中国精算师资格考试用书

利息理论

LIXI LILUN

刘占国 主编

JS

南开大学出版社

利 息 理 论

主　编　　刘占国
副主编　　李勇权
编著者　　刘占国　李勇权　杨再贵
主　审　　傅安平　尚汉冀

南 开 大 学 出 版 社
中国·天津

图书在版编目(CIP)数据

利息理论/刘占国主编. —天津:南开大学出版社,2000.9
ISBN 7-310-01416-2

Ⅰ.利... Ⅱ.刘... Ⅲ.①利息-经济理论-高等学校-教材 Ⅳ.F032.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第23577号

出版发行	南开大学出版社 地址:天津市南开区卫津路94号 邮编:300071　电话:(022)23508542
出版人	张世甲
承　印	天津南开大学印刷厂印刷
经　销	全国各地新华书店
版　次	2000年9月第1版
印　次	2000年9月第1次印刷
开　本	880mm×1230mm　1/32
印　张	11.125
插　页	4
字　数	318千字
印　数	1—5000
定　价	21.00元

感　谢

瑞士再保险公司（Swiss Re Life & Health）

资　助

总 序

概括而言，精算是利用数理模型来估计和分析未来的不确定事件(风险)产生的影响，特别是对于财务的影响。随着保险作为一个特殊的金融行业的诞生并日益发展，以保险为基础而产生的精算科学也不断发展。在西方发达国家，精算不仅早已形成完整的体系，而且在社会保险、金融、投资、证券等领域广泛应用，成为风险管理的重要组成部分。从事精算工作的精算师是一种职业化很强的从业人群，世界上许多国家不仅建立了精算职业团体，还建立了精算师资格考试体系，在保险法规中给予了明确规定。《中华人民共和国保险法》第一百一十九条规定："经营人身保险业务的保险公司，必须聘用经金融监督管理部门认可的精算专业人员建立精算报告制度。"

自 1988 年中国精算教育开始以来，我国的精算教育和精算职业已得到很大的发展，但距离精算的职业化还存在一定的差距。为了促进中国精算职业的发展，中国保险监督管理委员会于 1999 年 10 月 9 日组织了中国首次精算师资格考试，有 43 人通过考试获得了中国精算师资格。为了加速中国精算职业的发展，我国正在建立一套符合中国实际的中国精算师资格考试体系作为认定中国精算师资格的依据。《中国精算师资格考试用书》是我国出版的第一套最具权威性的精算书籍，一是为参加中国精算师资格考试的人员提供用书，同时为有志于精算事业的读者提供完整、科学的精算知识和精算实务指南。我们诚挚地希望通过本套书的出版，能够使更多的人对精算事业注入更大的热情，为中国精算事业的发展作出贡献。

本次出版的《利息理论》、《寿险精算数学》、《风险理论与非寿险精算》、《生命表的构造理论》和《寿险精算实务》是精算师资格考试的考试用书。在此出版之际，特向给予我们资助和帮助的荷兰全球

人寿保险国际公司、瑞士再保险公司、英国保诚集团和李雄德、钟杰鸿、何嘉丽、张春蕊、郑景文、张振堂等专家表示衷心的感谢。

中国精算师资格考试用书
编审委员会
2000年4月

目录

第一章 利息的基本概念

所谓利息，指的是在一定时期内，资金拥有人将使用资金的自由权转让给借款人后所得到的报酬。

理论上，资金和利息不必均为货币。例如，甲今日将 100 石麦子借给乙使用，一年后，乙归还 105 石麦子，多出的 5 石麦子即为利息。另外，资金和利息也不必具有相同的形式。如，农夫 A 可以将收割机借给农夫 B 以帮助他收割小麦，回收一定百分比的收割到的小麦。在这里，收割机为资金，而收割到的一定百分比的小麦则为利息。

在某种意义上，利息事实上也可看作是租金的一种形式，即借方向贷方支付的由于资金转让而在一段时间内不能使用该笔资金所引起的损失。上述两例均可这样理解。

尽管资金和利息均不必为货币，然而，在几乎所有的实际应用中，资金和利息都是用货币来表示的，本书的例题也不例外。

§1.1 利息度量

一般说来，任何一项普通的金融业务都可看作是投资一定数量的资金以产生一定量的利息。因此，利息的多少是衡量该项业务“好”“坏”的一个重要指标。这样，利息的度量就显得尤为重要了。

在给出利息的几个基本度量方式前，先引入几个基本概念。

我们把每项业务开始时投资的金额称为本金，而把业务开始一定时间后回收的总金额称为该时刻的积累值（或终值）。显然，积累

值与本金的差额就是这一时期的利息金额。

我们假定，一旦给定了本金金额，则在任何时刻的积累值均可确定，并假定在投资期间不再加入或抽回本金。也就是说，该投资在数额上的任何变化全部是由于利息的影响而造成的。当然，以后将放松这一假设而允许在投资期间加入或抽回本金。

很显然，在上述假设下，决定积累值的两个最主要的因素就是本金金额和从投资日算起的时间长度。理论上，时间长度可以用许多不同的单位来度量。例如，日、周、月、季、半年、一年等。用来度量时间的单位称为“度量期”或“期”，最常用的期是年。以后各章除非另外声明，均可认为一个度量期为一年。

如果考虑投资一单位的本金，我们定义该投资在时刻 t 的积累值为积累函数 $a(t)$，那么，$a(0)=1$，并且 $a(t)$ 通常为单增函数。因为 t 增加时函数值减小意味着利息为负，这在实务中很少见。然而，也确实可能出现此种情况，一笔亏本的生意就意味着产生了负的利息。函数值为常数意味着利息为零，这种现象偶尔也会发生。

积累函数 $a(t)$ 有时也称作 t 期积累因子，因为它是单位本金在 t 期末的积累值。

通常，$a(t)$ 为连续函数，但有时 $a(t)$ 也可能是间断的。例如，利息只有到付息日时才产生的情形就是如此。一般情况下，本金金额不是一个单位，而是 k 个单位，这时我们定义一个总量函数 $A(t)$，它是本金为 k 的投资在时刻 $t\geq 0$ 时的积累值。

显然，$A(t)$ 与 $a(t)$ 仅相差一个倍数 k，即

$$A(t)=k\cdot a(t)。\tag{1.1.1}$$

于是，$A(t)$ 与 $a(t)$ 具有完全类似的性质，$a(t)$ 可看作是 $k=1$ 时的总量函数。在许多情况下，积累函数与总量函数可以互相替换使用。

积累函数 $a(t)$ 的倒数 $a^{-1}(t)$ 为 t 期折现因子或折现函数。特别地，把一期折现因子 $a^{-1}(1)$ 简称为折现因子，并记为 v。第 t 期折现

因子 $a^{-1}(t)$ 是为了使在 t 期末的积累值为 1，而在开始时投资的本金金额。事实上，将 $k=a^{-1}(t)$ 代入（1.1.1）式，就有 $A(t)=k\cdot a(t)=a^{-1}(t)\cdot a(t)=1$。

我们把为了在 t 期末得到某个积累值，而在开始时投资的本金金额称为该积累值的现值（或折现值）。显然，$a^{-1}(t)$ 是在 t 期末支付 1 的现值，在 t 期末支付 k 的现值为 $k\cdot a^{-1}(t)$。

在某种意义上，积累与折现是相反的过程，$a(t)$ 为 1 单位本金在 t 期末的积累值，而 $a^{-1}(t)$ 是在 t 期末支付 1 单位终值的现值。

这里所说的“积累值”严格地讲只与过去的付款有关；“现值”只与将来的付款有关；而对于既可以与过去的付款有关，又可以与将来的付款有关的值，将使用“当前值”这个词。

把从投资日起第 n 个时期所得到的利息金额记为 I_n，则

$$I_n=A(n)-A(n-1) \qquad \text{对整数 } n\geqslant 1 \tag{1.1.2}$$

注意，I_n 表示的是一个时间区间上所得利息的量，而 $A(n)$则是在一特定时刻的积累量。

1.1.1 实际利率

某一度量期的实际利率是指该度量期内得到的利息金额与此度量期开始时投资的本金金额之比。通常，实际利率用字母 i 表示。

实际利率 i 是利息的第一种度量方式，由定义可以看出，实际利率是一个不带单位的数，实务中常用百分数来表示；它与给定的时期有关；它其实是单位本金在给定的时期上产生的利息金额。从积累函数来看：

$$a(1)=a(0)+i=1+i \tag{1.1.3}$$

$$i=1+i-1=a(1)-a(0)$$

$$=\frac{a(1)-a(0)}{a(0)}=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}$$

$$=\frac{I_1}{A(0)} \tag{1.1.4a}$$

对于有多个度量期的情形可以分别定义各个度量期的实际利率。这时，用 i_n 记从投资日算起第 n 个度量期的实际利率，则：

$$i_n=\frac{A(n)-A(n-1)}{A(n-1)}=\frac{I_n}{A(n-1)} \qquad n\geqslant 1 \text{ 为整数} \tag{1.1.4b}$$

显然，(1.1.3)式和(1.1.4a)式中的 i 记为 i_1 更合适。

例 1.1.1　某人到银行存入 1 000 元，第一年末他存折上的余额为 1 050 元，第二年末他存折上的余额为 1 100 元，问：第一年、第二年的实际利率分别是多少?

解：显然，$A(0)=1\ 000$

$A(1)=1\ 050$

$A(2)=1\ 100$

因此，$I_1=A(1)-A(0)=50$（元）

$I_2=A(2)-A(1)=50$（元）

$$i_1=\frac{I_1}{A(0)}=\frac{50}{1000}=5\%$$

$$i_2=\frac{I_2}{A(1)}=\frac{50}{1050}=4.762\%$$

故，第一年的实际利率为 5%，第二年的实际利率为 4.762%。

例 1.1.2　某人投资 1 000 元于证券上，该证券年实际利率为 10%，问：一年后，此人将得到的金额为多少？其中利息为多少？

解：$A(1)=A(0)(1+i)=1000(1+0.1)=1\ 100$（元）

$I_1=A(1)-A(0)=100$（元）

故，一年后，此人将得到 1 100 元，其中 100 元为利息。

1.1.2 单利和复利

前面讨论的实际利率 i 是针对某一个度量期而言的，若投资期为多个或非整数个度量期，如何来进行利息的度量呢？

实务中有两种最重要的度量方式：单利和复利。

考虑投资一单位本金：

(1) 如果其在 t 时的积累值为：

$$a(t)=1+i\cdot t \tag{1.1.5}$$

那么，我们就说该笔投资以每期单利 i 计息，并将这样产生的利息称为单利。

(2) 如果其在 t 时的积累值为：

$$a(t)=(1+i)^t \tag{1.1.6}$$

那么，我们就说该笔投资以每期复利 i 计息，并将这样产生的利息称为复利。

由上述定义可以发现：

（1）若以每期单利 i 计息，那么，在投资期间，每一度量期产生的利息均为常数 i 。不过，这并不意味着其实际利率为 i 。事实上，按上节定义，对于整数 $n\geqslant 1$，第 n 期的实际利率为：

$$\begin{aligned}
i_n&=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)}\\
&=\frac{(1+in)-[1+i(n-1)]}{1+i(n-1)}\\
&=\frac{i}{1+i(n-1)}
\end{aligned}$$

显然，i_n 关于 n 单调递减。也就是说，常数的单利意味着递减的实际利率。

（2）若以每期复利 i 计息，那么，在投资期间，不同时期将产生不同量的利息。事实上

$$\begin{aligned}
I_n&=a(n)-a(n-1)\\
&=(1+i)^n-(1+i)^{n-1}\\
&=i\cdot(1+i)^{n-1}\\
&=i\cdot a(n-1)
\end{aligned}$$

这里讨论的是单位本金，所以用的是$a(n)$而不是$A(n)$，显然，I_n关于n单调递增。而对于每期的实际利率，有：

$$i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{I_n}{a(n-1)} = i\text{。}$$

上式表明，常数的复利意味着常数的实际利率，而且二者是相等的。这样，虽然定义不同，但复利利率与实际利率是一致的。

比较单利和复利可以发现，单利具有这样的性质：利息并不作为投资资金而再赚取利息；而对复利来讲，在任何时候，本金和到该时为止得到的利息，总是都用来投资以赚取更多的利息，也就是民间所说的“利滚利”。

由积累函数看，相同数值的单利和复利相对于不同的时期会有不同的关系：对于单个度量期，它们产生的结果是相同的；对于较长时期，由于 $t \geqslant 1$ 时有$(1+i)^t \geqslant 1+it$, 所以复利比单利产生更大的积累值；而对于较短时期则相反，因为 $t \leqslant 1$ 时，$(1+i)^t \leqslant 1+it$。证明留作练习。

单利和复利的另一个差别是它们的增长形式不同。就单利而言，它在同样长时期增长的绝对金额为常数；而对复利来说，它增长的相对比率保持为常数。用符号来说明，就是：

对单利，有

$$a(t+s) - a(t) = s \cdot i$$

即，t时至$t+s$时赚得的利息与时间长度s成正比，而不依赖于t。

对复利，则有

$$\frac{a(t+s) - a(t)}{a(t)} = (1+i)^s - 1 \quad , \quad \text{与} t \text{无关。}$$

实务中，期限达到或超过一个度量期的长期金融业务几乎全部使用复利，较短期的业务也常用复利；单利只是偶尔在短期业务中使用。单利有时也用作复利在非整数时期内的近似。除非特别声明，我们均用复利而不是单利。

例 1.1.3　某银行以单利计息，年息为 6%，某人存入 5 000 元，

问 5 年后的积累值是多少？

解：$A(5)=5\ 000\times a(5)=5\ 000(1+5\times 6\%)=5\ 000\times 1.3=6\ 500$(元)

故，5 年后的积累值为 6 500 元。

例 1.1.4　如果上述银行以复利计息，其他条件不变，重解上例。

解：$A(5)=5\ 000\times a(5)=5\ 000(1+6\%)^5=6691.13$(元)

故，5 年后的积累值为 6691.13 元。

例 1.1.5　已知年实际利率为 8%，求 4 年后支付 10 000 元的现值。

解：由于 $i=8\%$，故 $a(4)=(1+8\%)^4$

现值为

$$PV=10\,000\cdot a^{-1}(4)=10\,000/(1+8\%)^4=7350.3\ (\text{元})$$

故，4 年后支付 10 000 元的现值为 7350.3 元。

1.1.3 实际贴现率

一个度量期的实际贴现率为该度量期内取得的利息金额与期末的投资可回收金额之比。通常用字母 d 来表示实际贴现率。

可以看出，实际贴现率 d 与实际利率 i 的定义十分类似。事实上，它们都是一个比例数，而且都是“利息”除以“投资金额”，只不过实际利率 i 对应的“投资金额”是在期初实际付出的资金金额，即“本金”；而实际贴现率 d 对应的“投资金额”是在期末投资者可收回的资金金额。

类似(1.1.3)和(1.1.4a)有：

$$v=a^{-1}(1)=1-d \tag{1.1.7}$$

$$d=1-(1-d)=1-a^{-1}(1)$$

$$=\frac{a(1)-1}{a(1)}=\frac{a(1)-a(0)}{a(1)}$$

$$=\frac{A(1)-A(0)}{A(1)}=\frac{I_1}{A(1)} \tag{1.1.8a}$$

为了帮助理解，我们来看一个例子。假设张三到一家银行以年实际利率 6%向银行借 100 元，为期一年。银行将付给张三 100 元。一年后，张三将还给银行贷款本金 100 元，外加 6 元的利息，共计 106 元。

假如不是以年实际利率 6% 而是以年实际贴现率 6% 向银行借 100 元，为期一年，则银行将预收 6%（即 6 元）的利息，仅付给张三 94 元。一年后，张三将还给银行 100 元。

由以上例子可以看出，实际利率其实是对期末支付的利息的度量，而实际贴现率则是对期初支付的利息的度量。

值得注意的是，在贴现率中使用的“支付”一词并非通常意义下的支付，因为借款者并没有直接按利率来“付”利息，而是预先按利率“扣除”利息。其实这在总结果上与首先借到全部金额、然后借款者立即支付利息并没有什么不同。

在实际贴现率的定义中的“利息金额”有时也被称作“贴现金额”。我们说，在包含贴现率的场合，这两个词是通用的。但是，我们应该注意到它们的区别：由（1.1.8a）式我们有 $I_1=A(1)\cdot d$，即贴现金额＝期末可收回资金金额×贴现率；而由（1.1.4a）式有 $I_1=A(0)\cdot i$，即利息金额＝期初投资金额×利率。

类似于实际利率，也可以定义任意度量期的实际贴现率，令 d_n 为从投资日算起第 n 个时期的实际贴现率，根据定义有：

$$d_n=\frac{A(n)-A(n-1)}{A(n)}=\frac{I_n}{A(n)} \qquad \text{对整数 } n\geqslant 1 \tag{1.1.8b}$$

这里，I_n 可称为“贴现金额”或“利息金额”。一般来说，像 i_n 一样，d_n 也可能随不同的时期而变化。然而，若在复利假设下，如果实际利率是常数，那么，实际贴现率也是常数。

若每期实际利率为 i，那么，对任意正整数 n，有：