经济计量学基础

何苏阳

南京大学出版社

(苏)新登字第 011 号

经济计量学基础
何苏阳
南京大学出版社出版
(南京大学校内　邮编 210008)
江苏省新华书店发行　南京通达彩色印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 5.25　字数 130 千
1993 年 12 月第 1 版　1993 年 12 月第 1 次印刷
印数:1—1500
ISBN 7-305-02519-4/F·389
定价:3.50 元

目　　录

第一章　预备知识

§1.1　导　论

一、什么是经济计量学

所谓经济计量学就是关于经济关系定量分析的学科，它是数学方法，统计技术和经济分析的综合，是运用经济学、数学与统计学来解决社会经济过程中所提出的理论和实际问题。

经济计量学是在资本主义经济实践的基础上，吸收了经济学，统计学和数学的成就而产生和发展起来的。它从二十世纪三十年代起成为一门独立的学科，在发展初期的十多年中，主要用于研究微观经济，自二十世纪的四十年代至七十年代，其研究重点是宏观经济。由于电子计算机的出现，使得大量复杂的经济计量模型得以建立和应用，从而促进了经济计量理论与应用的发展。现在，西方资本主义国家正在致力于对更大规模的各类模型的研究，主要用于经济预测和经济分析。研究的方向是国际经济波动的原因，以及国际经济发展战略可能引起的各种后果。例如，美国的“连接计划”(Link Project)及联合国的长期政策模型等都是研究国际活动的发展对经济稳定的影响以及长期经济政策问题。

二、经济计量学的研究内容和步骤

经济计量学的内容可以概括为两个方面，一是经济方法，二是它的应用，前者也称为理论经济计量学，后者称为应用经济计量

学。这两部分密切联系，相互促进，本书的前七章属于理论经济计量学部分，后三章属于经济计量学的应用部分。由于经济计量方法研究的是适合于经济现象特性的统计方法，并用来度量根据经济理论所设定的经济关系，因此，从这个方面来说，经济计量学较多地依赖于数理统计学。

应用经济计量方法解决实际问题，是在一定的经济理论指导下，建立相应的数学模型，利用各种计量方法和资料估计参数，运用模型解决问题。一般来说，这个研究过程要采取以下四个步骤：

1. 建立模型

用经济计量方法研究经济问题时，是通过建立经济计量模型来实现的，建立模型即是以经济理论和有关信息资料为基础，用一组数学上彼此独立、互不矛盾、完整有解并相互可识别的联立方程式（或在简单情况下的单一方程式）来表示经济现象中的变量与变量之间的联系。

2. 估计参数

模型中列出的方程式，包含有许多用符号表示的参数，在建立模型后，下一步的任务就是根据获得的统计资料，对模型中的参数进行估计。要做到这一点，我们需要相应的经济计量方法，如最小二乘法等。

估计参数时所需要的统计资料，主要有以下两种类型：

时间序列资料　即按时间先后排列的统计资料。如我国每年的钢产量、人口数量等。

横截面资料　即在特定的时间点上有关经济变量的统计资料。例如大学生消费情况调查资料、某城市居民的收入与储蓄情况资料等。

3. 验证理论

模型的参数估计出来以后，必须对估计结果进行检验和评价，以便确定这些结果的可靠性，检验工作一般分为经济理论检验、统

计检验和经济计量检验。

通常进行的经济计量检验有：随机项的异方差性检验、自相关性检验和解释变量之间是否存在多重共线性的检验。

4. 使用模型

单一方程模型主要用于经济预测；联立方程模型除用于经济预测外，还用于经济结构分析与政策评价。

经济计量研究的好坏，最终要通过实践检验，如果在实际使用中发现模型不好，就需要修改模型，按上述程序重作一遍，直到满意为止。

§1.2 一元线性回归模型

对于估算经济关系的经济计量学来说，最重要的统计工具就是回归分析，由于本书是假定读者已具有回归分析的初步知识，故在此我们只是对一元线性回归和多元线性回归（见 §1.3）作一回顾。

一、一元线性回归模型

一个自变量的线性回归模型叫做一元线性回归模型，其形式如下：

$$Y = a + bX + \varepsilon \qquad (1.1)$$

模型(1.1) 是对总体而言的，因此也叫做总体回归模型，以下简称回归模型。设给定 X,Y 的 n 次观测值（样本值）(X_1,Y_1)，(X_2,Y_2)，$\cdots$，(X_n,Y_n)。代入模型(1.1) 得

$$Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,\cdots,n \qquad (1.2)$$

为了讨论方便起见，以后我们所说的回归模型常指(1.2)，式中 ε_i，$i = 1,2,\cdots,n$ 是 ε 的 n 次观测值。但实际上 ε_i 是不可观测的。因此，给定 a,b，必须对 ε_i 的分布作出某些合理的假定。这些假定是：

① $E(\varepsilon_i)=0, i=1,2,\cdots,n$。这就是说对 X 的每个观测值，ε 可以取不同的值，有些大于零，有些小于零，但若考虑 ε 的所有可能取值，它们的平均值等于零。

根据这一假定，在(1.1)的两边同时取均值，则有

$$E(Y|X)=a+bX$$

这表明，自变量 X 取每一数值时，因变量 Y 的均值 $E(Y)$ 与 X 同在一条直线上，这条直线叫做总体回归线(或理论回归线)。

② $D(\varepsilon_i)=\sigma^2 \qquad i=1,2,\cdots,n$

这就是说，各次观测中 ε 具有相同的方差，也就是各次观测所受的随机影响程度相同，称②为齐次方差性。

③ $\mathrm{cov}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0 \quad i\neq j \qquad i,j=1,2,\cdots,n$

这表明，在任意两次观测时 $\varepsilon_i,\varepsilon_j$ 是不相关的，即 ε 在某次观测中取的值与任何其它次观测中取的值互不影响，称③为无序列相关性。

假定②和③通常叫做高斯－马尔柯夫(Gauss－Markov)假定。

④ $\mathrm{cov}(\varepsilon_i,X_i)=0 \qquad i=1,2,\cdots,n$

这一假定是说随机项 ε_i 与自变量 X_i 不相关。之所以提出这一假定是模型中随机项 ε 一般是综合了未包含在模型中的那些自变量以及其它因素对因变量 Y 的影响，因此，应该把 X 对 Y 的影响和 ε 对 Y 的影响区分开来。如果两者相关，就不可能把各自对 Y 的影响区分开来。

事实上，对回归模型(1.2)，假定④是成立的，这是因为在经典的回归分析中，一般认为 X 是非随机变量。

进一步假定 ε_i 服从正态分布，即 $\varepsilon_i\sim N(0,\sigma^2)$。这一假定是符合经济实际的，因为从实际经验和理论分析可知，随机影响可看作或近似看作服从正态分布。

上面假定中的 σ^2 是未知的，这是模型中的一个重要参数。因

此，通常在根据观测值对参数 a,b 进行估计的同时，对 σ^2 也给出一个估计。

回归分析的主要内容是：

① 根据样本观测值对回归模型参数进行估计，求得回归方程。

② 对回归方程、参数估计值进行显著性检验，并从影响因变量的自变量中判断哪些显著，哪些不显著。

③ 利用回归方程进行预测。

二、参数普通最小二乘估计（$OLSE$）及其性质

在回归分析理论中，我们知道，一元线性回归模型(1.2)中参数 a,b 的普通最小二乘估计（简记为 $OLSE$）$\hat{a},\hat{b}$ 的表达式如下：

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X}, \qquad \hat{b} = \frac{L_{XY}}{L_{XX}}$$

其中 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad L_{YY} = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$

$$L_{XX} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad L_{XY} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

样本回归方程为

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i \tag{1.3}$$

注意，$\hat{b}$ 表达式有多种形式，熟悉它们在实际计算和理论推导时会带来方便

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_iY_i - n\overline{X}\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n(\overline{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

利用样本回归方程(1.3)估计总体回归方程是否可靠，必须进行检验，而为此，就有必要讨论一下估计量 $\hat{a},\hat{b}$ 的统计性质。OLS 估计量 $\hat{a},\hat{b}$ 具有下列一些性质：

① 线性　OLS 估计量 $\hat{a},\hat{b}$ 皆是 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 的线性组合。

② 无偏性　OLS 估计量 $\hat{a},\hat{b}$ 的期望值等于总体回归模型的参数值 a,b。即有：

$$E\hat{a} = a, \qquad E\hat{b} = b$$

③ 有效性　所谓有效性是指 OLS 估计量 $\hat{a},\hat{b}$ 具有最小方差的性质。即对参数 a 的任一个线性无偏估计量 $\tilde{a}$ 而言都有

$$D(\hat{a}) \leqslant D(\tilde{a}),$$

同样，对参数 b 的任一个线性无偏估计量 $\tilde{b}$ 而言，都有，

$$D(\hat{b}) \leqslant D(\tilde{b})$$

OLS 估计量 $\hat{a},\hat{b}$ 的方差由下面的式子给出：

$$D(\hat{a}) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{nL_{XX}} \qquad D(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{L_{XX}} \tag{1.4}$$

一个估计量与参数真值的所有其它线性无偏估计量相比较，若它是线性无偏的，且具有最小方差，那么就是最佳线性无偏估计量。

④ 一致性　OLS 估计量 $\hat{a},\hat{b}$ 分别是 a,b 的一致估计(也称相合估计)，即在依概率收敛的意义下有：$\hat{a} \to a, \hat{b} \to b \ (n \to \infty)$。

⑤ 记 $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$，　即 e_i 为 Y 的实测值与拟合值之差，称 $e_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为残差。若记

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}$$

则 S^2 是 σ^2 的无偏估计量。

三、回归方程的显著性检验和拟合优度检验

上述样本回归方程(1.3)的得到，是在假定变量 Y 与变量 X 满足模型(1.1)的前提下实现的，但是变量 Y 与 X 之间是否真的有线性关系，这就需要用统计方法来检验。从(1.1)式可以看出，如果 $b=0$，则 Y 实际上与 X 无关，自然认为它们之间不存在线性关系；如果 $b\neq 0$，则说明 Y 与 X 之间存在着一定的线性关系。问题归结为检验假设

$$H_0: \qquad b=0$$

为检验 H_0，根据平方和分解式：

总的离差平方和 = 回归平方和 + 剩余平方和

即：
$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y})^2 \qquad (1.5)$$

来构造统计量。

若记 $U=\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2$，　$Q=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}e_i^2$

则(1.5)可写成

$$L_{YY}=U+Q$$

容易推得：

$$U=\hat{b}^2L_{XX}=\hat{b}L_{XY}=\frac{L_{XY}^2}{L_{XX}}$$

$$Q=L_{YY}-U=L_{YY}\left(1-\frac{L_{XY}^2}{L_{XX}L_{YY}}\right)$$

选取统计量
$$F=\frac{U}{Q/(n-2)}$$

在 H_0 成立时，统计量 $F\sim F(1,n-2)$。对于给定的 α，可以找出临界值 $F_\alpha(1,n-2)$，与计算出的 F 值进行比较：如果 $F>F_\alpha$，则否定假设 H_0，认为 X 与 Y 之间存在一定的线性关系；否则接受 H_0，即不能认为 X 与 Y 之间存在着线性关系。

为了检验回归直线与样本观测值拟合的好坏，有时选用样本决定系数。

我们把回归平方和与总离差平方和之比定义为样本决定系数。

记
$$r^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}=\frac{U}{L_{YY}} \tag{1.6}$$

显然，样本决定系数 r^2 越大，拟合程度就越好；r^2 越小，拟合程度就越差。需要注意地是，样本决定系数就其定义本身来说，并不要求模型一定是线性的，亦即(1.6)式对一般的非线性模型也是适用的。在一元线性回归模型中，由于 $\hat{Y}_i=\hat{a}+\hat{b}X_i$，$U=\hat{b}^2L_{XX}=\dfrac{L_{XY}^2}{L_{XX}}$，可得样本决定系数的另外两种形式：

$$r^2=\hat{b}^2\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}=\hat{b}^2\frac{L_{XX}}{L_{YY}}$$

或
$$r^2=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}=\frac{L_{XY}^2}{L_{XX}l_{YY}} \tag{1.7}$$

将平方和分解式代入(1.6)，可得

$$r^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}$$

这里 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}$ 表示未被解释离差的比率，当 $r^2=1$ 时 $\sum_{i=1}^{n}e_i^2=$

0 表示所有的样本观测值 Y_i 都位于回归直线上，此时拟合优度最好；当 $r^2=0$ 时 $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$，回归直线没有解释 Y 的任何一部分离差，此时拟合优度最差；在一般情况下，有 $0<r^2<1$。

综上所述，当 r^2 越接近于 1，拟合优度越好；r^2 越接近于 0，拟合优度越差。

四、利用回归方程进行预测

回归分析的一个重要目的就是要利用回归方程进行预测。所谓预测，就是给定了解释变量 X 的一个特定值后，要利用回归方程对因变量 Y 的值进行估计。其方法通常有两种：即点预测和区间预测。下面我们仅介绍点预测及一些有关概念，而将区间预测的内容放在第九章进行讨论。

假定 Y 与 X 的回归方程为

$$\hat{Y}=\hat{a}+\hat{b}X$$

已知 X 的一特定值 X_0，利用上述回归方程求得 Y_0 的估计值

$$\hat{Y}_0=\hat{a}+\hat{b}X_0$$

$\hat{Y}_0$ 就是 Y_0 的点预测值，这是对 Y_0 的单个值进行预测。

例：某个城市人均收入（记为 X 元）与耐用消费品销售额（记为 Y 万元）之间的回归方程为

$$\hat{Y}=-1.133+0.24X$$

假定 1992 年人均收入为 1500 元，耐用消费品销售额的预测值为

$$\hat{Y}=-1.133+0.24\times1500=358.867(\text{万元})$$

利用回归方程进行点预测，所得的预测值 $\hat{Y}_0$ 与真值 Y_0 会有一定的误差，这是由于一方面回归方程的系数 $\hat{a}$,$\hat{b}$ 是由样本观测值求得的，这自然就会受到抽样误差的影响。因而，直接影响着预测值，另一方面在进行上述预测时，已假设模型中的随机项 ε 取得

了它的零均值，但实际上它是不等于零的。这就是点预测的不足之处。

记 $$e_0 = \hat{Y}_0 - Y_0$$

e_0 是预测值 $\hat{Y}_0$ 与直实值 Y_0 之差，称为预测误差。注意，e_0 为一随机变量。可以证明 e_0 服从零均值，方差为

$$\sigma_0^2 = De_0 = \sigma^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}\right]$$

的正态分布。即

$$e_0 \sim N(0, \sigma_0^2)$$

从 e_0 的表达式及其所服从的分布，我们可以看出影响预测误差的常见因素有：

1. *抽样误差*　因为 $\hat{a}, \hat{b}$ 是通过样本得到的，因此抽样时引起的误差自然会影响 $\hat{a}, \hat{b}$ 的值，进一步影响 $\hat{Y}_0$，从而对 e_0 产生影响。

2. *样本容量*　由 e_0 的方差 σ_0^2 的表达式可以看出：n 越小，σ_0^2 就越大，即预测误差的波动越大，预测就不够准确；反之 n 越大，σ_0^2 就越小，预测的精确度就越高。

3. *X_0 与 $\overline{X}$ 的偏离程度*　由 σ_0^2 的表达式可知，X_0 与 $\overline{X}$ 越接近，σ_0^2 就越小。即解释变量在预测期内越接近样本观测值的平均值，预测就越可靠。

e_0 的方差 σ_0^2 反映了预测误差的波动情况，因此人们在实际中常常需要了解这个量的大小。在前面，我们已经知道 $S^2 = \sum e_i^2/(n-2)$ 是 σ^2 的无偏估计。故 σ_0^2 的一个估计可由下式给出

$$\sigma_0^2 = De_0 = S^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}\right]$$

§1.3 多元线性回归模型

一、多元线性回归模型的数学模型

设随机变量 Y 与一组(k 个)变量 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 有关系式

$$Y = b_0 + b_1X_{1i} + \cdots + b_kX_{ki} + \varepsilon_i \tag{1.8}$$

与一元线性回归情形类似,在多元场合,我们对模型(1.8)也作一些假定:

① $E\varepsilon_i = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$

② $D\varepsilon_i = E\varepsilon_i^2 = \sigma^2 \qquad i = 1,2,\cdots,n$

③ $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0 \qquad i \neq j, \quad i,j = 1,2,\cdots,n$

④ $\mathrm{Cov}(X_{ji},\varepsilon_i) = 0 \qquad j = 1,2,\cdots,k \qquad i = 1,2,\cdots,n$。

即解释变量 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 皆与随机项不相关。

⑤ 解释变量 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 之间不线性相关。

进一步可假定 ε_i 服从正态分布,$\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$。

二、参数的普通最小二乘法估计量($OLSE$)

对于模型(1.8),记

$$Q = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - b_0 - b_1X_{1i} - \cdots - b_kX_{ki})^2$$

则 Q 是关于 $b_0,b_1,\cdots,b_k$ 的多元函数,用 OLS 方法求估计量的思想是,若存在 $\hat{b}_0,\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_k$,使得 $Q(\hat{b}_0,\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_k)$ 达到最小,则 $\hat{b}_0,\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_k$ 就是参数 $b_0,b_1,\cdots,b_k$ 的最小二乘估计量。由此知要求 $b_0,b_1,\cdots,b_k$ 的 OLS 估计量,即是要求多元函数 Q 的最小值点。

令 $\dfrac{\partial Q}{\partial b_j} = 0 \qquad j = 1,2,\cdots,k$ 得

$$\begin{cases} -2\sum_i (Y_i - b_0 - b_1X_{1i} - \cdots - b_kX_{ki}) = 0 \\ -2\sum_i (Y_i - b_0 - b_1X_{1i} - \cdots - b_kX_{ki})X_{1i} = 0 \\ \quad \cdots\cdots \\ -2\sum_i (Y_i - b_0 - b_1X_{1i} - \cdots - b_kX_{ki})X_{ki} = 0 \end{cases}$$

整理得：

$$\begin{cases} nb_0 + b_1\sum_i X_{1i} + \cdots + b_k\sum_i X_{ki} = \sum_i Y_i \\ b_0\sum_i X_{1i} + b_1\sum_i X_{1i}^2 + \cdots + b_k\sum_i X_{1i}X_{ki} = \sum_i X_{1i}Y_i \\ \quad \cdots\cdots \\ b_0\sum_i X_{ki} + b_1\sum_i X_{1i}X_{ki} + \cdots + b_k\sum_i X_{ki}^2 = \sum_i X_{ki}Y_i \end{cases}$$

由第一个式子得

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X}_1 - \cdots - b_k\overline{X}_k$$

代入后面 k 个方程，得知 $\hat{b}_1, \cdots, \hat{b}_k$ 是下面方程组的解

$$\begin{cases} l_{11}\hat{b}_1 + l_{12}\hat{b}_2 + \cdots + l_{1k}\hat{b}_k = l_{1Y} \\ l_{21}\hat{b}_1 + l_{22}\hat{b}_2 + \cdots + l_{2k}\hat{b}_k = l_{2Y} \\ \quad \cdots\cdots \\ l_{k1}\hat{b}_1 + l_{k2}\hat{b}_2 + \cdots + l_{kk}\hat{b}_k = l_{kY} \end{cases}$$

其中
$$\begin{cases} l_{ts} = l_{st} = \sum_{i=1}^{n} (X_{ti} - \overline{X}_t)(X_{si} - \overline{X}_s) \\ l_{tY} = \sum_{i=1}^{n} (X_{ti} - \overline{X}_t)(Y_i - \overline{Y}) \qquad\qquad t, s = 1, 2, \cdots, k \\ \overline{X}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ti} \end{cases}$$

由以上方程组解出 $\hat{b}_1, \cdots, \hat{b}_k$ 后，再由下式求得 $\hat{b}_0$

$$b_0 = \overline{Y} - \hat{b}_1\overline{X}_1 - \cdots - \hat{b}_k\overline{X}_k$$

特别在二元情形(即 $k = 2$) 时

由 $\begin{cases} l_{11}\hat{b}_1 + l_{12}\hat{b}_2 = l_{1Y} \\ l_{21}\hat{b}_1 + l_{22}\hat{b}_2 = l_{2Y} \end{cases}$

得 $\hat{b}_1 = \dfrac{l_{1Y}l_{22} - l_{2Y}l_{12}}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2}$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\overline{X}_1)(Y_i-\overline{Y})\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\overline{X}_2)^2 - \sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\overline{X}_2)(Y_i-\overline{Y})\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\overline{X}_1)(X_{2i}-\overline{X}_2)}{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\overline{X}_1)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\overline{X}_2)^2 - [\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\overline{X}_1)(X_{2i}-\overline{X}_2)]^2}$$

同理 $\hat{b}_2 = \dfrac{l_{2Y}l_{11} - l_{1Y}l_{21}}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2}$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\overline{X}_2)(Y_i-\overline{Y})\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\overline{X}_1)^2 - \sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\overline{X}_1)(Y_i-\overline{Y})\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\overline{X}_2)(X_{1i}-\overline{X}_1)}{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\overline{X}_1)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-\overline{X}_2)^2 - [\sum_{i=1}^{n}(X_{1i}-\overline{X}_1)(X_{2i}-\overline{X}_2)]^2}$$

求出 $\hat{b}_1, \hat{b}_2$ 后，可由 $\hat{b}_0 = \overline{Y} - \hat{b}_1\overline{X}_1 - \hat{b}_2\overline{X}_2$ 得 $\hat{b}_0$。

和一元情形类似，在满足前一节中五条假定的情况下，这里得到的 *OLS* 估计量也具有线性、无偏性和最小方差性等优良性质。

三、显著性检验

在多元情形，显著性检验一般包括两个方面的内容：其一是整个方程的显著性，也就是变量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 作为一个整体 与 Y 之间是否有显著的线性关系；其二是检验每一个变量 X_i 是否分别对 Y 有显著的影响。由于这部分的内容在第二章中要涉及到，故这里不再进行讨论。

思考与练习

1. 一元或多元线性回归模型的基本假设分别有哪些？这些假设为什么是必要的？

2. 区别下面两个概念：