《数理天地》丛书 ■ 主编 周国镇

# 希望数学

本册主编 王建民

高三

气象出版社

# 序　言

《希望数学》是《数理天地》杂志主编的“《数理天地》丛书”系列的一个部分，之所以在数学之前加希望二字，是因为这是能给希望学好数学的同学们带来希望的数学书。

这是一套系统地、精练地讲解初、高中数学主要内容的简明教程。从初一到高三，共六个分册。其中，初、高中一、二年级四个分册中的每个分册都分为基础内容和选学内容两部分。

基础内容：不超出现行的数学教学大纲，保证使同学们用尽量少的时间，比较轻松地在比课本高的水平上掌握本年级数学最主要的内容。

选学内容：供学有余力、爱好数学或准备参加“希望杯”数学邀请赛以及其他数学竞赛的学生使用。

初、高中三年级这两个分册专为初、高三同学升学备考之用。

每个分册都由若干个专题组成，每个专题独立成篇，便于同学和老师根据需要选用，不必考虑先后次序。

每个专题包括：基本知识、例题、练习三个部分。

基本知识：以极简练、明白的文字介绍本专题的知识、方法。帮助同学们理清脉络，掌握重点。

例题：少而精，有代表性，有新意。例题的讲解渗透了基本的数学思想，讲思路，讲方法，表达规范、简练。特别有助于提

高同学们的分析能力。

练习：编入了有训练价值的典型题目，不求多、不求全，只求少而精。对不太难的题目给出了最后结果，使读者有一个思维空间；对较难的题目，给出了关键性的提示。

本书由《数理天地》杂志邀请北京、上海、江苏、浙江、湖北、湖南、广东、四川、山西、福建、吉林、云南、宁夏等地著名的数学教研员、优秀的数学教师以及部分大学数学教师合作编写，经《数理天地》杂志专家审定。

当今，中学数学参考书花样繁多，说有数百种也不为过，常令学子们眼花缭乱，无从选择。本书则力求使读者读了就能懂，懂了就能用，以实在和简明易懂的讲述见长。相信读者使用之后自有体会。

周国镇

《数理天地》杂志主编

2002 年 1 月 18 日

# 目　　录

# 单元 1　代数问题的方法与技巧

## 一、基本知识

### 1. 恒等变换与放缩变换

解析式的恒等变换是处理代数式与超越式(指数式、对数式、三角函数式、反三角函数式)的运算及方程求解的基本技法和重要手段;不等式的放缩变换是处理大小比较及不等式证明的基本技法和重要手段;它们的应用都十分广泛,既是运算能力的组成部分,又是提高逻辑思维能力的基础.依据题目的特征,选用简捷、合理的恒等变换或放缩变换,常常成为解决代数问题的关键.

### 2. 常量、变量和参数

数学中的常量与变量相互依存,并在一定条件下相互转化;参数(也叫参变量)是介于常量和变量之间,具有中间性质和双重特征的量,它的本质是变量,但又可视为常量.参数广泛地存在于中学数学的各类问题之中,含参数的问题常有两种类型,一类是根据参数在允许值的集合 $A$ 的不同子集 $A_1$,$A_2$,…,$A_n$ 取值时,探求不同的结论;另一类是根据题设的条件,探求参数的取值范围或参数应满足的关系式.

### 3. 数形结合

"数"和"形"是数学中两个最基本的研究对象,数形结合是高中数学的重要特征.在几何图形中常常蕴含着与它们的形状、大小、位置关系相联系的数量关系;反之,数量的关系又

常常可以通过几何图形直观地反映和描述.数形结合就是把抽象思维和形象思维结合起来,通过对图形的观察、分析、处理,发挥直观对抽象的支柱作用,实现抽象概念与具体形象的联系和转化,化难为易,以有助于问题的解决.

数形结合在代数中主要表现为函数和图像的结合以及复数与几何的结合.

4. *运用函数的思想方法分析和解决问题.*

函数思想的基本特征是变化和联系,函数用以描述自然界中量的依存关系,是对问题的数量本质特征和制约关系的一种刻画.用变化和联系的观点分析问题,抽象其数量特征,通过建立函数关系,并运用函数的理论和方法,求得问题的解决.数列做为一类特殊的函数,函数的思想方法也有着广泛的应用.

## 二、例　题

**例 1**　设 $0<x<1,a>0,a\neq 1$.

试比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

**解法一**:因为　$0<x<1$,

所以　$0<1-x<1,1+x>1$,

若 $0<a<1$,则 $\log_a(1-x)>0,\log_a(1+x)<0$,这时

$$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)$$
$$=\log_a(1-x^2).$$

由于 $0<1-x^2<1,\log_a(1-x^2)>0$,因此

$$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|;$$

若 $a>1$,则 $\log_a(1-x)<0,\log_a(1+x)>0$.

这时　$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$$=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)$$

$=-\log_a(1-x^2)$.

由于 $0<1-x^2<1$, $\log_a(1-x^2)<0$,因此

$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

综上可知,当 $0<x<1$, $a>0$, $a\neq 1$ 时,恒有

$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

**解法二**:因为 $0<x<1$, $0<1-x<1$, $1+x>1$.

所以 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 均为正数.

这时
$$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=\left|\frac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|$$
$$=|\log_{1+x}(1-x)|=-\log_{1+x}(1-x)$$
$$=-\log_{1+x}\frac{1-x^2}{1+x}=-\log_{1+x}(1-x^2)+1.$$

由于 $0<1-x^2<1$, $1+x>1$, $\log_{1+x}(1-x^2)<0$,因此

$$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}>1.$$

即
$$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|.$$

**解法三**:因为 $0<x<1$.

所以 $0<1-x^2<1$, $0<\frac{1-x}{1+x}<1$.

这时
$$|\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2$$
$$=\log_a^2(1-x)-\log_a^2(1+x)$$
$$=[\log_a(1-x)+\log_a(1+x)][\log_a(1-x)-\log_a(1+x)]$$
$$=\log_a(1-x^2)\cdot\log_a\frac{1-x}{1+x}.$$

由于 $\log_a(1-x^2)$ 与 $\log_a\frac{1-x}{1+x}$ 同正($0<a<1$)或同负($a>1$),因此 $\log_a(1-x^2)\cdot\log_a\frac{1-x}{1+x}$ 恒为正数,由此可知

$|\log_a(1-x)|^2>|\log_a(1+x)|^2$,

即 $$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|.$$

**说明**:三种解法的途径与变换方法各不相同,但合理应用对数式的恒等变换、放缩变换及绝对值的变换规则都是导出结论的关键所在.

**例 2** 试判定函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,x\in\boldsymbol{R})$ 的奇偶性.

**解**: $f(x)$为奇函数$\Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0$

$\Leftrightarrow A\sin(\omega x+\varphi)+A\sin(-\omega x+\varphi)=0$

$\Leftrightarrow 2A\sin\varphi\cos\omega x=0$ 对一切 $x\in\boldsymbol{R}$ 恒成立.

由于 $A>0,\omega>0$,因此上式等价于 $\sin\varphi=0$,

即 $\varphi=k\pi(k\in\boldsymbol{Z})$.

$f(x)$为偶函数$\Leftrightarrow f(x)-f(-x)=0$

$\Leftrightarrow A\sin(\omega x+\varphi)-A\sin(-\omega x+\varphi)=0$

$\Leftrightarrow 2A\cos\varphi\sin\omega x=0$ 对一切 $x\in\boldsymbol{R}$ 恒成立.

$\Leftrightarrow\cos\varphi=0\Leftrightarrow\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\boldsymbol{Z})$.

综上可知,

当且仅当 $\varphi=k\pi(k\in\boldsymbol{Z})$时,$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$是奇函数;

当且仅当 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\boldsymbol{Z})$时,$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$是偶函数;

当且仅当 $\varphi\neq\frac{k\pi}{2}(k\in\boldsymbol{Z})$时,$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$既非奇函数,也非偶函数.

**说明**:函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的解析式中,含有 $A,\omega,\varphi$三个参数,参数 $A$ 决定了函数 $f(x)$的最大值和最小值;参数 $\omega$ 决定了函数 $f(x)$的最小正周期;参数 $\varphi$ 决定了函数 $f(x)$的奇偶性.由此可见,参数对函数的性质起着决定性作用.

**例 3** 已知 $A=\{x|x^2-x-6<0\}$,$B=\{x|x^2+2x-8>0\}$,$C=\{x|x^2-4ax+3a^2<0\}$.

(1) 试求实数 $a$ 的取值范围,使 $C\supseteq A\cap B$;

(2) 试求实数 $a$ 的取值范围,使 $C\supseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

**解**:解不等式 $x^2-x-6<0$,得 $A=\{x|-2<x<3\}$,

所以 $\overline{A}=\{x|x\leqslant-2$ 或 $x\geqslant3\}$;

解不等式 $x^2+2x-8>0$,得 $B=\{x|x<-4$ 或 $x>2\}$,

所以 $\overline{B}=\{x|-4\leqslant x\leqslant2\}$.

因此 $A\cap B=\{x|2<x<3\}$,$\overline{A}\cap\overline{B}=\{x|-4\leqslant x\leqslant-2\}$.

解不等式 $x^2-4ax+3a^2<0$,可知:当 $a<0$ 时,$C=\{x|3a<x<a\}$;当 $a=0$ 时,$C=\varnothing$;当 $a>0$ 时,$C=\{x|a<x<3a\}$.

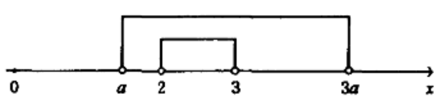


图 1.1

(1) 如图 1.1 所示,$C\supseteq A\cap B$ 等价于

$$\begin{cases}a>0,\\a\leqslant2,\\3a\geqslant3.\end{cases}\quad\text{解得 }1\leqslant a\leqslant2.$$

(2) 如图 1.2 所示,$C\supseteq\overline{A}\cap\overline{B}$ 等价于

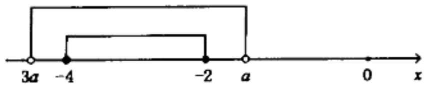


图 1.2

$$\begin{cases} a<0 \\ 3a<-4, \\ a>-2. \end{cases} \quad 解得 -2<a<-\frac{4}{3}.$$

**说明**：$C$ 是含字母系数（参数）$a$ 的一元二次不等式的解集，$a$ 在不同范围内取值时，解集 $C$ 也随之不同，而为使 $C$ 分别满足 $C \supseteq A \cap B$ 和 $C \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ 的条件时，$a$ 又应在一定范围内取值. 可见参数的明显作用.

**例 4** 已知 $a>0, a\neq 1$，试求使方程

$\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$ 有解的 $k$ 的取值范围.

**解**：由对数函数的性质可知：

$$原方程 \iff \begin{cases} (x-ak)^2=x^2-a^2, \\ x-ak>0, \\ x^2-a^2>0. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x-ak)^2=x^2-a^2, & ① \\ x-ak>0. & ② \end{cases}$$

由①式得 $2kx=a(1+k^2)$ ③

当 $k=0$ 时，由 $a>0$ 知③式无解，原方程无解；

当 $k\neq 0$ 时，③式的解是 $x=\dfrac{a(1+k^2)}{2k}$，代入②式，得

$$\frac{1+k^2}{2k}>k.$$

即

$$\frac{1-k^2}{2k}>0.$$

解得 $$k<-1 \text{ 或 } 0<k<1.$$

综上可知：当 $k\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 时，原方程有解.

**说明**：这是一个含字母系数 $a$ 和 $k$ 的对数方程的根的讨论问题，变换复杂，抽象性强，难度较大. 联系函数图像就可充分借助于图像的直观性，正确理解题意，有效检验答案.

原题的几何解释是：使函数 $y=x-ak$ 与 $y=\sqrt{x^2-a^2}$ $(a>0,a\neq 1)$ 的图像在直角坐标平面的上半平面有交点时，$k$ 的取值范围. 由于函数 $y=x-ak$ 的图像是斜率为 1，截距为 $-ak$ 的直线系，而

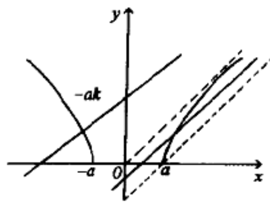


图 1.3

$$y=\sqrt{x^2-a^2}\Leftrightarrow\begin{cases}y>0,\\x^2-y^2=a^2\end{cases}$$

其图像是等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的两上半支(如图 1.3). 直线和双曲线的两上半支有交点的条件是 $-ak>a$ 或 $-a<-ak<0(a>0)$，解得 $k<-1$ 或 $0<k<1$.

**例 5** 已知正方形 $ABCD$ 的两个顶点是 $A(0,-1)$，$C(2,5)$，求顶点 $B$，$D$ 的坐标.

**解法一**：在正方形 $ABCD$ 中，$AB=AD=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$，$\angle CAB=\angle CAD=45°$，因此，向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 是由向量 $\overrightarrow{AC}$ 按顺时针和逆时针的方向旋转 45°，并将模缩成 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍所得. 可知

$$z_B-z_A=(z_C-z_A)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(-45°)+i\sin(-45°)].$$

$z_D-z_A=(z_C-z_A)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos45°+i\sin45°)$.

将 $z_A=-i,z_C=2+5i$ 代入,可得

$z_B=4+i,z_D=-2+3i$.

故顶点 $B,D$ 坐标为 $B(4,1),D(-2,3)$.

**解法二**:如图 1.4 所示,连结 $AC,BD$ 交于点 $M$,则 $MA=MB=MD$,且 $AC\perp BD$. 因此向量 $\overrightarrow{MB}$ 和 $\overrightarrow{MD}$ 是由向量 $\overrightarrow{MA}$ 按逆时针和顺时针方向旋转 90°所得,可得

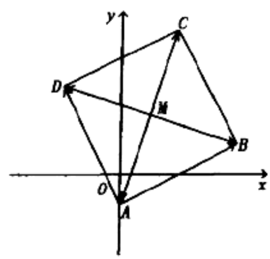


图 1.4

$z_B-z_M=(z_A-z_M)\cdot i$,

$z_D-z_M=(z_A-z_M)(-i)$.

将 $z_A=-i,z_M=\frac{z_A+z_C}{2}=1+2i$ 代入,可得

$z_B=4+i,z_D=-2+3i$.

**说明**:这是一道解析几何的问题,采用坐标法,将 $B,D$ 两点视为线段 $AC$ 的垂直平分线与图 $ABCD$ 的交点,则需推求直线和圆的方程,并解方程组,运算量大,而运用向量的旋转和伸缩,归结为复数的运算就能简化计算.

**例 6** 已知数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=1$,$S_n$ 是它的前 $n$ 项和,并且 $S_{n+1}=4a_n+2(n\in N)$.

(1) 设 $b_n=a_{n+1}-2a_n(n\in N)$,求证:数列 $\{b_n\}$ 是等比数列,并写出它的通项公式;

(2) 设 $c_n=\frac{a_n}{2^n}(n\in N)$,求证:数列 $\{c_n\}$ 是等差数列,并写

出它的通项公式；

(3) 求数列$\{a_n\}$的通项公式及前$n$项和公式.

**解**：(1) 因为 $S_{n+1}=4a_n+2$，

所以 $S_{n+2}=4a_{n+1}+2$.

两式相减，得 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$，

整理，得 $a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$.

由于 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，$(n\in N)$. 上式即 $b_{n+1}=2b_n$.

因此$\{b_n\}$是公比为 2 的等比数列.

因为 $a_1=1, S_2=a_1+a_2=4a_1+2=6$，

所以 $a_2=5, b_1=a_2-3a_1=3$，可知 $b_n=3\cdot 2^{n-1}(n\in N)$.

(2) 因为 $c_n=\frac{a_n}{2^n}, c_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}$，

所以 $c_{n+1}-c_n=\frac{a_{n+1}-2a_n}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^{n+1}}=\frac{3.2^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{4}$.

由此可知$\{c_n\}$是公差为$\frac{3}{4}$的等差数列. 由于 $c_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$，可得

$$c_n=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}(3n-1).$$

(3) $a_n=2^n\cdot c_n=(3n-1)\cdot 2^{n-2}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=4a_{n-1}+2=(3n-4)\cdot 2^{n-1}+2$，$S_1=a_1=1$ 也适合，故 $S_n=(3n-4)\cdot 2^{n-1}+2(n\in N)$.

**说明**：本题中共有四个相关数列$\{a_n\}$，$\{S_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，相互联系又相互转化.

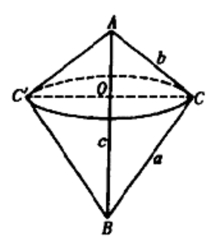


图 1.5

**例 7** 设 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，以 $AB$ 为轴将

$\triangle ABC$ 旋转一周生成的旋转体的侧面积为 $S_1$，$\triangle ABC$ 的内切圆面积为 $S_2$.

(1) 用 $a,b,c$ 表示 $S_1$ 和 $S_2$；

(2) 设 $x=\dfrac{a+b}{c}$，$f(x)=\dfrac{S_1}{S_2}$，求证：$f(x)=\dfrac{2x(x+1)}{x-1}$；

(3) 求 $f(x)$的定义域，判定 $f(x)$的单调性，并求 $f(x)$的最小值.

**解**：(1) 作 $CD\perp AB$ 于 $O$，则旋转体（两同底圆锥的组合体）的底面半径

$$R=CO=\frac{ab}{c},S_1=\pi R(a+b)=\frac{\pi ab(a+b)}{c};$$

$Rt\triangle ABC$ 的内切圆半径

$$r=\frac{a+b-c}{2},S_2=\pi r^2=\frac{\pi}{4}(a+b-c)^2.$$

(2) $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{4ab(a+b)}{c(a+b-c)^2}$.

因为　$Rt\triangle ABC$ 中，$c^2=a^2+b^2$. $a+b=cx$.

所以　$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=(cx)^2-c^2=c^2(x^2-1)$.

由此可得　$f(x)=\dfrac{2c^2(x^2-1)\cdot cx}{c(cx-c)^2}=\dfrac{2x(x+1)}{x-1}$.

(3) 因为　$\triangle ABC$ 中，$a+b>c>0$，即 $cx>c>0$，

所以　$x>1$.

因为　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\leqslant 2(a^2+b^2)=2c^2$.

所以　$x=\dfrac{a+b}{c}\leqslant\sqrt{2}$.

由此可知 $f(x)$的定义域是$(1,\sqrt{2}]$.

任取 $x_1,x_2\in(1,\sqrt{2}]$，且 $x_1<x_2$

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{2x_2(x_2+1)}{x_2-1}-\frac{2x_1(x_1-1)}{x_1-1}$$

$$=\frac{2(x_2-x_1)[x_1x_2-(x_1+x_2)-2]}{(x_1-1)(x_2-1)}.$$

因为　$1<x_1<x_2\leqslant\sqrt{2}$，

所以　$x_2-x_1>0, x_1x_2-2<0$.

所以　$f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以　$f(x)$是减函数，最小值是 $f(\sqrt{2})=6\sqrt{2}+8$.

**说明**：这是一个有几何背景的函数问题，函数的一系列性质都与几何图形的特征相联系.

**三、习　题**

1. 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_n>0(n\in \mathbf{N})$，$a_1+a_2+\cdots+a_{4n}=A$，$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{4n}=B$，求$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{4n}}$.

2. 设 $A,B,C$ 是等比数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和、前 $2n$ 项和及前 $3n$ 项和，试比较 $A^2+B^2$ 与 $A(B+C)$的大小.

3. 已知 $a,b,c\in \mathbf{R}$，且 $a\neq 0$，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=ax+b$，当$|x|\leqslant 1$ 时，$|f(x)|\leqslant 1$. 求证：当$|x|\leqslant 1$ 时，$|g(x)|\leqslant 2$.

4. 讨论方程$|x^2-2x-3|=a(a\in \mathbf{R})$的解的个数.

5. 已知 $a\in \mathbf{R}$，解关于 $x$ 的不等式$\sqrt{a^2-2x^2}>x+a$.

6. 设 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$对一切 $x\in \mathbf{R}$ 都成立，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$. 试描绘函数 $f(x)$在区间$[-6,6]$上的图像.

7. 在复平面上，$\triangle ABC$ 是以 $A$ 为直角顶点的直角三角形. $A,B,C$ 分别对应复数 $z,z^2,z^3$，且$|z|=2$，求 $z$ 及$\triangle ABC$

的周长.

8. 已知数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中,$a_1=1,b_1=2$,对一切自然数$n,a_n,b_n,a_{n+1}$成等差数列,$b_n,a_{n+1},b_{n+1}$成等比数列.

(1) 求$a_2,b_2,a_3,b_3,a_4,b_4$的值;

(2) 猜想$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式,并证明所得的结论.

9. 已知$A(0,a)$,$B(0,b)$($a>b>0$)是平面直角坐标系中$y$轴正半轴上两定点,$C$是$x$轴正半轴上任意一点,求使$\angle ACB$取最大值是应$C$的坐格,并求$\angle ACB$的最大值.

10. 已知Rt$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,$AC=8$,$BC=6$,$P$是$\triangle ABC$的内切圆上任意一点,求$PA^2+PB^2+PC^2$的最大值和最小值.

**四、答案·提示**

1. 设$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{4n}}=X$,等比数列公比为$q$. 当$q=1$时,$A=4na_1$,$B=a_1^{4n}$,则$X=\frac{4n}{a_1}=\frac{A}{\sqrt[2n]{B}}$,当$q\neq1$时,$A=a_1\cdot\frac{1-q^{4n}}{1-q}$,$B=a_1^{4n}\cdot q^{2n(4n-1)}$,$X=\frac{1}{a_{4n}}\cdot\frac{1-q^{4n}}{1-q}$,则$\frac{A}{X}=a_1\cdot a_{4n}=a_1^2q^{4n-1}=\sqrt[2n]{B}$,$X=\frac{A}{\sqrt[2n]{B}}$.

2. $A=a_1+a_2+\cdots+a_n$,

$$\begin{aligned}B&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(a_1+a_2+\cdots+a_n)q^n\\&=A(1+q^n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})+\\&\quad(a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n})\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(a_1+a_2+\cdots+a_n)q^n+(a_1+\end{aligned}$$

$a_2+\cdots+a_n)q^{2n}$

$=A(1+q^n+q^{2n})$.

由此可得 $A^2+B^2-A(B+C)=B(B-A)-A(C-A)=A(1+q^n)\cdot Aq^n-A\cdot A(q^n+q^{2n})=0$,

故 $A^2+B^2=A(B+C)$.

3. 当 $a>0$ 时,$g(x)=ax+b$ 是增函数. 当 $|x|\leqslant 1$ 时,$g(-1)\leqslant g(x)\leqslant g(1)$,而 $g(-1)=-a+b=-f(-1)+c$. $g(1)=a+b=f(a)-c$. 由于 $c=f(0)$,$0\in[-1,1]$,可知 $|c|\leqslant 1$,又 $|x|\leqslant 1$ 时,$|f(x)|\leqslant 1$. 因此 $-f(-1)+c=-[f(-1)-c]\geqslant -|f(-1)+c|\geqslant -(|f(-1)|+|c|)\geqslant -2$,$f(1)-c\leqslant|f(1)-c|\leqslant|f(1)|+|c|\leqslant 2$,即 $-2\leqslant g(x)\leqslant 2$,故 $|g(x)|\leqslant 2$. 同理,当 $a<0$ 时,$g(x)$ 是减函数,当 $|x|\leqslant 1$ 时,$g(1)\leqslant g(x)\leqslant g(-1)$,而 $g(1)=a+b=f(1)-c\geqslant -|f(1)-c|\geqslant -(|f(1)|+|c|)\geqslant -2$,$g(-1)=-a+b=-f(-1)+c\leqslant|-f(-1)+c|\leqslant|-f(-1)|+|c|\leqslant 2$,可得 $-2\leqslant g(x)\leqslant 2$,即 $|g(x)|\leqslant 2$.

4. 当 $a<0$ 时,解的个数为 0;当 $a=0$ 或 $a>4$ 时,解的个数为 2;当 $0<a<4$ 时,解的个数为 4;当 $a=4$ 时,解的个数为 3. 提示:作函数 $y=|x^2-2x-3|$ 与 $y=a$ 的图像,讨论两图像的交点个数.

5. 当 $a=0$ 时,不等式变为 $\sqrt{-2x^2}>x$,解集为空集 $\varnothing$;

当 $a\neq 0$ 时,原不等式 $\Leftrightarrow$ (Ⅰ) $\begin{cases} a^2-2x^2\geqslant 0 \\ x+a<0 \end{cases}$

或 (Ⅱ) $\begin{cases} a^2-2x^2\geqslant 0, \\ x+a\geqslant 0, \\ a^2-2x^2>(x+a)^2 \end{cases}$