu},\ \frac{g}{\omega^2 l}\right)$$

根据物理上的考虑，H 应反比于 g，故上式可简化为

$$\frac{gH}{\omega^2 l^2} = f\left(\frac{\omega l}{w_0},\ Re\right)$$

在工程问题中习惯用每分钟的转速 $n\left(=\frac{60\omega}{2\pi}\right)$ 和流量 $Q\ (\propto l^2 w_0)$ 作为物理参数。于是上述无量纲数可做如下置换：

$$\frac{gH}{\omega^2 l^2} \longrightarrow \frac{gH}{n^2 l^2}$$

$$\frac{\omega l}{w_0} \longrightarrow \frac{nl^3}{Q}$$

Re 定义为 $\frac{\rho Q}{l\mu}$

从第一和第二个无量纲数可以组成一个与水泵特征尺寸 l 无关的另一个无量纲数，通常写为

$$\left(\frac{Q^{1/3}}{n^{1/3} l}\ \frac{nl}{(gH)^{1/2}}\right)^{3/2} = \frac{nQ^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \quad (3\cdot3\text{-}34)$$

由于 g 是常数，工程上把 $\frac{nQ^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$ 记为 $n_s = \frac{nQ^{1/2}}{H^{3/4}}$，并称之为水泵的比转数。于是在几何相似条件下，水泵以无量纲形式表示的一切特性 π 都可表示为

$$\pi = f(n_s,\ Re) \quad (3\cdot3\text{-}35)$$

例如，水泵的效率 η 可表示为

$$\eta = \eta(n_s,\ Re) \quad (3\cdot3\text{-}36)$$

式（3·3-34）和式（3·3-35）的优点是，在大雷诺数情况下，π 或 η 对 Re 的依赖关系不强，因此 Re 往往可以忽略㊀。n_s 与水泵的大小无关，只取决于水

㊀ 这远不是一般性结论，因为在大雷诺数条件下，由于流动性质的突变（如出现分离），η 会有较大变化。

泵的形式和运转条件。工程上，往往取 $\eta=\eta_{max}$ 时的 n_s 值作为一种类型水泵的标志，它不大随 Re 变化，因而有

$$n_s=n_s(Re)\approx\text{常数} \qquad (3\cdot3\text{-}37)$$

同样，对于水轮机来说，令 P 表示功率（出力），我们有

$$\pi=\pi\left(\frac{nP^{1/2}}{\rho^{1/2}(gH)^{5/4}},\ Re\right)$$

由于水的密度 ρ 和 g 是常数，我们就以水轮机的比转数

$$n_s=\frac{nP^{1/2}}{H^{5/4}}$$

代替前一式中的 $nP^{1/2}/\rho^{1/2}(gH)^{5/4}$。于是在最高效率或最大出力条件下，我们有

$$n_s=n_s(Re)\approx\text{常数} \qquad (3\cdot3\text{-}38)$$

在有气蚀发生的条件下，式（3·3-38）应改写为

$$n_s=n_s(Re,\ \sigma)$$

正是由于在最高效率或最大出力条件下，对于一种确定形式的水轮机，n_s 有一定的值，因此常用 n_s 标志水轮机的型号。这时，n_s 已经不是原来意义上的无量纲准数了。例如轴流式水轮机在低水头时效率较高，混流式水轮机在较高水头时效率较高，冲击式水轮机在更高水头时效率最高。

5·2 船舶阻力的模拟

在船舶阻力模拟中，通常以船长 l 为特征长度。同一几何外形的船在不同的运载量下，其排水量 D 是不同的。为了研究不同排水量对阻力的影响，就需要引进一个新的几何参数 $\frac{l}{D^{1/3}}$，称为细长度。用 R 表示阻力，就有

$$R=\rho D^{2/3}w_0^2 f\left(\frac{l}{D^{1/3}},\ Fr,\ Re\right) \qquad (3\cdot3\text{-}39)$$

式中 w_0——船速。Fr 反比于 l，Re 正比于 l，因此在几何相似条件下是不能达到完全模拟的目的的。人们有时把 R 分解为两项〔5〕〔12〕，第一项只与粘性有关，第二项与重力有关，称为兴波阻力，也即

$$R=c_f(Re)\frac{\rho D^{2/3}w_0^2}{2}+c_w\left(\frac{l}{D^{1/3}},\ Fr\right)\rho gD \qquad (3\cdot3\text{-}40)$$

一般说，c_f 随 Re 的增加而减少。$c_f(Re)$ 的数值常利用一些半经验公式确定，有时就采用最简单的普朗特-史列西丁公式（平板摩阻公式）

$$c_f=\frac{0.455}{(\lg Re)^{2.58}} \qquad (3\cdot3\text{-}41)$$

另有一些经验公式用以计算 c_w。R 的数值当然也可以在拖引水槽中直接测定。

水力学问题和上面讲的船舶阻力问题一样，也不是能通过简单几何缩小完全模拟的，因而也需要进一步应用理论分析的手段，对 Re 和 Fr 的影响分别进行研究。

5·3 颤振问题—流体诱发的振动

水流或气流流过机翼或容器时，有时会诱发强烈的振动，其原因是流体与弹性体的运动互相耦合，在一定条件下后者从流体中不断摄取能量，以致振幅很大，弹性体的这类振动称之为颤振。在这类问题中，流体的可压缩性和粘性有时并不重要。下面我们以机翼为例，说明模拟这种颤振现象的原则。

我们令杨氏模数和惯性矩的乘积 EI 表示机翼的特征抗弯刚度，以剪切模数和惯性矩的乘积 GJ 表示它的特征抗扭刚度，l 表示翼展，c_h 表示特征弦长，m 表示机翼的特征单位长度的质量，J_m 表示单位长度的特征转动惯量，以 α 表示特征攻角，ρ_0 表示来流的密度。我们问，在这些条件下，来流的速度多大时，机翼将发生颤振？以 w_{cr} 表示这样的来流速度。显然，我们有

$$w_{cr}=f(EI,GJ,\ l,c_h,m,\ J_m,\rho_0,\ \alpha)$$

由于

$$[w_{cr}]=\frac{L}{T}\qquad [EI]=\frac{ML^3}{T^2}\qquad [GJ]=\frac{ML^3}{T^2}$$

$$[l]=L\qquad [c_h]=L\qquad [m]=\frac{M}{L}$$

$$[\rho_0]=\frac{M}{L^3}\qquad [\alpha]=M^0T^0L^0\qquad [J_m]=ML$$

w_{cr} 可表示为

$$\frac{w_{cr}}{\frac{1}{l}\sqrt{\frac{EI}{m}}}=f\left(\frac{EI}{GJ},\ \frac{c_h}{l},\ \frac{\rho_0c_h^2}{m},\ \frac{J_m}{mc_h^2},\ \alpha\right) \qquad (3\cdot3\text{-}42)$$

α 和 $\frac{c_h}{l}$ 具有明显的几何意义，$\frac{EI}{GJ}$ 反映抗弯刚度

与抗扭刚度之比，$\frac{\rho_0 c_h^2}{m'}$反映流体的所谓附加质量与机翼质量之比，$\frac{J_m}{mc_h^2}$反映机翼剖面上的质量分布。

5·4　轴承的润滑问题

关于轴承的润滑问题有两种提法。正问题是：给定两个润滑表面的几何形状和尺寸（包括表面上可能有的微型螺旋刻槽等），表面之间的间隙分布以及表面的运动速度（或相对速度），要求决定润滑介质的运动量（速度）和物理量（压力、密度、温度）的分布以及由它们所导出的具有实用意义的承载能力、摩擦力矩以及流量等。工程上更重要的是反问题，根据某些预先规定的关于载荷、摩擦力和力矩、流量、温度等参数方面的条件，要求选择合宜的润滑表面的几何形状以及表面之间的间隙分布。

分析表明，在润滑问题中，润滑介质的惯性力和粘性力之比值大体上可以用相对间隙（即间隙和轴承特征尺寸之比）和雷诺数的乘积来代表。在大多数情况下，这个乘积值大概在0.01～0.001之间，就是说惯性力比起粘性力来说往往小2～3个量级，因而可以忽略介质的惯性，也即密度不起主要作用，只要考虑粘性力和压力之间的平衡。

不管是正问题还是反问题，或者两者的混合，诸物理量之间的函数联系总是相同的。决定问题的主要物理量有：环境压力 p_0、润滑表面相对运动的特征速度 w_0（或相对角速度 ω）、介质的粘性系数 μ、轴承的特征尺寸 l、载荷 W、平均间隙 h 和间隙的倾角或偏心 α 等。以上七个量中，具有三个独立的量纲，因此可以组成四个相似准数，并形成下列函数联系：

$$f\left(\frac{\mu w_0}{p_0 l},\ \frac{W}{p_0 l^2},\ \frac{h}{l},\ \alpha\right)=0$$

或

$$f\left(\frac{\mu\omega}{p_0},\ \frac{W}{p_0 l^2},\ \frac{h}{l},\ \alpha\right)=0$$

可以看出，在本问题中，$\frac{\mu w_0}{p_0 l}$这个量起着重要的作用。一般在气体轴承问题中，习惯使用它和$\left(\frac{h}{l}\right)^2$之商来代替它，被称为轴承数或哈里森（Harrison）数，用 Λ 表示之：

$$\Lambda=\frac{\mu w_0 l}{p_0 h^2}$$

它表示粘性力与压力之比。

对介质内的压力、粘性应力和粘性应力矩的分布进行积分，可得到轴承所承受的载荷 W、摩阻 F 及摩擦力矩 M 等，于是存在下面的关系式：

$$\frac{W}{p_0 l^2}=f_1\left(\Lambda,\ \frac{h}{l},\ \alpha\right)$$

$$\frac{F}{\mu w_0 l}=f_2\left(\Lambda,\ \frac{h}{l},\ \alpha\right)$$

$$\frac{M}{\mu w_0 l^2}=f_3\left(\Lambda,\ \frac{h}{l},\ \alpha\right)$$

如果把摩阻 F 与载荷 W 之比称为摩擦系数 f，则有

$$f=\frac{F}{W}=f_4\left(\Lambda,\ \frac{h}{l},\ \alpha\right)$$

在模化实验中，如果保持 μw_0 不变以及几何形状（包括润滑表面上的微型螺旋槽等）相似，而模型和实物的几何尺寸相差 n 倍，各个量应该具有下表中列出的放大关系：

实物	l	h	W	p_0
模型	nl	nh	nW	$\frac{p_0}{n}$

最后应该说明：

1）有时，润滑表面的相对速度很大，或者间隙很大，以致$\frac{h}{l}\times Re$这个值接近于0.1，惯性力与粘性力相比已不能忽略，就必须把雷诺数考虑进去。

2）在气体轴承的问题中，一般可以认为是等温过程，但是在转速很大的情况，过程不是等温的，必须考虑热传导，因此在函数关系中还要列入绝热指数 κ 和标志热传导的一些相似准数。

5·5　亚声速和超声速的薄机翼绕流问题

前面介绍的相似模拟都是以几何相似为前提的。这里再介绍在特定条件下不需要遵循几何相似条件下的模化方法，限于篇幅，仅举薄翼绕流问题为例。

以 l 表示弦长，ε 表示翼剖面厚度的特征尺寸。在平面等熵流动的情况下，如$\frac{\varepsilon}{l}\ll 1$，基本方程可以线性化为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{1}{1-M_0^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \qquad (3\text{·}3\text{-}43)$$

其中，ϕ 是扰动势函数，M_0 是来流马赫数。为简化起见，我们假设翼剖面的形状是对称的，而且攻角等于零。我们用 $y=\varepsilon h(x)$ 表示翼剖面。在线性

化条件下，在翼面上有下述边界条件：

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{y\to0^+}&=w_0\varepsilon\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\\ \left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{y\to0^-}&=-w_0\varepsilon\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\end{aligned}\right\}(0\leqslant x\leqslant l)\quad(3\cdot3\text{-}44)$$

翼面上的压力系数 C_p 为

$$C_p\equiv\frac{p-p_0}{\frac{1}{2}\rho_0w_0^2}=-\frac{2}{w_0}\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{y=0}\quad(3\cdot3\text{-}45)$$

下面我们讨论亚声速，即 $M_0<1$ 的情况，引入无量纲变数和参数

$$\left.\begin{aligned}\phi^*&=\frac{\phi}{Bw_0l}\qquad x^*=\frac{x}{l}\\ y^*&=\frac{y\sqrt{1-M_0^2}}{l}\end{aligned}\right\}\quad(3\cdot3\text{-}46)$$

B 是可以根据需要加以调整的无量纲常数。于是基本方程和边界条件可以写为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\phi^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2\phi^*}{\partial y^{*2}}=0\\ &\left.\frac{\partial\phi^*}{\partial y^*}\right|_{y^*\to0^\pm}=\pm\frac{\varepsilon}{l}\frac{1}{\sqrt{1-M_0^2}}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x^*}\quad(0\leqslant x^*\leqslant1)\\ &\frac{\partial\phi^*}{\partial x^*}、\frac{\partial\phi^*}{\partial y^*}\to0\quad(\text{当}x^*、y^*\to\infty)\end{aligned}\right\}\quad(3\cdot3\text{-}47)$$

同时

$$C_p=-2B\left.\frac{\partial\phi^*}{\partial x^*}\right|_{y\to0}\quad(0\leqslant x^*\leqslant1)\quad(3\cdot3\text{-}48)$$

C_p 表示压力分布，是工程上感兴趣的量。若取 $B=1$，从式（3·3-48）可见，C_p 就只与 $\left.\frac{\partial\phi^*}{\partial x^*}\right|_{y\to0}$ 有关。从式（3·3-47）看出，如果在两个问题中取

$$\frac{\varepsilon_1}{l_1}\frac{1}{\sqrt{1-M_{01}^2}}=\frac{\varepsilon_2}{l_2}\frac{1}{\sqrt{1-M_{02}^2}}\quad(3\cdot3\text{-}49)$$

则 $\phi_1^*(x^*,\ y^*)=\phi_2^*(x^*,\ y^*)$。由式（3·3-49）可见，为了使两个问题中的无量纲因变量相同，机翼的厚度不能几何相似，它们间的换算关系见式（3·3-49）。特殊地说，M_{02} 可以取为零。这样，适当地改变 $\frac{\varepsilon_1}{l_1}$ 与 $\frac{\varepsilon_2}{l_2}$ 之间的比例关系，可以用不可压缩流体来模拟可压缩流体。

在超声速、跨声速条件下，也有类似的模拟关系。它们的共同特点是翼厚不保持几何相似。

第4章 固体中的热传导与弹性体的热应力的模化[13][14]

必须强调指出：在绝大多数情况下，由于时间尺度不同，变形小，热传导和热应力这两个问题是可以分别处理的。人们可先确定瞬态或定态温度分布，然后根据弹性静力学计算热应力。

1 固体中的热传导

固体中的热传导方程是

$$\rho_sc_s\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_s\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right)\quad(3\cdot4\text{-}1)$$

式中 θ——温升，一般指相对于环境的温度

$\rho_s(x_i)$、$c_s(x_i,\ \theta)$ 和 $\lambda_s(x_i,\ \theta)$——固体的密度、比热和导热系数

边界条件通常有两类：

$$\theta=\theta_w(x_{iw},\ t)\quad(3\cdot4\text{-}2)$$

以及

$$\lambda_s\frac{\partial\theta}{\partial n}=-h\theta\quad(3\cdot4\text{-}3)$$

边界条件式（3·4-2）是指给定边界温度 θ_s，边界条件式（3·4-3）是指给定边界上的热流平衡条件，h 是所谓薄膜换热系数，在固体热传导问题中 h 常认为是给定的，或者可通过外界介质的对流换热进行计算（详见第6篇《热工学》）。n 是边界的单位法线，其量纲是长度。初始条件常取为

$$t=0\quad\theta=0\quad(3\cdot4\text{-}4)$$

如果是其他初始条件，则可能引入新的相似准数。

令 l 为物体的特征长度，t_0 为边界温度随时间变化的特征时间，$\overline{\theta}_w$ 为边界温度的特征量，$\overline{\lambda}_s$ 为特征导热系数，$\overline{h}$ 为特征薄膜换热系数，$\overline{\rho}_s$ 为特征密度，$\overline{c}_s$ 为特征比热。