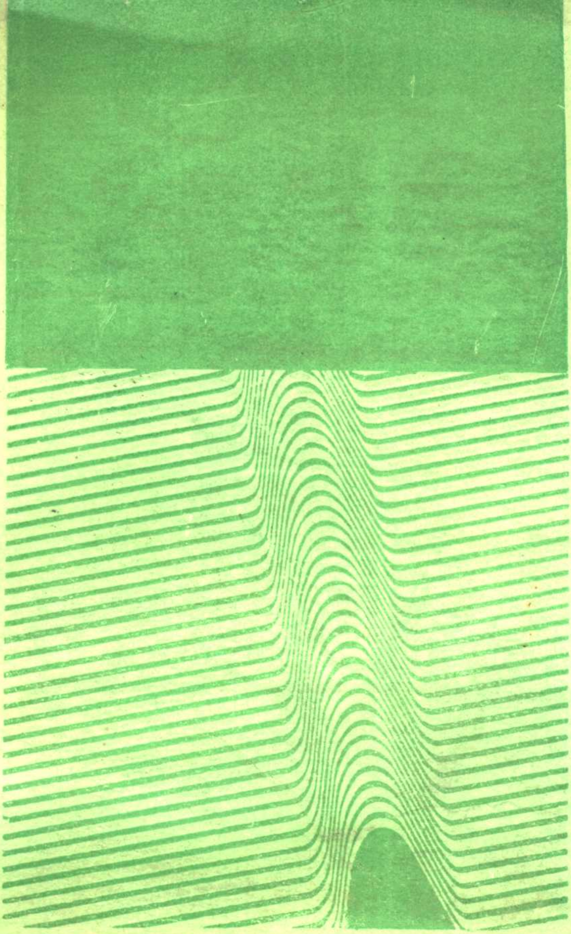
GDSXGDSX

GDSXGDSX



高等数学复习纲要与解题方法指导

汕头大学　陈锐深　编

北京航空航天大学出版社

高等数学复习纲要与解题方法指导

汕头大学　陈锐深　编

北京航空航天大学出版社

（京）新登字166号

内 容 简 介

本书是根据国家教委1987年颁布的“高等工业学校数学课程教学基本要求”编写的，也是编者多年教学工作的结晶。

全书对“高等数学”的内容进行了归纳和总结，指出了常用的解题方法、技巧和经验，着重加强“三基”的训练，并尽可能给出较多的方法和解题技巧，同时还借助于一系列新颖有效的解法，开阔学习的思路，提高解题的能力，纠正常见的错误。

读者主要对象是：理（非数学专业）工科院校及成人高校学生，高等教育自学考生以及报考工科院校研究生的广大读者。

高等数学复习纲要与解题方法指导

GAODENG SHUXUE FUXI GANGYAO

YU JIETI FANGFA ZHIDDAO

汕头大学　陈锐深　编

责任编辑　郭维烈

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行　各地新华书店经销

北京农业工程大学印刷厂印装

850×1168　1/32　印张：10.5　字数：282 千字

1992年8月第一版　1992年8月第一次印刷　印数：8000册

ISBN 7-81012-319-X/O·021　定价：6.00元

前　言

本书的前身是自编的同名讲义《高等数学复习纲要与解题方法指导》，曾在学校里使用多遍。以后，根据国家教委1987年颁布的“高等工业学校数学课程教学基本要求”进行修改。利用在教学过程中所积累的资料，对内容作了比较系统的总结和概括，并参考历届工科硕士研究生入学试题选编而成的，仍按微积分学的一般顺序，分章节编写，但在阐述某一章节的问题时，往往涉及其它章节的内容，每章节有三方面内容：内容提要、例题、练习题。提要部分对内容作了简要概述，相当于该章节的小结，例题部分着重在加强基本概念、基本理论和基本方法的训练；对一些基本概念作了横向和纵向的比较；对解题的基本方法，则按问题类型作了归纳和总结，并带有相当的技巧性和综合性，以帮助读者提高解决各类问题的能力。另外，每章还配有练习题，供读者练习，以加强理解、巩固所学的知识。书末还附有练习题的答案。

本书可作为理（非数学专业）工科院校高等数学课程的教学参考书、学习指导书和习题课的辅助教材，可供报考研究生的同学们参考，也可作为电视大学、夜大学、函授大学和自学高等数学的同志复习和练习用书。此外，对从事高等数学教学工作的老师也有一定的参考价值。

本书的缺点和错误，望请读者批评指正。

编　者

1991年于汕头大学

目　　录

第一章　函数、极限、连续

第二章　一元函数微分学

第三章　一元函数积分学

第四章　空间解析几何

第五章　多元函数微分学

第一章 函数、极限、连续

高等数学是研究函数的数学，内容包括一元及多元函数的微积分学、无穷级数和常微分方程。高等数学与初等数学不同，初等数学研究事物的静止状态，以常量为研究对象；高等数学研究事物的运动，以变量及函数为研究对象。由于研究对象不同，它们在研究方法上也有根本区别。初等数学用静止的观点研究问题；高等数学用运动的观点、辩证的观点研究问题。极限方法就是这种研究方法的具体表现；极限概念贯穿于高等数学的始终，所有重要的概念，如导数、定积分、重积分等，都是建立在极限概念的基础上。连续函数是最基本的一类函数，高等数学的主要概念是以连续函数为基础的。

本章的基本要求是理解函数的概念，了解函数的类型和性质；理解极限的概念；掌握求极限的方法；理解函数的连续及间断的概念；了解连续函数的性质。

§1 函 数

（一）内容提要

1． 函数的概念

若变量x在某一实数集合X中每取一个值，变量y按照一定的规则总有一个确定的值与它对应，则称变量y为变量x的函数，记为

$$y=f(x).$$

集合X（即自变量的取值范围）称为函数的定义域；因变量y相应的取值范围，叫函数的值域。对应于$x=x_0$，相应的y所取的确定的值$y_0=f(x_0)$叫做函数在$x=x_0$处的函数值。

2． 初等函数

（1）基本初等函数 幂函数、指数函数、对数函数、三角函

数和反三角函数五种函数称为基本初等函数。

（2）初等函数　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤构成，且用一个解析式表示的函数称为初等函数。

3．分段函数

不能用一个解析式子表示的函数，即在自变量的不同变化范围内，用不同的解析式子表示的函数，称为分段函数。例如

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\geqslant 0\\ x, & x<0\end{cases};\quad \varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \pi\\ \pi-x, & x>\pi\end{cases}$$

注意：（1）分段函数是一个函数，并不是几个函数；（2）分段函数不是初等函数。

4．复合函数

设$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，且当 x 在某一范围内取值时，相应的u值可使y有意义，则称y是x的复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中u是中间变量，注意，在进行函数的复合时，函数$\varphi(x)$的值不能超过函数$y=f(u)$的定义域。

5．函数的性质

（1）函数的单值性与多值性　函数的自变量在其定义域内任取一个值时，若仅有一个函数值与之对应，则称为单值函数；若有两个或两个以上的函数值与之对应，则称为多值函数。

（2）函数的奇偶性　若 $f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；若$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数。

另外，在判断函数的奇偶性时，还可利用以下事实：

$$偶\pm偶=偶；\quad 奇\pm奇=奇；\quad 偶\overset{\times}{\underset{\div}{}}奇=奇；$$

$$偶\overset{\times}{\underset{\div}{}}偶=偶；\quad 奇\overset{\times}{\underset{\div}{}}奇=偶。$$

（以上运算均对两个不同函数而言）。而且，$f(x)+f(-x)$是偶函数，$f(x)-f(-x)$是奇函数，其中$f(x)$可以为任意函数。

偶函数的图形对称于y轴，奇函数的图形对称于坐标原点。

（3）函数的单调性　若函数$y=f(x)$在区间（a，b）内随x的增加而增加，即设x_1，x_2是（a，b）内任意两点，而$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数在区间（a，b）内为单调增加。

若函数$y=f(x)$在区间（a，b）内随x增加而减少，即设x_1，x_2是（a，b）内任意两点，而$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$则称函数在区间（a，b）内为单调减少。

同样可以在无限区间上定义单调增加（或减少）的函数。

在整个区间上为单调增加（或减少）的函数称为单调函数。

（4）函数的有界性　对于函数$y=f(x)$，如果存在一个正数M，使当x取定义域内每个值时，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数$y=f(x)$为有界函数，否则称为无界函数。

（5）函数的周期性　若对函数$y=f(x)$，存在一个正数T，使得$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$是以T（T是满足这种关系的最小正数）为周期的周期函数。

如何判断一个函数$y=f(x)$是否为周期函数呢？若T为函数$y=f(x)$的周期，则对于任何x（定义域内的），都应有$f(x)=f(x+T)$，即

$$f(x)-f(x+T)=0 \qquad (1)$$

在（1）式中，将T看作未知量求解，若解出的T依赖于自变量x或零，则$f(x)$不是周期函数；若可以求出不依赖于x的非零常数解（一般地都不唯一），其中最小的正数解就是所求的周期。

（二）例　题

例1.1　求函数$y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-1}$的定义域。

解　使得函数式有定义，必须$x^2-1\neq0$及$4-x^2\geqslant0$，也即

$x^2\neq1$ 及 $x^2\leqslant4$，故此函数的定义域为三个区间：$[-2,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(1,\ 2]$之并。

例1.2 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ $g(x)=\dfrac{1}{x}$，求证

$$f[f(x)]=f(x),\ f[g(x)]=g[f(x)].$$

证 设 $f(z)=\begin{cases}1, & z>0\\ 0, & z=0\\ -1, & z<0\end{cases}$，又当 $x>0$，$z=f(x)=1>0$；当 $x=0$，$z=f(x)=0$；当 $x<0$，$z=f(x)=-1<0$，

$\therefore\quad f[f(x)]=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<1\end{cases}$，故 $f[f(x)]=f(x)$。

设 $u=g(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$

由于 $$g(u)=\frac{1}{u}，此时$$

当 $x>0$，$u=f(x)=1$，$g(u)=\dfrac{1}{u}=1$；当 $x<0$，$u=f(x)=-1$，$g(u)=\dfrac{1}{u}=-1$；当 $x=0$，$u=f(0)=0$，$g(u)$不存在。

$\therefore$ $$g[f(x)]=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

故 $$g[f(x)]=f[g(x)].$$

例1.3 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant0$，求 $\varphi(x)$，并写出它的定义域。

解 由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得

$$[\varphi(x)]^2=\ln(1-x)$$

$\therefore$ $$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$$

由$\ln(1-x)\geqslant 0$得$1-x\geqslant 1$，$x\leqslant 0$

$$\therefore\qquad \varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}\,,\quad x\leqslant 0.$$

例1.4　已知 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

解　由 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1=2-\sin^2\frac{x}{2}$，

$$\therefore\qquad f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2-2\cos^2\frac{x}{2}=1-\cos x.$$

例1.5 设$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试求$f\{\underbrace{f[f\cdots f(x)]\}}_{n层}$及$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

解　记$f_n(x)=f\{f[f\cdots f(x)]\}$，则

$$f_1(x)=\frac{x}{x-1},\quad f_2(x)=f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=x$$

于是，由数学归纳法可证明

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}, & 当n=2k-1\\ x, & 当n=2k\end{cases}\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

而　$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x-1}{x}$，从而

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}-1}=1-x.$$

在函数中，还有一种函数方程，即把整个函数作为某个方程中的一个未知量。它与代数方程不同，它所求的不是函数的某个特殊值，而是整个函数的形式。

例1.6　设$z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，并且已知当$y=1$时有$z=x$，试求函数$f(x)$及$z$的分析表达式。

解　以$y=1$时，$z=x$，代入z的表达式得

$$x-1=f(\sqrt[3]{x}-1)$$

设 $\sqrt[3]{x}-1=t$，则$x=(t+1)^3$代入上式得

$$f(t)=(1+t)^3-1=t^3+3t^2+3t$$

所以，$f(x)$及z的分析表达式分别为

$$f(x)=x^3+3x^2+3x$$

$$z=\sqrt{y}+x-1.$$

例1.7　求$f(t)=\sin(\omega t+\theta)$ 的周期（其中ω、θ为常数，$\omega>0$）。

解　$f(t+T)-f(t)=\sin[\omega(t+T)+\theta]-\sin(\omega t+\theta)$

$$=2\sin\frac{\omega T}{2}\cdot\cos\left(\omega t+\theta+\frac{\omega T}{2}\right)$$

若T为$f(t)$周期，则应有

$$f(t+T)-f(t)=0$$

从而

$$\sin\frac{\omega T}{2}=0 \qquad (*)$$

或

$$\cos\left(\omega t+\theta+\frac{\omega T}{2}\right)=0 \qquad (**)$$

(*) 的最小非零正数解为$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$；

(**) 的最小非零正数解为$\omega t+\theta+\dfrac{\omega T}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，

即

$$T=\frac{2\left[\frac{\pi}{2}-(\omega t+\theta)\right]}{\omega}$$

(**) 的解依赖于t，可见这个解不能作为周期。

所以，$f(t)=\sin(\omega t+\theta)$ 的周期是$\dfrac{2\pi}{\omega}$。

同理可求$\cos(\omega t+\theta)$的周期是$\frac{2\pi}{\omega}$，$\operatorname{tg}(\omega t+\theta)$和$\operatorname{ctg}(\omega t+\theta)$的周期是$\frac{\pi}{\omega}$。

例1.8　问$f(x)=\sin\frac{1}{x}$是否为周期函数?

解　$f(x+T)-f(x)=\sin\frac{1}{x+T}-\sin\frac{1}{x}$

$$=-2\sin\frac{T}{2x(x+T)}\cos\frac{2x+T}{2x(x+T)}$$

若T为周期，则应有

$$\sin\frac{T}{2x(x+T)}=0 \qquad (*)$$

或

$$\cos\frac{2x+T}{2x(x+T)}=0 \qquad (**)$$

显然不存在满足(*)、(**)两式的非零常数T，所以$f(x)=\sin\frac{1}{x}$不是周期函数。

例1.9　求证函数$f(x)=\frac{\lg x}{x}$分别在区间$\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$与$[1,+\infty)$上有界。

证　对于函数$f(x)=\frac{\lg x}{x}$，我们不能判断出它在$\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$与$[1,+\infty)$上是否单调。但是显然，$\lg x$与$x$分别在相应区间上单调递增，由此出发，我们仍可以讨论它的有界性。

若　$x\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$，则有

$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\quad 1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 2$$

又因为 $\lg\frac{1}{2}\leqslant\lg x\leqslant\lg 1=0$

$$\therefore \qquad 2\lg\frac{1}{2}\leqslant 2\lg x\leqslant\frac{\lg x}{x}\leqslant\lg x\leqslant 0$$

所以，$f(x)$在$\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$上有下界$2\lg\frac{1}{2}$及上界 0。

若$x\in[1,\ +\infty)$，$f(x)=\frac{\lg x}{x}$有下界是明显的，因为$\frac{\lg x}{x}\geqslant 0$，所以它的下界是 0。其次，对于任一$x\in[1,\ +\infty)$，必存在一个自然数$n$，使得$n\leqslant x\leqslant n+1$，因此有：

$$10^x\geqslant 10^n=(1+9)^n>1+9n>1+n>x,$$

所以 $\lg x<x$，即$\frac{\lg x}{x}<1$，故它的上界为1。从而有界性得证。

例1.10 设$\varphi(x)$，$\psi(x)$及$f(x)$为$(-\infty,\ +\infty)$上的单调增加函数，证明：若$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$，则

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].$$

证 设x_0为任一点，则

$$\varphi(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant\psi(x_0)$$

由 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$及函数的单调性知

$$f[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)]$$

$$\varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[\varphi(x_0)]$$

从而 $$\varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)].$$

同理可证 $$f[f(x_0)]\leqslant\psi[\psi(x_0)]$$

由x_0的任意性，于是有

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].$$

§2 极　　限

（一）内容提要

1．数列极限

设有数列 u_1，u_2，…，u_n，…。若对于任意指定的正数 ε，总存在一个正整数N，使得当$n>N$时，不等式

$$|u_n - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称数列u_1，u_2，…，u_n，… 以A为极限。记作

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \quad (\text{或} u_n \to A)。$$

若一个数列有一个有限实数作为它的极限，则称该数列是收敛的；否则称该数列是发散的，发散的情况有三种：(1) 极限不存在；(2) 极限是正无穷大，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$；(3) 极限为负无穷大，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$。

若数列收敛，则必有界，但反之未必成立。例如数列$\{(-1^n\}$有界而发散。

若数列为无穷大量，则必无界，但反之也未必成立。例如数列$\{[1+(-1)^n]^n\}$无界，但并不是无穷大量。

2. 函数极限

若对于任意指定的正数 ε，总存在一个正数δ，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

恒成立，则称当x趋于x_0时，$f(x)$以A为极限。记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \ (\text{或} f(x)\to A \quad (x\to x_0))。$$

函数$f(x)$在x_0处的左、右极限存在且相等，是函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充要条件。

数列极限，函数极限统称为变量的极限，在研究变量极限时，应当注意两点：一是要注意自变量的变化过程；二是要考察变量的变化趋势。

3. 极限存在准则

准则 I　若在点x_0的某个邻域内（点 x_0可除外），有

$$F(x) \leqslant f(x) \leqslant \Phi(x)$$

而且 $$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \Phi(x) = A$$

则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$。 这个准则也叫夹挤定理。

准则Ⅱ 如果数列$\{u_n\}$单调增加，以M为上界，则数列有极限，而且极限值不大于M。

如果数列$\{u_n\}$单调减少，有下界m，则此数列有极限，而且极限不小于m。

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$。

(2) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

显然，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, x}{x} = 1$， $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$，

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a$$

5. 无穷小和无穷小的比较

称变量$\alpha(x)$为无穷小量，如果$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$，或$\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$。

(1) 若$\lim f(x) = A$，则$f(x) = A + \alpha$，α为无穷小，反之，若$f(x) = A + \alpha$，则$\lim f(x) = A$。

(2) 设α、β是两个无穷小，若

$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记成$\beta = 0(\alpha)$；

$\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$ ($k > 0$)，就说β是关于α的k阶无穷小。特别，当$k = 1$，就说β与α是同阶无穷小，此时，若$c = 1$，又称这两个无穷小是等价的，记作$\alpha \sim \beta$。

设$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且$\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在。

则 $$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

（3）设两个无穷小α、β，如果 $\lim \frac{\beta-\alpha}{\beta}=0$，就说$\alpha$是$\beta$的主部，两个等价无穷小互为主部。

（4）与无穷小量相反的另一类变量是无穷大量，在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$为无穷大量，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小量；反之，若 $f(x)$ 为无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大量。

6．几种极限定义的比较见表1-1

（二）例　题

极限概念是高等数学中最基本而又重要的概念之一，分三个方面举例。

1．根据定义，证明极限

例2.1　试讨论数列1，q，q^2，…，q^n，…的极限，其中q为某一常数。

解　（1）先设 $|q|<1$，我们要证明 $q^n\to 0$，如果 $q=0$，这是显然的。所以设$q\neq 0$，要想 $|q^n| = |q|^n<\varepsilon$，只要$n\log|q|<\log\varepsilon$，由于 $|q|<1$，故$\log|q|<0$，于是上面不等式等价于$n>\frac{\log\varepsilon}{\log|q|}$，因此，当$n$满足这个不等式时，$|q^n|<\varepsilon$，这就证明了$q^n\to 0$。

（2）设 $|q|>1$，我们来证明$q^n\to\infty$，因为对于任意给定的$M>0$，当$n>\frac{\log M}{\log|q|}$时，显然 $|q^n|>M$，因此，$|q^n|\to+\infty$，即$q^n\to\infty$。

（3）设 $|q|=1$，当$q=1$时，$q^n=1$，所以，$q^n\to 1$，当 $q=-1$时，$q^n=(-1)^n$。极限不存在。

例2.2　证明　$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$.