全国硕士研究生入学考试复习指导专用丛书

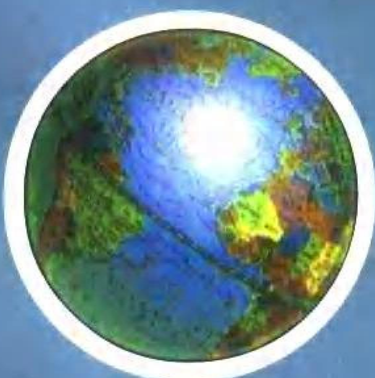
最新版

全国硕士研究生入学统一考试

历年试题名家解析及预测

经济数学四

刘斌 编



24.0-44
4

中国物资出版社

图书在版编目（CIP）数据

全国硕士研究生入学统一考试历年经济数学四试题名家解析及预测/刘斌编. －北京：中国物资出版社，1999.3

ISBN 7－5047－1560－3

Ⅰ.全… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－试题－研究 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 05321 号

责任编辑：李晓春
封面设计：修志平

中国物资出版社出版发行
新华书店经销
北京兴华印刷厂印刷
开本：787×1092mm 1/16 印张：9. 56 字数：245 千字
1999 年 3 月第 1 版 1999 年 3 月第 1 次印刷
书号：ISBN 7－5047－1560－3/G·0338
印数：0001－3000 册
共 7 册 定价：105.00 元（每册 15.00 元）

前　言

自从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学数学考试实行统一考试以来，至今已有13年，共命制试卷近100份，约2000道试题，其中正式使用过的试卷62份，试题约1300余道。这些试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，展示出统考以来数学考试的全貌，又蕴涵着教师在《数学考试大纲》要求下的命题思想，是广大考生和教师了解、研究、分析研究生入学数学考试的最直接、最宝贵的第一手资料。

鉴于研究生入学统一考试已超过10届，所以很难保证每年的试题都是最新编制的。事实上，近几年的考题都与往年的试题有相当一部分是雷同的。比如，以今年的考题为例，1999年数学一的第三大题与1995年数学一的第三大题第(1)小题，1999年数学一填空题第(2)小题与1998年选择题第(1)小题，1999年数学一选择题第(3)小题与1989年选择题第(4)小题，1999年数学二第十二大题与1991年数学一第七大题，1999年数学三填空题第(1)小题与1994年数学四第五大题，1999年数学三、四选择题第(2)小题与1997年数学三、四填空题第(2)小题，1999年数学三第九大题与1997年数学一第七大题第(2)小题，1999年数学四第九大题与1994年数学三第十大题等等都是非常相似或相近的，且解题思路几乎完全一样，可见仅在1999年的考题中就有多达10余道题是与往届考题雷同的，考生若把这些历年试题全部消化巩固，将为考研成功打下坚实的基础。正因为如此，广大准备考研的同学和数学教师都迫切希望有一套完整的历年考试资料作为参考，共享这些优秀的数学试题。编者多年来一直在做这方面的收集、整理工作，现在出版的这本书相信能满足大家的要求。

本书具有资料完整、分析详细、解剖思路和提练技巧的特点。首先汇集了1987—1999年共13年的历届研究生入学数学考试试题，其次真正做到了逐题解析，特别是填空题和选择题均给出了详细的解答过程，另外还对命题思路、解题的重点难点进行了解剖，并注重解题思路和规律的分析总结与方法技巧的提练，最后对命题动态趋势作出预测。

本书可作为报考硕士研究生的考生的参考书，也是在校大学生和从事数学课程教学的教师的一本有价值的参考书。

尽管编者有过多年从事“考研”数学辅导班的教学实践，但由于水平有限，加之时间仓促，书中难免有不当或谬误之处，恳请读者批评指正。

编者

1999年3月于北京

目　录

注：1987—1996 年数学四为原数学五.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

一、1987 年经济数学四试题及解析

1987 年经济数学四试题

一、判断是非题(本大题共 5 个小题,每小题 2 分,满分 10 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}=\infty$.　　(　　)

(2) 若 $f(x)$在$(a、b)$内严格单调增加,则 $x\in(a,b)$时,总有 $f'(x)>0$.　　(　　)

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4\sin x\,\mathrm{d}x=0$.　　(　　)

(4) 设 A 为 n 阶方阵,k 为常数,则$|kA|=k|A|$.　　(　　)

(5) 连续型随机变量取任何给定值的概率均为 0.　　(　　)

二、选择题(本大题共 5 个小题,每题 2 分,满分 10 分)

(1) 下列函数在其定义域内连续的是

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x}$,　　(B) $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\leqslant 0,\\ \cos x, x>0.\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, x<0,\\ 0, x=0,\\ x-1, x>0.\end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|}, x\neq 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$　　[　　]

(2) 若 $f(x)$在(a,b)内可导且 $a<x_1<x_2<b$,则至少存在一点 ζ,使得

(A) $f(b)-f(a)=f'(\zeta)(b-a),(a<\zeta<b)$.

(B) $f(b)-f(x_1)=f'(\zeta)(b-x_1),(x_1<\zeta<b)$.

(C) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\zeta)(x_2-x_1),(x_1<\zeta<x_2)$.

(D) $f(x_2)-f(a)=f'(\zeta)(x_2-a),(a<\zeta<x_2)$.　　[　　]

(3) 下列广义积分收敛的是

(A) $\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$.

(C) $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x$.　　[　　]

(4)设 n 阶方阵A 的秩$A<n$,则在 A 的n 个行向量中

(A) 必有 r 个行向量线性无关.

(B) 任意 r 个行向量均可构成极大无关组.

(C) 任意 r 个行向量均线性无关.

(D) 任一个行向量均可由其他 r 个行向量线性表示.　　[　　]

(5) 设 A、B 为两事件,则 $P(A-B)$等于

(A) $P(A)-P(B)$.　　(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$.

(C) $P(A)-P(AB)$.　　(D) $P(A)+P(B)-P(AB)$.　　[　　]

三、(本题满分 4 分)

设 $y=\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$,求 y'

四、(本题满分 4 分)

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\text{arc tan}\,\frac{1}{x}}$

五、(本题满分 4 分)

求 $\int\frac{x}{x^4+2x^2+5}\mathrm{d}x$

六、(本题满分 4 分)

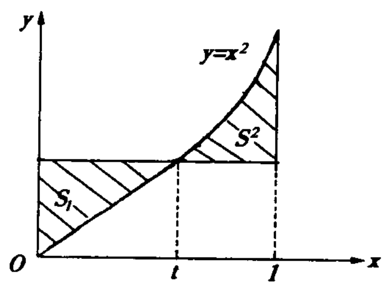
求 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$

七、(本题满分 8 分)

设总成本 C 关于产量 x 的函数为 $C(x)=400+3x+\frac{1}{2}x^2$,需求量 x 关于价格 P 的函数为 $P=\frac{100}{\sqrt{x}}$,求:(1)边际成本,(2)边际收益,(3)边际利润,(4)收益对价格的弹性.

八、(本题满分 10 分)

设 $y=x^2$,$x\in[0,1]$,问:t 取何值,图中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 S 最小?最大?



九、(本题满分 4 分)

设 $z=\text{arc tan}\,\frac{x+y}{x-y}$,求 $\mathrm{d}z$.

十、(本题满分 5 分)

设 D 是由曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=x$ 在第一象限内围成的封闭区域,求 $\iint\limits_D e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

十一、(本题满分 7 分)

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$,且 $AB=A+2B$,求矩阵 B.

十二、(本题满分 8 分)

解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4\\ x_1+x_3-x_4=-3\\ 3x_1+x_2+x_3=1\\ 7x_1+7x_3-3x_4=3\end{cases}$$

十三、(本题满分 6 分)

求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 的实特征值与对应的特征向量.

十四、(本题满分 8 分)

设两箱内装有同种零件,第一箱装 50 件,有 10 件一等品,第二箱装 30 件,有 18 件一等品,先从两箱中任挑一箱,再从此箱中前、后不放回地任取两个零件,求:(1)先取出的零件是一等品的概率 p;(2)在先取的是一等品的条件下,后取的仍是一等品的条件概率 q.

十五、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 概率分布为 $P(X=1)=0.2,P(X=2)=0.3,P(X=3)=0.5$,(1)写出其分布函数;(2)求 X 的期望与方差.

1987 年经济数学四试题解析

一、判断是非题

(1) 非.

[解析] $\because$ 当 $x \to 0^-$ 时,$\frac{1}{x} \to -\infty$,故 $e^{\frac{1}{x}} \to 0$;当 $x \to 0^+$ 时,$\frac{1}{x} \to +\infty$,故 $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$.

因此 $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$不存在,也非无穷大量.

(2) 非.

[解析] 例如 $f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内严格单调增加,但 $f'(x)=3x^2$,$f'(0)=0$.

(3) 是.

[解析] 由于 $f(x)=x^4\sin x$ 为奇函数且积分区间为对称区间,故$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x \mathrm{d}x = 0$.

(4) 非.

[解析]

$$|kA| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k^n |A|$$

(5) 是.

[解析] 设连续型随机变量 $X \sim f(x)$,则由定义 $p\{X \leqslant x_0\} = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x$,于是 $p\{X = x_0\} = p\{x_0 \leqslant X \leqslant x_0\} = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

二、选择题

(1) 应选(A).

[解析] (A)中 $f(x)$的定义域为 $x \neq 0$,由初等函数在其定义区间上的连续性知,$f(x) = \frac{1}{x}$在其定义域内连续,所以应选(A).

(B)、(C)、(D)中三个函数的定义域均为$(-\infty,+\infty)$,但在 $x=0$ 处均不连续.

(2) 应选(C).

[解析] 由题设 $f(x)$在闭区间$[x_1,x_2]$上连续,开区间(x_1,x_2)内可导,满足拉格朗日中值定理的条件,故存在 $\zeta \in (x_1,x_2)$,使得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\zeta)(x_2-x_1)$,所以(C)为正确选项.

(A)中 $f(x)$在$[a,b]$上不一定连续;(B)中 $f(x)$在$[x_1,b]$(特别 $x=b$)上不一定连续;

(D)中 $f(x)$在$[a,x_2]$(特别 $x=a$)上也不一定连续,均不满足拉格朗日中值定理的条件,因此(A)、(B)、(D)均不一定成立.

(3) 应选(C).

[解析] 令 $\ln x=t$,则(A)、(B)、(C)、(D)四个答案分别转化为(A)$\int_1^{+\infty} t\mathrm{d}t$,(B)$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$,(C)$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,(D)$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t$.根据广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}t$ 的敛散性判别结果知,只有(C)中广义积分是收敛的.

(4) 应选(A).

[解析] 由定义知,秩$(A)=r$,则 A 的n 个行向量组的秩也为r,即行向量组的极大无关组所含向量的个数为 r,从而必有 r 个行向量线性无关,所以应选(A).

(5) 应选(C).

[解析] 由于 $P(A-B)=P(A\bar{B})$,而 $A\bar{B}+AB=A$,且 $A\bar{B}$ 与 AB 互不相容,于是有 $P(A\bar{B})+P(AB)=P(A)$,即 $P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$.

三、

[解析] 先有理化,再利用对数性质化简后求导.

$y=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2}=2\ln(\sqrt{1+x^2}-1)-2\ln x$,于是 $y'=\frac{2}{\sqrt{1+x^2}-1}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-\frac{2}{x}=\frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$.

四、

[解析] 对于 $x\to+\infty$(或$-\infty$)的情形,若函数表达式中含有$\frac{1}{x}$的项,先通过代换$\frac{1}{x}=t$,再求极限往往比较简便.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\arctan\frac{1}{x}}\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{\arctan x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x^2}}=1.$$

五、

[解析] $\int\frac{x\mathrm{d}}{x^4+2x^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x^2}{x^4+2x^2+5}\overset{x^2=t}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+5}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2+2^2}$

$=\frac{1}{4}\arctan\frac{t+1}{2}+c=\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2+1}{2}+c$.

六、

[解析] 令$\sqrt{2x-1}=t$,$x=\frac{1}{2}(t^2+1)$,则

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}t=\int_0^1 e^t\cdot t\mathrm{d}t=\int_0^1 t\mathrm{d}e^t=te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t\mathrm{d}t$$

$$=e-e^t\big|_0^1=1.$$

七、

[解析] 先求出成本函数、收益函数、利润函数，然后分别求导，即得相应的边际成本，边际收益、边际利润.

(1)成本函数为 $C(x)=400+3x+\frac{1}{2}x^2$，所以边际成本 $C'(x)=3+x$，

(2)收益函数为 $R(x)=Px=\frac{100}{\sqrt{x}}\cdot x=100\sqrt{x}$，所以边际收益为 $R'(x)=\frac{50}{\sqrt{x}}$，

(3)利润函数为 $L(x)=R(x)-C(x)$，所以边际利润为

$$L'(x)=R'(x)-C'(x)=\frac{50}{\sqrt{x}}-x-3,$$

(4)由 $P=\frac{100}{\sqrt{x}}$，解得 $x=\frac{10000}{P^2}$，所以 $R(P)=\frac{10000}{P}$，于是收益对价格的弹性为 $\varepsilon=P\frac{R'(P)}{R(P)}=-1$.

八、

[解析] 根据定积分的几何意义知，

$$\begin{aligned}S(t)&=S_1(t)+S_2(t)=\int_0^t(t^2-x^2)\mathrm{d}x+\int_t^1(x^2-t^2)\mathrm{d}t\\&=(t^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^t+(\frac{1}{3}x^3-t^2x)\Big|_t^1\\&=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

令 $S'(t)=4t^2-2t=2t(2t-1)=0$，得 $t=0$，或 $t=\frac{1}{2}$，在闭区间$[0,1]$上，有 $S(0)=\frac{1}{3}$，$S(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，$S(1)=\frac{5}{3}$，可知当 $t=\frac{1}{2}$时，S 取最小值；当 $t=1$ 时，S 取最大值.

九、

[解析] 只需先求出$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$后用公式$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ 即可.

$$\because\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{x+y}{x-y})^2}\cdot\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot 1}{(x-y)^2}=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{x+y}{x-y})^2}\cdot\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\therefore\quad dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{1}{x^2+y^2}(-ydx+xdy).$$

十、

[解析] 被积函数只含有变量 x，应先定 x 后定y，即先对 y 积分后对x 积分.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\iint_D e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^3}^{x} e^{x^2}\mathrm{d}y = \int_0^1 (xe^{x^2} - x^3e^{x^2})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}e^{x^2} = \frac{1}{2}e - 1.$$

十一、

[解析] 先化简,由等式 $AB = A + 2B$ 知 $(A-2E)B = A$,又 $|A-2E| \neq 0$,所以 $B = (A-2E)^{-1}A$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

十二、

[解析] 化增广矩阵为阶梯形

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

对应同解方程组为 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 - 2x_3 = -8 \\ x_4 = 6, \end{cases}$

取 x_3 为自由未知量,得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

十三、

[解析] 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & -4 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+5) = 0$ 得实特征值为 $\lambda = 1$.

解齐次线性方程组

$$(\lambda E - A)X = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

得基础解系为 $\alpha=(0,2,1)^T$,所以 A 的属于实特征值 $\lambda=1$ 的特征向量为 $k(0,2,1)^T$ ($k\neq0$ 为任意常数).

十四、

[解析] 引进下列事件:

$H_i=\{$被挑出的是第 i 箱$\}$ $(i=1,2)$;

$A_j=\{$第 j 次取出的零件是一等品$\}$ $(j=1,2)$.

由题设知 $P(H_1)=P(H_2)=\dfrac{1}{2},P(A_1|H_1)=\dfrac{1}{5},P(A_1|H_2)=\dfrac{3}{5}$,

(1)由全概率公式知

$$p=P(A_1)=P(H_1)P(A_1|H_1)+P(H_2)P(A_1|H_2)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}.$$

(2)由条件概率的定义和全概率公式,知

$$q=P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{1}{P(A_1)}\{P(H_1)P(A_1A_2|H_1)+P(H_2)P(A_1A_2|H_2)\}$$
$$=\frac{5}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{10\times9}{50\times49}+\frac{1}{2}\cdot\frac{18\times17}{30\times29}\right]=0.48557\cdots.$$

十五、

[解析] 分布函数 $F(x)=P(X\leqslant x)$,对 x 分段讨论即可.计算方差一般采用公式 $DX=EX^2-(EX)^2$.

(1)由题设知,当 $x<1$ 时,$F(x)=P(X\leqslant x)=0$,

当 $1\leqslant x<2$ 时,$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=1)=0.2$,

当 $2\leqslant x<3$ 时,$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=1)+P(X=2)=0.5$,

当 $x\geqslant3$ 时,$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0.2+0.3+0.5=1$.

故 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0,x<1,\\0.2,1\leqslant x<2,\\0.5,2\leqslant x<3,\\1,x\geqslant3.\end{cases}$$

(2)由于 $EX=\sum\limits_{i=1}^{3}x_iP_i=1\times0.2+2\times0.3+3\times0.5=2.3$,

$$EX^2=\sum_{i=1}^{3}x_i^2P_i=1^2\times0.2+2^2\times0.3+3^2\times0.5=5.9,$$

所以 $DX=EX^2-(EX)^2=5.9-(2.3)^2=0.61$.

二、1988 年经济数学四试题及解析

1988 年经济数学四试题

一、判断是非题(本大题共 5 个小题,每小题 2 分,满分 10 分)

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$ 均存在,则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 必存在.　(　　)

(2) 若函数 $f(x)$ 的极值点是 x_0,则必有 $f'(x_0)=0$.　(　　)

(3) 对任意实数 a,等式 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x$ 总成立.　(　　)

(4) 若 A 与 B 均为 n 阶非零方阵,且 $AB=0$,则秩 $r(A)<n$.　(　　)

(5) 若事件 A、B、C 满足等式 $A+C=B+C$,则 $A=B$.　(　　)

二、填空题

(1) 设 $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$, $-\infty<x<+\infty$,则①$f'(x)=$ ________,②$f(x)$ 的单调性是________,③奇偶性是________,④其图形的拐点是________,⑤凹凸区间是________,⑥水平渐近线是________.

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ ________.

(3) 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,则 $A^{-1}=$ ________.

(4) 设 $P(A)=0.4$, $P(A+B)=0.7$,若事件 A 与 B 互斥,则 $P(B)=$ ________;若事件 A 与 B 独立,则 $P(B)=$ ________.

三、(本题满分 6 分)

若 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1, \\ ax+b, & x>1, \end{cases}$ 处处可导,求 a,b 的值.

四、(本题满分 4 分)

求 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x$

五、(本题满分 8 分)

将长为 a 的一段铁丝截成两段，用一段围成正方形，另一段围成圆，为使正方形与圆的面积之和最小，问两段铁丝的长各为多少？

六、(本题满分 4 分)

求 $\int_0^3 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$

七、(本题满分 4 分)

设 $u=e^{\frac{x}{y}}$，求$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

八、(本题满分 4 分)

求 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{x}dx$

九、(本题满分 8 分)

过曲线 $y=x^2(x\geqslant 0)$上某点 A 作一切线，使之与曲线及 x 轴围成图形的面积为$\frac{1}{12}$，求：(1)切点 A 的坐标；(2)过切点 A 的切线方程；(3)由上述图形绕 x 轴旋转成的旋转体体积 V.

十、(本题满分 6 分)

设 n 阶方阵 A 满足矩阵方程 $A^2-3A-2E=0$(A 是给定的，E 是 n 阶单位阵)，求证：A 可逆，并求其逆.

十一、(本题满分 7 分)

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$线性无关，且 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s,\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$，讨论向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性相关性.

十二、(本题满分 8 分)

已知线性方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\x_1+3x_2+6x_3+x_4=3\\3x_1-x_2-k_1x_3+15x_4=3\\x_1-5x_2-10x_3+12x_4=k_2\end{cases}$$

问 k_1 与 k_2 各取何值，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？有无穷多解时，求其一般解.

十三、设玻璃杯整箱出售，每箱 20 只，各箱含 0,1,2 只残次品的概率分别为 0.8,0.1,0.1，一顾客欲购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，经顾客开箱随机察看 4 只，若无残次品，则买此箱玻璃杯，否则不买。求：(1)顾客买此箱玻璃杯的概率 α；(2)在顾客买此箱玻璃杯中，确实没残次品的概率 β.

十四、(本题满分 5 分)

设随机变量 X 在区间(1,2)上服从均匀分布，求 $Y=e^{2X}$的概率密度 $f(y)$.

十五、(本题满分 7 分)

设十只同种电器元件中有两只废品,装配仪器时,从这批元件中任取一只,若是废品,则扔掉重新任取一只,若仍是废品,则再仍掉还取一只,求:在取到正品之前,已取出的废品数 X 的概率分布,数学期望及方差.

1988 年经济数学四试题解析

一、判断是非题

(1) 非.

[解析] 可举反例说明.例如$\lim\limits_{x\to 0}x=0$,$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$,即$\lim\limits_{x\to 0}x$与$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$均存在,但$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

(2) 非.

[解析] 用反例说明.例如$f(x)=|x|$,在$x=0$点取极小值,但$f'(0)$不存在,更谈不上$f'(0)=0$.

(3) 非.

[解析] 由于$\displaystyle\int_0^a f(x-a)\mathrm{d}x \xlongequal{a-x=t} \int_a^0 f(t)(-\mathrm{d}t)=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

故$\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x$不一定成立.

(4) 是.

[解析] 可用反证法.若秩$r(A)=n$,即A可逆,则

$A^{-1}AB=A^{-1}0$,即$B=0$,这与题设矛盾,所以必有秩$r(A)<n$.

(5) 非.

[解析] 可举反例说明.例如$A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,2,4\}$,$C=\{2,3,4\}$.则$A+C=\{1,2,3,4\}$,$B+C=\{1,2,3,4\}$,即$A+C=B+C$,但$A\neq B$.

二、填空题

(1) ①$e^{-\frac{1}{2}x^2}$,②单调增加,③奇函数,④$(0,0)$,⑤$x<0$时,曲线是凹的;$x>0$时,曲线是凸的,⑥$y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$,$y=-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

[解析] ① $f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\right]=e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

② 因为$f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}>0$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

③ 因为
$$f(-x)=\int_0^{-x}e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t \xlongequal{u=-t} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}(-u)^2}\mathrm{d}(-u)$$
$$=-\int_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u=-f(x).$$

④ 因为$x=0$时,$f''(x)=-xe^{-\frac{1}{2}x^2}=0$,且在$x=0$的左右两侧$f''(x)$变号,故$(0,f(0))=(0,0)$为拐点.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com