[美] Herbert Reismann
Peter S.Aawlik

工程弹性理论与应用

国防科技大学出版社

内 容 简 介

本书运用张量符号系统对经典的弹性理论作了系统的介绍，不仅使理论阐述更富于条理性，而且大大地扩展了知识面。各章之后均附有大量习题，从而为自学者加深对正文的理解提供了极大的方便。因此可以说本书是工程技术人员和工科有关专业学生开拓新知识的工具。

工程弹性理论和应用

*

〔美〕 Herbert Reismann
Peter S. Pawlik 著

*

韩祖南 刘庆国 张家森 译
王兴业 校
责任编辑 周 禾 戴东宇

*

湖南省新华书店经销
国防科技大学出版社出版发行
国防科技大学印刷厂印装

*

开本：787×1092 1/32 印张：15.625 字数：364千字
1990年12月第1版第一次印刷 印数：1—700册
ISBN 7-81024-117-6

TB·3 定价：5.00元

译 者 的 话

本书译自 Herbert Reismann、Peter S.Pawlik 所著“工程弹性理论和应用”一书，本书可以归属于专业基础教科书，它不同于象数学类图书那样偏重于理论，也不同于如微机说明书那样着重于运用；本书虽然阐述的内容在许多方面是经典的，但以新的符号系统描述以后，不仅使理论的阐述更具条理性、系统性，而且大大扩大了知识面。本书在某种意义上说，是工程技术人员和工科有关专业学生开拓新知识的工具。

该书作者有丰富的经验，在选材和编排方面都有自己的特点，本书各章之后均有大量的习题，这对学习该教科书的学生加深理解正文内容无疑很有好处，同时也为有志自学成才者提供了极大的方便。全书各章，由浅入深，循序渐进，是一本较好的教材和参考书。

全书共九章，其中第一、四、六章由刘庆国翻译；第二、三、五章由张家春翻译；第七、八、九章由韩祖南翻译，全书由韩祖南审阅、修改。誊清后，由王兴业教授校订。在该书的译校及誊写过程中，曾得到白书欣等同志的帮助，在此一并致以谢意。

由于我们的水平所限，译文中不当之处在所难免，敬希广大读者批评指正。

译者　1989年9月9日

前　言

这是一本打算供刚入学的研究生，或特殊情况下供那些高年级本科生使用的教科书。书的内容适用于许多不同的工科课程，比如，建筑工程、机械工程、航天工程及其他工程科学。我们相信，物理学和数学领域里的学生研读本书也会获益非浅，特别是那些希望扩大知识面的地质学或应用数学专业的学生。研究地质的学生利用本书可以磨利他们的分析武器，以便加深对物质世界的定量理解。而研究数学的学生将会很熟练地把纯数学应用于实践。

对弹性理论作详尽地论述则需要分成若干卷专著来撰写。而且可能要付出毕生精力去研究。由于我们只期望写一本篇幅和涉及范畴均有限的导论性的教科书，因此需要细心地选择有关内容。我们基于这样的原则来选择，即能够满足大多数从事工程课程学习的学生现在以及可预料的将来的需要。基本内容的分析是三维的。所以我们涉及的内容包括应力、应变、虎克定律以及一些连续介质力学中必有的内容。我们希望这些内容能具有永久性地价值，我们认为，通过对第一章到第四章内容的仔细研究将为那些想进一步学习动力学、波的传播、塑性理论、结构理论、粘性流体的流动等等内容的学生打下牢固的基础，我们还涉及到了一些（三维的）失效理论方面的内容，因为我们考虑到某些读者在他们的实践生涯中也会遇到弹性极限以及与之相关的安全设计问题。在第一章到第四章安排了基础内容后，于第五章我们讨论了一些有专门意义的三维或二维边值问

题的精确解，现在称这些求解的方法为经典的和基本的。但它们都清楚地表明涉及到了那些内容，我们有意略去了求解弹性理论边界问题的一些比较成熟的方法，例如Love的应变函数法、Galerkin矢量法、复变函数法、积分变换法等等。这里的省略丝毫没有对这些方法不赞誉、不佩服的意思！而是因为在大多数传统的弹性理论文献中都广泛地包含了这些方法，其中一些论著也列在本书的参考文献中。在学生掌握了第一章到第五章的内容后，应该鼓励他们去领略这些专题研究中的某些内容。

在第六章，我们阐述了结构力学方面引论性的内容，把其视为经典的三维弹性理论的一部分。工科的学生在他们学习诸如固体力学、材料强度、结构分析以及机械设计等等内容时经常会接触到杆、梁、板等等方面的（近似）理论，在这些领域，人们习惯于运用某些特殊的假设而导出近似理论。在第六章（以及其他一些地方）我们示范了如何由一般的三维理论通过系统的推导而得出这些众所周知的数学模型，此外，这些推导的思路还给读者为他将来可能要推导其他尚不为人知的特殊理论指出了一种途径。

在第七章中，我们给出了弹性理论中能量（或变分）方法的初步介绍。读者将会看到变分原理在许多方面是有用的：(1) 利用它们可以推导出平衡方程式以及与其相应的相容边界条件；(2) 在弹性理论中，它们也是大量的以解析法或直接数值法求出问题近似解过程的基本出发点。近似的解析法以及直接数值法和它们对弹性问题的运用将在第八章中介绍。在第八章中还介绍了最新的并且现在广泛应用的有限元素法。借助于现在已有的数字计算机，该方法优于其他的方法，对于那些直到不久前还认为很复杂的问题。有限元法给了人们开拓这类问

题的数值求解的新动力。最后，在第九章中，我们介绍了具初始应力的固体的理论，它直接正确地导出了弹性失稳理论中核心（线性）问题的有关公式。细读大多数现代的弹性理论教科书，人们会发现它们都回避了弹性失稳（或弹性稳定）方面的内容。而且查阅一下大多数关于稳定理论的专著，人们还发现，基本公式的导出通常是凭直觉或根据某个特殊方法，我们则不然，所有涉及应力作用下弹性体稳定性的问题均在成熟的三维弹性理论体系下解决。第九章就是基于这一基本原则而完稿的。

关于符号标志法，我们认为下面解释几句是合适的。当我们面临要写弹性理论一书的任务时，一开始就必须回答这样一个基本问题：将用什么样的符号标志法？弹性理论主要研究对象是张量（比如应力和应变）。一般而论，曲线张量是大多数工程师以及其他自然科学工作者不太熟悉的科目，而且人们在能得心应手地运用它之前，必须经过单独的训练，总之，若把它用于该书的阐述中，将会失去许多期望该书的读者。另一方面，若采用传统的（标量）符号标志法，将使该书至少是现在篇幅的三倍。我们决定走折中之路，本书的大部分内容采用笛卡尔张量表述，这个符号标志法容易学、用几讲内容就能把它解释清楚（见第一章）。此外，借助于它，许多用其他方法表示的乏味且冗长的代数计算将变得很简单。而且它通常给出的是结构简单的公式，若把它们以传统的标量符号展开，则会显得很可怕很复杂。还有，对那些能熟练使用该符号的学生在阅读许多近期的科技文献时也将极为有利，这一优点绝不应小看。我们始终如一的使用了S.I.单位制，我们相信该单位制是将来检测系统的国际单位制。它几乎得到全世界的普遍承诺，虽然还不是全部，但该单位制的运用已经显著地迅速地增加。

不过，我们也给出了新老单位制的换算关系，因为有些人仍然在使用老单位制。

考虑到安排的课程多，学生负担较重，因此，该书的内容可适用于一个学期或两个学期学完。尽管在书中已经穿插了一些例题，但我们仍期望学生能去做一些附于各章末尾的练习中重要的题目。这些练习的难易程度，有的是一般性的计算，有的比较难一些，但对研读本书是有益的。通过做练习，学生能检查他们自己对书本内容的理解情况，还可以进一步巩固出现在各章节中重要的内容和概念。

由于阐述于本书的内容均是经典的，因此我们觉得，没有必要列出详细的参考文献或提供一个详尽的参考书目。鉴于深入细致的研究近年来正在进行，而且有很多很多研究者涉及于此，因此要把近五十年来重要的参考文献详尽汇编，大概需用单独一本书。基于这个原因，我们希望在书末列出的少量参考文献能满足读者的需要，而且若认为我们遗漏了任何某重要参考文献，也敬请原谅。

现代弹性理论是大约150年前，由A.L.Cauchy以及L.M.H.Navier 奠基的。从那个时候起，人们作出了许多开拓数学技巧的主体工作来决定固体中的变形、应力和应变。Cauchy的工作也被认为是现代连续介质力学发展的新起点，而且还被认为是完成了对一些新的具有挑战意义的问题导出公式并求解的主体工作，它们广泛地被运用于今天的科学技术。我们希望本书能起到双重作用：(1) 向年轻的工程师和自然科学工作者介绍弹性理论的基本概念和技巧；(2) 激励新手在这个领域进行他们的研究。我们还深信，大量范例和习题的安排，使得该书也适合于自学。

这里我们十分高兴地感谢美国空军的科研部门，他们在本

书构思过程中提供了大量的研究项目，此外，作者之一(H.R.)十分感谢在本书撰写期间位于Buffalo的纽约州立大学提供了假日，Dennis Malone博士和Phillip Malyak先生绘制了全部插图，他们在激光全息照相方面的专长，使得在5.4节中理论推导的结果由实验重现！我们还十分感谢Panl M. Culkowski 博士以及Yuen-Kuang Sun先生和Ginger Moronski小姐以及 Sally A. Pawlik 夫人杰出的合作，他们分别校核了全部手稿和完成了完美无缺的打字工作。

Herbert Reismann

Peter S. Pawlik

Buffalo，纽约

1980年6月

目　　录

1.　数学预备知识……………………………………………………(1)

1.1　求和约定……………………………………………………(1)

1.2　符号 δ_{ij} 和 e_{ijk}……………………………………………(3)

1.3　行列式……………………………………………………(6)

1.4　标量和矢量……………………………………………………(9)

1.5　坐标转换……………………………………………………(13)

1.6　笛卡尔张量……………………………………………………(16)

1.7　张量代数……………………………………………………(19)

1.8　商定律……………………………………………………(20)

1.9　标量场和矢量场……………………………………………………(21)

1.10　正交曲线坐标系……………………………………………………(25)

1.11　散度定理……………………………………………………(36)

2.　应力……………………………………………………(51)

2.1　应力矢量的概念……………………………………………………(51)

2.2　平衡……………………………………………………(52)

2.3　应力张量概念……………………………………………………(56)

2.4　主轴和主应力……………………………………………………(58)

2.5　举例……………………………………………………(63)

2.6　主剪应力……………………………………………………(65)

2.7　Mohr圆……………………………………………………(67)

2.8　八面体剪应力……………………………………………………(74)

2.9　应力分解……………………………………………………(76)

2.10　曲线坐标系……………………………………………………(80)

3.　变形和应变……………………………………………………(94)

3.1　变形固体的运动学……………………………………………………(94)

3.2 应变张量概念 …… (96)
3.3 变形几何学 …… (102)
3.4 小应变 …… (107)
3.5 线应变 …… (112)
3.6 刚体位移 …… (118)
3.7 线性应变场的相容性 …… (120)
3.8 曲线坐标 …… (124)
4. 弹性和它的极限 …… (146)
4.1 Hooke 定律和弹性张量 …… (146)
4.2 各向同性 …… (147)
4.3 弹性常数的物理解释 …… (152)
4.4 拉伸试验 …… (155)
4.5 屈服准则 …… (158)
4.6 范例 …… (164)
5. 公式汇萃以及一些线弹性问题的精确解 …… (171)
5.1 受内外压力的球壳 …… (172)
5.2 受内外压力的圆柱壳（平面应变解） …… (173)
5.3 棱柱体扭转 …… (178)
5.4 梁的纯弯曲 …… (194)
5.5 端部受横向载荷的悬臂梁 …… (196)
5.6 二维情况问题 …… (207)
6. 结构力学 …… (232)
6.1 杆的拉伸或压缩 …… (233)
6.2 杆的扭转 …… (238)
6.3 Timoshenko梁 …… (243)
6.4 Euler-Bernoulli梁 …… (253)
6.5 板理论 …… (257)
6.6 板的经典理论 …… (266)
7. 能量原理 …… (285)
7.1 应变能概念 …… (285)
7.2 功率方程式 …… (292)

7.3 梁和板的应变能 ……………………………………………………(294)
7.4 虚功原理 ……………………………………………………(298)
7.5 虚功原理的运用 ……………………………………………………(300)
7.6 最小位能原理 ……………………………………………………(308)
7.7 余能概念 ……………………………………………………(310)
7.8 余虚功原理 ……………………………………………………(313)
7.9 最小余能原理 ……………………………………………………(318)
7.10 Castigliano 定理 ……………………………………………………(320)
7.11 Betti 和 Rayleigh 的互易理论……………………………………………………(323)
7.12 Kirchhoff 唯一性定理……………………………………………………(327)
7.13 Hellinger和Reissner 变分原理……………………………………………………(330)

8. 数值方法…………………………………………… (342)

8.1 Ritz 法……………………………………………………(343)
8.2 Ritz法的运用 ……………………………………………………(346)
8.3 Kantorovich 法……………………………………………………(363)
8.4 加权残数法 ……………………………………………………(364)
8.5 有限差分法 ……………………………………………………(370)
8.6 有限元法 ……………………………………………………(378)

9. 具初始应力弹性体的失稳……………………………… (421)

9.1 应变和变形 ……………………………………………………(423)
9.2 应力和平衡 ……………………………………………………(426)
9.3 初始应力的问题 ……………………………………………………(430)
9.4 能量研究 ……………………………………………………(432)
9.5 具初始应力的梁 ……………………………………………………(435)
9.6 具初始应力的板 ……………………………………………………(443)

1 数学预备知识

为对弹性理论进行简明扼要的描述，我们应尽快使自己适应于现在通常用于研究工作中的一种简化符号标志法。这种符号标志法在许多（当然不是所有的）的工科大学和基础理论以及应用科学的课程中已有自己一套规律。花费一些时间去学习简化符号标志法及它的一些重要分支和领域，特别是关于这一理论发展的一些结果，并且能够得心应手地应用它们是值得的。新符号标志法所提供的知识和理解，可以节省篇幅，并可作为非数值计算的有力助手。当然，对于缺乏经验的人并不是马上就可以运用。这一章内容，连同它的练习，就是为了使读者能熟悉这种符号标志法而安排的。另外，这一章的内容还包括笛卡尔张量初步，以及对矢量代数、矢量分析和曲线坐标的简要复习和总结。这些知识在以后各章节里是很有用处的。

1.1 求和约定

常常遇到有三个未知数的三个线性方程组。如：

$$
\begin{aligned}
Ax+By+Cz&=a\\
Dx+Ey+Fz&=b\\
Gx+Hy+Tz&=c
\end{aligned}
\qquad (1.1a)
$$

这里 x、y、z 是未知数，A、B、…，a、b，…是已知常数。鉴于一些将逐渐为读者明了的理由，对(1.1a)式采用比较系统化的符号标志将更为方便。令 $x=x_1$、$y=x_2$、$z=x_3$，$A=a_{11}$，$B=a_{12}$ 等等。同时令 $a=b_1$，$b=b_2$，$c=b_3$，这样

(1.1a) 式就可写成如下形式：

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2\\
a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3
\end{aligned}
\tag{1.1b}
$$

方程(1.1b)也可以写为：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=b_i \qquad i=1,2,3 \tag{1.1c}$$

注意到只要把(1.1c)式中的下标 i 分别赋值 1， 2 和 3 就可以得 (1.1b) 式。最后还可以进一步对 (1.1c) 式进行符号缩减：

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j=b_i \qquad i=1,2,3 \tag{1.1d}$$

这里的符号 $\sum\limits_{j=1}^{3}$ 是表示对重复下标 j 求和。略去 (1.1d) 式中的求和符号，使得它更加简化如下式：

$$a_{ij}x_j=b_i \tag{1.1e}$$

下标 i 在 (1.1e) 式的每项中只出现一次，称它为自由下标。而下标 j 在(1.1e)式中是重复出现的，这个重复意味着对 j 求和，j 就称为求和下标。

求和约定的一般规则可以做这样的描述：当一个符号（下标）在 A_iB_i，C_{jj} 及 $\partial f_k/\partial x_k=f_{k,k}$，这类表达式中重复出现时，那么它就是求和下标，并且在 (1,2,3) 的范围内能把它展成三项连加的形式。因此，有：

$$
\begin{aligned}
A_iB_i&=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3\\
C_{jj}&=C_{11}+C_{22}+C_{33}\\
\frac{\partial f_k}{\partial x_k}&=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\\
&=f_{k,k}=f_{1,1}+f_{2,2}+f_{3,3}
\end{aligned}
\tag{1,2}
$$

类似的，对（1.1e）式,可以扩展成对下标 j 求和,即是：$a_{ij}x_j=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=b_i$，然后再令该式中的自由下标 $i=1,2,3$，就可以得到它的最后扩展式(1.1b)。

求和约定仅仅对如（1.2）中的三种表达式有意义，不适用于如（A_i+B_i）这类表达式。同时还要注意到在任何表达式中同一求和下标绝不能出现两次以上，因此约定 $A_iB_iC_i$ 是没有意义的。在使用求和下标时，使用什么符号是无关紧要的。例如：

$$A_iB_i=A_jB_j=A_kB_k，等等，$$
$$C_{ii}=C_{jj}=C_{kk}，等等，$$
$$f_{i,i}=f_{j,j}=f_{k,k}，等等。$$

另外，通常在一般范围的分析中，下标 i，j，k 为（1，2，3）。提出求和约定法则应归功于A·Einstein（1879—1955）。这个符号标志连同张量概念将在 1.6 节中进一步论述，我们将进一步研究它的结论而不是仅仅局限于它的方便性。

1.2 符号δ_{ij}和e_{ijk}

现在引进一个简化记号，应用它会使在 1.1 节里描述的关于重复下标的求和约定更为方便。这个记号就是著名的 Kronecker δ（Leopold Kronecker，1823—1891），它定义为：

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & 当\ i=j.\\ 0 & 当\ i\neq j.\end{cases} \tag{1.3a}$$

Kronecker δ 符号也可以用矩阵方程表示：

$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.3b}$$

考虑表达式

$$\delta_{ij}A_i=\delta_{1j}A_1+\delta_{2j}A_2+\delta_{3j}A_3$$

根据(1.3)式可得

$$\delta_{ij}A_i=A_1 \quad 当 j=1.$$
$$\delta_{ij}A_i=A_2 \quad 当 j=2.$$
$$\delta_{ij}A_i=A_3 \quad 当 j=3.$$

这样可以得：

$$\delta_{ij}A_i=A_j \tag{1.4}$$

即是，若A_i被δ_{ij}相乘，对重复下标i求和的结果就是以下标j取代A_i中的j，δ_{ij}通常称做置换算子。考虑到前面的求和约定，我们还可以得到$\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3$，同样由$\delta_{ij}$的置换性质得$\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}$。

另一个相当有用的工具是通过变换有关数字位置而获得的。定义为：

$$\left.\begin{array}{l} e_{ijk}=\dfrac{1}{2}(j-k)(k-i)(i-j) \\ 其中\ i,\ j,\ k\ 不具有求和性质 \\ i,j,k=1,2,3 \end{array}\right\} \tag{1.5a}$$

通过对(1.5a)式的直接代换，可以导出：

$$e_{ijk}=\begin{cases} 1 & 当\ (i\ j\ k)=(123),\ (312),\ (231) \\ -1 & 当\ (i\ j\ k)=(321),\ (132),\ (213) \\ 0 & 当两个或多于两个下标是相同时 \end{cases} \tag{1.5b}$$

鉴于(1.5b)式，e_{ijk}常被称为置换符号(permutation Symbol)，它仅当(ijk)的排列为(123)其值才非零。e_{ijk}也可以表示成由Kronecker δ表示的行列式形式：

$$e_{ijk}=\begin{bmatrix}\delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3}\\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3}\\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1}\\ \delta_{i2} & \delta_{j2} & \delta_{k2}\\ \delta_{i3} & \delta_{j3} & \delta_{k3}\end{bmatrix} \tag{1.6}$$

通过展开(1.6)式的行列式。即可证得(1.5)和(1.6) 式的等效性（见练习1.8)，例如，当$(ijk)=(312)$

$$e_{312}=1=\begin{vmatrix}\delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\\ \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=1$$

运用(1.6)式求积，可以建立起排列符号和Kronecker δ 之间方便而有用的关系式。

$$e_{ijk}e_{pqr}=\begin{vmatrix}\delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3}\\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3}\\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\delta_{p1} & \delta_{q1} & \delta_{r1}\\ \delta_{p2} & \delta_{q2} & \delta_{r2}\\ \delta_{p3} & \delta_{q3} & \delta_{r3}\end{vmatrix}$$

对它进行通常的行、列相乘，同时注意到(1.4)式的结果，即

$$\delta_{i1}\delta_{p1}+\delta_{i2}\delta_{p2}+\delta_{i3}\delta_{p3}=\delta_{il}\delta_{pl}=\delta_{ip} \text{ 等等}$$

可得：

$$e_{ijk}e_{pqr}=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr}\\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr}\end{vmatrix} \tag{1.7}$$

当行列式的任意两行或两列交换后，行列式的符号要改变。这样，参阅(1.6)式。就可以得到：

$$e_{ijk}=-e_{jik}=-e_{ikj}=-e_{kji} \tag{1.8a}$$

如果任意的行或列再交换一次，又会使行列式符号改变。由式(1.8a)则可得：

$$e_{ijk}=e_{jki}=e_{kij} \tag{1.8b}$$

由(1.8a)式可知e_{ijk}是关于它们任意两下标交换而反对称。令(1.7)式$k=p$，并且求出该行列式的值，根据(1.4)式，即可证明：

$$e_{ijk}e_{kqr}=\begin{vmatrix}\delta_{iq} & \delta_{ir}\\ \delta_{jq} & \delta_{jr}\end{vmatrix}=\delta_{iq}\delta_{jr}-\delta_{ir}\delta_{jq} \tag{1.9}$$

在(1.9)式令 $q=j$，并且进行需要的求和，可得另一个有用的恒等结果，这个结果是 $e_{ijk}e_{kjr}=-2\delta_{ir}$，或者再利用(1.8)式，则得：

$$e_{ijk}e_{rjk}=2\delta_{ir} \tag{1.10}$$

最后，若令(1.10)式中 $r=i$，并进行必要的求和运算，则得：

$$e_{ijk}e_{ijk}=6 \tag{1.11}$$

1.3 行列式

为了证明Kronecker δ 和置换符号 e_{ijk} 在求和约定中的有效性和实用性，现在对行列式理论的部分内容进行简要的复习总结。考虑三阶行列式：

$$a\equiv\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\equiv|a_{ij}| \tag{1.12}$$

行列式的元素由符号 a_{ij} 表示，这里下标 i 和 j 分别代表行与列。例如 a_{32} 是位于第三行第二列的元素。运用1.1和1.2节的内容，可以把(1.12)式写成如下形式：

$$a=e_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} \tag{1.13a}$$

$$a=e_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3} \tag{1.13b}$$

这里(1.13a)式和(1.13b)式是(1.12)式分别以行和列展开的展开式，（见练习1.9）。表达式(1.13)也可以合并成对称的形式：

$$ae_{pqr}=e_{ijk}a_{ip}a_{jq}a_{kr} \tag{1.14a}$$

$$ae_{pqr}=e_{ijk}a_{pi}a_{qj}a_{rk} \tag{1.14b}$$

现在对(1.14a)式两边同乘 e_{pqr} 并运用(1.11)式结果，则得：