高等微積分詳解

上 册 目 錄

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則徹底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

高等微積分詳解

上 册 目 錄

第一章

實數系及複數系

本章之目的爲從公理化的觀點，把平常熟悉的實數系與複數系做一簡潔、扼要的回顧。

一、實數系

存在一非空之集合，其上有“加”與“乘”二種運算，並有一“$<$”的次序關係，分別滿足體公設（field axiom）、次序公設（order axiom）與完備性公設（completeness axiom）。此集合卽稱爲實數系，並以R表示。在上述之公設中，體公設與次序公設均爲平常熟悉的實數性質（參考課本），而決定實數系特性的最重要公設爲完備性公設。

1.1 完備性公設（最小上界公設或連續性公設）：一非空之實數集S若有上界，則必有最小上界（supremum）。

1.2 定理 1.14：若S爲非空之實數集且有最小上界，設 $b=\sup S$. 則對任意 $a<b$，必存在 $x\in S$ 使得 $a<x\leqslant b$.

二、正整數系與整數系

實數系中最小之歸納集（inductive set）稱爲正整數集，以 Z^+ 表示。正整數之負值稱爲負整數。所有正整數、負整數與0所成之集合，稱爲整數系，以 Z 表示。

2.1 定理 1.9（唯一分解定理）：任何大於1之整數 n，可分解成質數之乘積。若不考慮分解之次序，則此種分解爲唯一。

2.2 定理 1.17：正整數集 Z^+ 無上界。

三、有理數系與無理數系

二整數之商 p/q，$q\neq 0$，稱爲有理數。有理數全體之集合，稱有理數系，以 Q 表示。不爲有理數之實數則稱爲無理數。例如 π 爲無理數（習題7-33）。

3.1 定理 1-10：若 n 爲正整數且不爲完全平方，則 $\sqrt{n}$ 爲無理數。

3.2 定理 1-11：若 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^2}{n!} + \cdots\cdots$，則 e 爲無理數。

四、實數之絕對值與不等式

4.1 定理 1-22（三角形不等式）：對任意實數 x 與 y 均有

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

4.2 定理 1-23（Cauchy-Schwarz 不等式）：若 $a_1, \cdots, a_n$ 與 $b_1, \cdots, b_n$ 爲任意實數，則

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

尤有進者，若存在某 $a_i \neq 0$，則等式成立之充要條件爲對 $k = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, n$，存在實數 x 使得 $a_k x + b_k = 0$.

注意：Cauchy-Schwarz 不等式之向量表示法爲

$$(a \cdot b)^2 \leqslant \|a\|^2 \|b\|^2,$$

其中 $a = (a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$，$b = (b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n)$ 且

$$a \cdot b = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

而 $\|a\| = (a \cdot a)^{\frac{1}{2}}$ 表示 a 之長度。

4.3 Minkowski 不等式（n 維空間中之三角形不等式）：若 $a_1, \cdots, a_n$ 與 $b_1, \cdots, b_n$ 爲任意實數，則

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

注意：Minkowski 不等式之向量表示法爲

$$\|a+b\| \leqslant \|a\| + \|b\|,$$

其中 $a = (a, \cdots\cdots\cdots, a_n)$，$b = (b_1, \cdots\cdots\cdots, b_n)$，

$$\|a\| = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

五、複數系

若x，y爲實數，則（x，y）稱爲複數，x爲此複數之實部，y稱爲其虛部。若以i表示（0，1），則

$$(x, y) = x + iy.$$

複數之全體以C表示。若$x = x_1 + ix_2$爲一複數，其絕對值以$|x|$表示，而

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

5.1 定理1-39（三角形不等式）：若x與y爲複數，則

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

5.2 複數的Cauchy-Schwarz不等式：若$a_1, \cdots, a_n$與$b_1, \cdots\cdots, b_n$爲複數則

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \right).$$

六、一些重要的函數

(i) 複數的自然指數函數（complex exponentials）：若$z = x + iy$，則定義

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

(ii) 複數的對數函數（complex logarithms）：設複數$z \neq 0$，若複數ω，滿足$e^{\omega} = z$，則稱ω爲z之對數（logarithm of z）。對固定的$z \neq 0$，其對數有無窮多個，彼此相差$2n\pi i$，其中一特殊之値

$$\omega = \log|z| + i \arg(z)$$

稱爲z之對數的主値（principal logarithm），並將此ω記爲

$$\omega = \mathrm{Log}\, z.$$

(iii) 複數的指數函數（comlex powers）：設$z \neq 0$，若ω爲任意之複數，定義

$$z^{\omega} = e^{\omega \mathrm{Log} z}.$$

(iv) 複數的三角函數（complex sines and cosines）：若z爲複數，則定義

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

習題詳解

1－1　試證無最大之質數存在。

〔證明〕　若存在最大之質數，令其爲 p_0，則所有質數之個數必爲有限，以 $\{p_0, p_1, \cdots\cdots, p_n\}$ 表示所有質數之集合。設

$$p = \prod_{k=0}^{n} p_k + 1$$

則對 $0 \leqslant k \leqslant n$ 均有 $p > p_k$，故 p 不爲質數。但是對任意之 k，$0 \leqslant k \leqslant n$，$p_k \nmid p$，因此 p 必爲質數，此爲矛盾。因此無最大之質數存在。

1－2　設 n 爲正整數，試證代數等式。

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

〔證明〕　$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

$$= a^n + \sum_{k=0}^{n-2} a^{k+1} b^{n-(k+1)} - \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} - b^n$$

$$= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} - \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} - b^n$$

$$= a^n - b^n.$$

1－3　若 $2^n - 1$ 爲質數，試證 n 爲質數。若 p 爲質數，則形如 $2^p - 1$ 之質數稱爲Mersenne 質數。

〔證明〕　設 n 不爲質數，則 n 有一因數 d，且 $1 < d < n$．若 c 爲一正整數使得 $n = cd$，則 $c > 1$，且

$$2^n - 1 = (2^d)^c - 1$$

$$= (2^d - 1) \sum_{k=0}^{c-1} (2^d)^k .$$

因 $d > 1$，且 $c > 1$，故 $2^d - 1 > 1$ 且 $\sum_{k=0}^{c-1} (2^d)^k > 1$. 因此若 n 不為質數則 $2^n - 1$ 亦不為質數，此與假設不合。故知 n 必為質數。

1－4　若 $2^n + 1$ 為質數，試證 n 為 2 之次方。若 m 為正整數，則形如 $2^{2^m} + 1$ 之質數稱為 Fermat 質數。

〔證明〕設 n 不為 2 的次方，則 n 可表為 $2^k \cdot d$，其中 k 為大於或等於 0 之整數，d 為大於 2 之奇數。由習題 1-2 得

$$2^n + 1 = 1 + 2^{2^k \cdot d} = 1 - (-2^{2^k})^d$$

$$= [1 - (-2^{2^k})] \sum_{i=0}^{d-1} (-2^{2^k})^{d-1-i}$$

$$= (2^{2^k} + 1) \sum_{i=0}^{d-1} (-2^{2^k})^{d-1-i} .$$

因 $k \geqslant 0$，故 $2^{2^k} + 1 > 1$，又因 d 為大於 2 之奇數，故

$$\sum_{i=0}^{d-1} (-2^{2^k})^{d-1-i} = (2^{2^k(d-1)} - 2^{2^k(d-2)}) + \cdots\cdots + (2^{2^k \cdot 2} - 2^{2^k}) + 1 \geqslant 3 .$$

故若 n 不為 2 的次方，則 $2^n + 1$ 不為質數，與假設不合。因此 n 必為 2 的次方。

1－5　Fibonacci 數 1，1，2，3，5，8，13，………由遞迴公式 $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ 定義，且 $x_1 = x_2 = 1$．試證 $(x_n, x_{n+1}) = 1$，且若 a 與 b 表二次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ 之根，則

$$x_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} .$$

〔證明〕設對固定之 n，$(x_n, x_{n+1}) = d$，則

$d \mid x_n$ 且 $d \mid x_{n+1}$ $\Rightarrow$ $d \mid (x_{n+1} - x_n)$

$\Rightarrow$ $d \mid x_{n-1}$ $\Rightarrow$ $d \mid (x_n - x_{n-1})$ $\Rightarrow$ $d \mid x_{n-2}$

$\Rightarrow$ $d \mid x_{n-2}$ $\Rightarrow$ ……………… $\Rightarrow$ $d \mid x_2$.

因 $x_2 = 1$，故 $d = 1$．又因 n 可為任意之正整數，故 $(x_n, x_{n+1}) = 1$

。其次證明 $x_n=(a^n-b^n)/(a-b)$。顯然 $n=1$ 時成立。設 $n\leqslant k$ 時亦成立，即 $x_n=(a^n-b^n)/(a-b)$，$\forall n\leqslant k$。由假設知 $a^2=a+1$，$b^2=b+1$，故得

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=x_k+x_{k-1}\\&=\frac{a^k-b^k}{a-b}+\frac{a^{k-1}-b^{k-1}}{a-b}\\&=\frac{a^{k-1}(a+1)-b^{k-1}(b+1)}{a-b}\\&=\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}.\end{aligned}$$

1－6　（良序原理）試證自然數集之任意非空子集必含有最小元素。

〔證明〕　我們將利用定義 1-3 來證明。設 S 爲 N 之非空子集。若 $1\in S$ 則敘述成立。設 $1\notin S$，令

$$M=\{x\in N: 若\ y\in N，且\ y\leqslant x\ 則\ y\notin S\},$$

則 M 有最大元素。因若 M 無最大元素，則當 $n\in M$ 時必存在 $m\in N$，$m>n$，且 $m\in M$。因 $m\geqslant n+1$，由 M 之定義知 $n+1\in M$。又因 $1\in M$，故知 M 無最大元素時必爲歸納集。由定義 1-3 知 $M=N$，即 $S=\phi$，此爲矛盾。現設 m_0 爲 M 之最大元素。若 $m_0+1\notin S$ 則 $m_0+1\in M$，不合。故 $m_0+1\in S$。現證 m_0+1 爲 S 之最小元素。若存在 $n\in S$ 且

$$n<m_0+1,$$

則 $n\leqslant m_0$。因 $m_0\in M$ 故 $n\in M$，不合。故若 $n\in S$ 則 $n\geqslant m_0+1$，即 m_0+1 爲 S 之最小元素。

證法二：因 S 爲非空集合，選定 $S_0\in S$，則

$$S'=\{s\in S: S\leqslant S_0\}$$

爲有限集合，故有最小元素。此元素亦爲 S 中之最小元素。

1－7　一有理數之小數展開爲 0.334444……，試求此有理數。

〔證明〕　令 $x=0.334444\cdots\cdots$，則

$$\begin{aligned}x&=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\frac{4}{10^5}+\cdots\cdots\cdots\\&=\frac{33}{100}+\frac{4}{10^3}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\right)\\&=\frac{301}{900}.\end{aligned}$$

1－8　證明x的十進位展開尾數會全爲0（或9），若且唯若，x爲有理數且其分母爲形如$2^n\cdot 5^m$之數，其中m與n爲非負整數。

〔證明〕若$x=\frac{p}{q}$，$q=2^n\cdot 5^m$，則

$$x=\frac{p}{2^n\cdot 5^m}=\frac{p}{(\frac{10}{5})^n\cdot(\frac{10}{2})^m}=\frac{p\cdot 5^n\cdot 2^m}{10^{n+m}}.$$

因此若$x=\frac{p}{2^n\cdot 5^m}$則x之展開至多有$n+m$位小數。故x之小數尾數全爲0（或9）。

反之，若$x=a_1+0.a_2a_3\cdots\cdots a_n00\cdots\cdots$，其中$a_1$爲整數，$a_2,\cdots,a_n$均爲0至9之整數且$a_n\neq 0$，則

$$x=\frac{a_1 10^n+a_2 10^{n-1}+\cdots+a_{n-1}10+a_n}{10^n}$$

其中$a_1 10^n+\cdots\cdots+a_n$爲整數。因此$x$爲有理數且分母爲

$$10^n=2^n\cdot 5^n.$$

若$x=a_1+0.a_2a_3\cdots\cdots a_n 999\cdots\cdots$，其中$a_1$爲整數，$a_2,\cdots\cdots,a_n$爲0至9之整數且$a_n\neq 9$，則

$$x=a_1+\frac{a_2}{10}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\frac{9}{10^{n+1}}+\frac{9}{10^{n+2}}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{a_1 10^n+a_2 10^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}10+a_n}{10^n}+\frac{\frac{9}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{a_1 10^n+a_2 10^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}10+a_n+1}{10^n}.$$

因此x爲有理數且其分母爲$10^n=2^n\cdot 5^n$.

1－9　證明$\sqrt{2}+\sqrt{3}$爲無理數。

〔證明〕　若$\sqrt{2}+\sqrt{3}$爲有理數，設爲$\frac{p}{q}$，其中p與q爲整數且$q\neq 0$，則

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\frac{p^2}{q^2}\Rightarrow\sqrt{6}=\frac{\frac{p^2}{q^2}-5}{2}=\frac{p^2-5q^2}{2q^2}.$$

因6不爲完全平方，由定理1-10知$\sqrt{6}$爲無理數，顯然與上式矛盾。故知$\sqrt{2}+\sqrt{3}$不爲有理數。

1－10　若a，b，c，d均爲有理數且x爲無理數，試證

$\dfrac{ax+b}{cx+d}$常爲無理數。又何時有例外產生？

〔證明〕　設$\dfrac{ax+b}{cx+d}$爲有理數，即$\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{p}{q}$，其中$p$與$q$爲整數且$q\neq 0$，

則　$q(ax+b)=p(cx+d)\Rightarrow(aq-cp)x=dp-bq$.

因$(aq-cp)x$爲無理數或0，$dp-bq$爲有理數，故上式成立時顯然$aq-cp=0$且$dp-bq=0$．於是若$p\neq 0$則

$$adpq=cbpq\Rightarrow ad=bc.$$

若$p=0$，則

$$\begin{aligned} aq-cp=0,\ dp-bq=0 &\Rightarrow a=b=0\\ &\Rightarrow ad=bc.\end{aligned}$$

故若$\dfrac{ax+b}{cx+d}$爲有理數，則$ad-bc=0$．反之若$ad=bc$時因c與d不同時爲0，故當$c=0$時$a=0$，當$d=0$時$b=0$，此時$\dfrac{ax+b}{cx+d}$顯然爲有理數。若c與d均不爲0，則存在整數p與q，$q\neq 0$，使

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{p}{q}\Rightarrow\begin{cases} aq-cp=0\\ dp-bq=0.\end{cases}$$

因此

$$(aq-cp)x=dp-bq\Rightarrow q(ax+b)=p(cx+d).$$

又因c，d不爲0，x爲無理數，故$cx+d\neq 0$，得

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{p}{q}.$$

綜合上述知$\dfrac{ax+b}{cx+d}$爲無理數，若且唯若$ad\neq bc$.

1—11　若 x 爲大於0之實數，試證 0 與 x 之間必有一無理數。

〔證明〕　若 x 爲無理數則 $\frac{x}{2}$ 亦爲無理數且 $0<\frac{x}{2}<x$．若 x 爲有理數，可設

$x=\frac{p}{q}$，其中 $p>0$，且 $q>0$，則

$$qx=p\geqslant 1>\frac{1}{\sqrt{3}}>0 \quad\Rightarrow\quad x>\frac{1}{q\sqrt{3}}>0.$$

顯然 $\frac{1}{q\sqrt{3}}$ 爲無理數。

1—12　若 $a/b<c/d$，$b>0$，$d>0$，試證 $(a+c)/(b+d)$ 介於 a/b 與 c/d 之間。

〔證明〕　因 $b>0$，$d>0$，故

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow ad-bc<0.$$

$$\therefore \frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ab}{b(b+d)}>0, \qquad \frac{a+c}{b+d}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{d(b+d)}<0.$$

因此 $(a+c)/(b+d)$ 介於 a/b 與 c/d 之間。

1—13　若 a 與 b 爲正整數，試證 $\sqrt{2}$ 總是介於 a/b 與 $(a+2b)/(a+b)$ 之間。何者較靠近 $\sqrt{2}$。

〔證明〕　因 a/b 爲有理數，故可分下列情形來討論：

(1)　若 $a/b>\sqrt{2}$，則 $a>b\sqrt{2}$，於是

$$\frac{a+2b}{a+b}=1+\frac{b}{a+b}<1+\frac{b}{b\sqrt{2}+b}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}.$$

因此 $\sqrt{2}$ 介於 a/b 與 $(a+2b)/(a+b)$ 之間。此時

$$\left(\frac{a}{b}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}-\frac{a+2b}{a+b}\right)=\frac{a^2+(2-2\sqrt{2})ab+(2-2\sqrt{2})b^2}{b(a+b)}$$

$$=\frac{(a-\sqrt{2}b)[a+(2-\sqrt{2})b]}{b(a+b)}>0.$$

故$\dfrac{a+2b}{a+b}$較靠近$\sqrt{2}$.

(2) 若 $a/b<\sqrt{2}$，則$a<\sqrt{2}\,b$・於是

$$\frac{a+2b}{a+b}=1+\frac{b}{a+b}>1+\frac{b}{\sqrt{2}\,b+b}=\sqrt{2}.$$

此時

$$\left(\sqrt{2}-\frac{a}{b}\right)-\left(\frac{a+2b}{a+b}-\sqrt{2}\right)=-\left[\left(\frac{a}{b}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}-\frac{a+2b}{a+b}\right)\right]$$

$$=\frac{-(a-\sqrt{2}b)[a+(2-\sqrt{2})b]}{b(a+b)}>0.$$

故$\sqrt{2}$仍靠近$\dfrac{a+2b}{a+b}$・

1－14　證明對任意之整數$n\geqslant 1$，$\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$均爲無理數。

〔證明〕 若$\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$爲有理數，則存在整數p與q使得$q\neq 0$，$(p,q)=1$，且$\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}=p/q$.於是

$(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})^2=p^2/q^2$

$\Rightarrow\sqrt{n^2-1}=(p^2/q^2-2n)/2\Rightarrow n^2-1=(p^2/q^2-2n)^2/4$

$\Rightarrow\ 4n^2-4=p^4/q^4-4np^2/q^2+4n^2$

$\Rightarrow n=(p^4+4q^4)/4p^2q^2\ \Rightarrow\ 4p^2q^2\mid(p^4+4q^4)$.

因此$q^2\mid(p^4+4q^4)$，故$q^2\mid p^4$，顯然此與p，q互質之假設矛盾。

故知$\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$不爲有理數。

1－15　任給實數x與整數$N>1$，證明存在整數h與k使$0<k<N$，且$|kx-h|<\dfrac{1}{N}$・

〔證明〕 考慮$N+1$個數$tx-[tx]$，其中$t=0,1,\cdots\cdots,N$・因

$$0\leqslant tx-[tx]<1,$$

即此$N+1$個數位於〔0，1〕之間，故必有二數其差小於$\frac{1}{N}$者。設

$$0\leqslant t_1<t_2\leqslant N，\quad 且$$

$$\left| t_2x - [t_2x] - (t_1x - [t_1x]) \right| < \frac{1}{N}.$$

取　$k = t_2 - t_1$，　$h = [t_2x] - [t_1x]$，則

$$0 < k \leqslant N \quad 且 \quad |kx - h| < \frac{1}{N}.$$

1－16　若x爲無理數，試證存在有無窮多之有理數h/k，$k>0$使

$$\left| x - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{k^2}.$$

〔證明〕　假設只有r個$\frac{h_i}{k_i}$，$k_i>0$，滿足上式，即

$$\left| x - \frac{h_i}{k_i} \right| < \frac{1}{k_i^2}, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, r.$$

令$\delta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} \left(\left| x - \frac{h_i}{k_i} \right| \right)$，則$\delta > 0$．取整數$N$使$N > \frac{1}{\delta}$，則由習題1-15知存在整數$h$與$k$使得$0 < k \leqslant N$且$|kx - h| < 1/N$．因此

$$\left| x - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{kN} < \frac{1}{k^2}.$$

又因k爲正整數，故

$$\left| x - \frac{h}{k} \right| < \frac{1}{kN} < \frac{\delta}{k} < \delta.$$

故由δ之定義知$h/k \neq h_i/k_i$，$\forall i = 1, 2, \cdots\cdots, r$，顯然與假設矛盾。故　命題成立。

1－17　設x爲正有理數，形如$x = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!}$，其中$a_k$均爲非負整數且$a_k \leqslant k-1$，$\forall k \geqslant 2$，$a_n > 0$．令$[x]$表$x$之最大整數部份，試證$a_1 = [x]$，$a_k = [k!x] - k[(k-1)!x]$，$\forall k = 2, \cdots\cdots, n$，而$n$爲使

$n!x$ 為整數之最小整數。反之，證明任何正有理數 x 均可唯一表成此形式。

〔證明〕 ($\Rightarrow$) 由假設，$x=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k!}=a_1+\frac{a_2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{n!}$ ，因此〔x〕$\geqslant a_1$。又因 $a_k\leqslant k-1$ ，$\forall k\geqslant 2$ ，故

$$x\leqslant a_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k!}=a_1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)$$

$$=a_1+1-\frac{1}{n!}<a_1+1.$$

故知〔x〕$=a_1$。其次若 $2\leqslant k\leqslant n$ ，則

$$k!x=k!\sum_{p=1}^{k}\frac{a_p}{p!}+k!\sum_{p=k+1}^{n}\frac{a_p}{p!},$$

其中 $k!\sum_{p=1}^{k}\frac{a_p}{p!}$ 為整數。因

$$\sum_{p=k+1}^{n}\frac{a_p}{p!}\leqslant\sum_{p=k+1}^{n}\frac{p-1}{p!}=\sum_{p=k+1}^{n}\left(\frac{1}{(p-1)!}-\frac{1}{p!}\right)=\frac{1}{k!}-\frac{1}{n!}<1,$$

因此若 $k=2,\cdots\cdots,n$ ，則〔$k!x$〕$=k!\sum_{p=1}^{k}\frac{a_p}{p!}$。故若 $k=3$ ，$\cdots\cdots$ ，n ，則

$$[k!x]-k[(k-1)!x]=k!\sum_{p=1}^{k}\frac{a_p}{p!}-k!\sum_{p=1}^{k-1}\frac{a_p}{p!}=a_k.$$

因〔$2!x$〕$=2!(a_1+\frac{a_2}{2!})=2a_1+a_2$ ，故上式當 $k=2$ 時，亦成立，即 $a_k=[k!x]-k[(k-1)!x]$ ，$\forall k=2,\cdots\cdots,n$ ，由 x 之形式，顯然 $n!x$ 為整數。設 m 為使 $m!x$ 為整數之最小整數。若 $n>m$ ，則 $n-1\geqslant m$ ，故 $n!x$ 與 $(n-1)!x$ 均為整數。因此

$$\begin{aligned}a_n&=[n!x]-n[(n-1)!x]\\&=n!x-n(n-1)!x=0,\end{aligned}$$

顯然與假設不合。故 $n\leqslant m$ ，又因 $m\leqslant n$ ，故 $n=m$。

($\Leftarrow$) 任給 $x>0$ ，令〔x〕$=a_1$ ，$a_k=[k!x]-k[(k-1)!x]$，