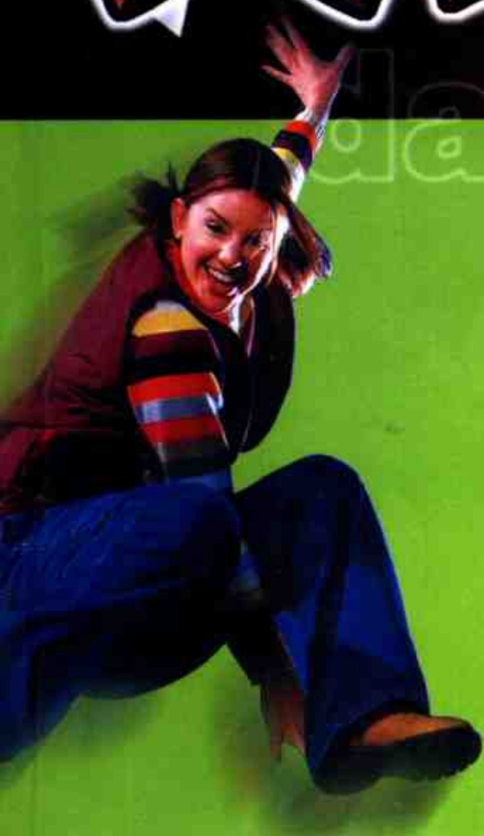
依据新大纲 ● 与试验修订本同步

2002

双色

大课堂

dakatang



王伟　武子顺　主编

高二数学

教法方略

疑难指津

融会贯通

跟踪测试

名师精编

一目了然

吉林教育出版社

依 据 新 大 纲 ● 与 试 验 修 订 本 同 步

双色 大课堂

dakatang

王 伟 武子顺 主编

高二数学

吉林教育出版社

（吉）新登字 02 号

主　编：王　伟　武子顺
副主编：武周口　刁恒大
焦附中　张亚萍

双色大课堂·高二数学

责任编辑：王世斌　　封面设计：木头羊工作室

出版：吉林教育出版社　880×1230 毫米　32 开本　16.125 印张　584 千字
发行：吉林教育出版社　2002 年 6 月修订版　2002 年 6 月第 5 次印刷
本次印数：20000 册　定价：22.80 元
印刷：北京宏伟胶印厂　ISBN 7-5383-3222-7/G·2882

前　言

在逐步摆脱传统应试教育模式、深化素质教育的今天，广大师生亟须从教学效率不高、苦不堪言的题海战术中解脱出来。“书山有路勤为径，学海无涯巧作舟”。广大学生渴盼的是变苦学为巧学、变苦读为巧读的学习方法，需要的是高标准、高质量、广思路、大视野、新角度、新构思的学习指南，使自己真正成为学习方法得当、思维方法灵巧、应试技能过硬的有信心、有灵气、能创新的人才。为此，根据教育部颁布的最新教学大纲，配合最新教材，我们特精心编写了《双色大课堂》系列丛书。

本书特别设计的双色版，使学生对所有[illegible]等，都能够一目了然。

配以最新例题，科学辨析，激发学习兴趣，开拓思维，全方位培养应试能力。由于各学科特点不同，本书栏目灵活设置有：

▲教法方略　以图示等形式展示本章节或单元独特的课堂教学思路，突出少、精、活、新。

▲疑难指津　重点剖析本章节或单元知识的难点、易混易错点。

▲融会贯通　重拳出击与本章节或单元有联系和代表性的一题多解，答案丰富多彩。

▲金题回眸　精选与本章节或单元有联系的高考题、国内、国际竞赛题，以及考察综合能力的技巧题，配有解答。

▲精题选萃　体现出少、精、活、新的试题风格，选题紧扣本章节或单元的知识点以便有针对性的巩固练习。

我们希望《双色大课堂》能够给学生以事半功倍的学习效果。

本书编委会

目 录

高二数学上册

第六章 不等式

第七章 直线和圆的方程

第八章　圆锥曲线方程

高二数学下册

第九章　直线、平面、简单几何体

第十章 排列、组合和概率

第六章　不等式

第一节　不等式的性质

▲教法方略

不等式意义　实数性质 → 不等式性质

▲疑难指津

不等式性质是本节重点

性质及推论的应用既是难点又是易混点

【例 1】判断下列各题的正误：

(1)$a>b>1\Rightarrow a^n>b^n>1(n\in N)$；

(2)$a+c<b+d\Leftrightarrow a<b,c<d$；

(3)$a<b<0\Rightarrow \frac{1}{a}-a>\frac{1}{b}-b$；

(4)$\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}\Leftrightarrow a>b,c\neq0$；

(5)$a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$.

解　(1)正确　由不等式的性质 4 推论 2 可直接推出.

(2)不正确　若 $a<b,c<d$ 由性质 3 的推论知 $a+c<b+d$ 成立，但是若 $a+c<b+d$ 就不一定有 $a<b,c<d$ 成立. 如 $1+5<7+2$ 但并没有 $1<7,5<2$ 同时成立.

(3)正确　由 $a<b<0\Rightarrow -a>-b>0$，且 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 由性质 3 的推论知 $\frac{1}{a}-a>\frac{1}{b}-b$ 成立.

(4)正确　由 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$ 知 $c^2>0$，则 $a>b$ 且 $c\neq 0$

反之若 $a>b, c\neq 0$　$\therefore c^2>0$　$\therefore \frac{1}{c^2}>0$

由性质 4 得 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$ 成立.

(5)不正确　当 $a>b$ 时，$c=0$　$ac^2=bc^2$　因此(5)不成立.

思路点拨:

在(5)中若忽略不等式的性质 4 的条件，就会误判. 在(5)中条件改为 $a>b$，且 $c\neq 0$ 时是否成立?

【例 2】设 $20<a<34, 24<b<60$，求 $a+b, a-b$ 及 $\frac{a}{b}$ 的范围.

➡分析　本题关键是求出 $-b$ 与 $\frac{1}{b}$ 的范围，然后只要利用同向不等式的可加性及两边都是正数的同向不等式的可乘性，问题即可得到解决.

➡解　由已知 $20<a<34, 24<b<60$

可得 $44<a+b<94, -60<-b<-24$

故 $-40<a-b<10$，又 $\because 24<b<60$，可得 $\frac{1}{24}>\frac{1}{b}>\frac{1}{60}$

$\therefore \frac{34}{24}>\frac{a}{b}>\frac{20}{60}$，即 $\frac{17}{12}>\frac{a}{b}>\frac{1}{3}$.

思路点拨:

解题中要防止错用不等式的性质，出现下列误解:

由 $20<a<34, 24<b<60$

两式相减得: $-4<a-b<-26$;

两式相除得: $\frac{20}{24}<\frac{a}{b}<\frac{34}{60}$.

【例 3】已知 $a>b$，且 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，求证：$a>0,b<0$，并判断它的逆命题是否成立.

分析 直接利用不等式性质及推论进行论证.

解 由 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，得 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$ 即 $\frac{b-a}{ab}>0$，

又 $a>b$，故 $b-a<0$，$\therefore ab<0$，

即 a,b 符号相异，结合 $a>b$ 即可知：

$a>0,b<0$.

反之，若 $a>0,b<0$，显然有 $a>b$；且 $ab<0$，由不等式 $a>b$ 两边同除以 ab，得 $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$，即 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$. 故命题的逆命题亦成立.

误解 $a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；$ac>bc\Rightarrow a>b$

$a>b\Rightarrow a^2>b^2$；$a>b,c>d\Rightarrow ac>bd$.

▲融会贯通

【例 1】已知 a、b、$c\in R^+$ 且 $b<c$，比较 ab 与 $ac+bc$ 的大小.

解法一 $ab-(ac+bc)=a(b-c)-bc$，

$\because b<c$，$\therefore b-c<0$，又 $a>0$. $\therefore a(b-c)<0$

$\because b>0,c>0$，$\therefore bc>0$，$-bc<0$，

$\therefore a(b-c)-bc<0$ $\therefore ab<ac+bc$

解法二 $\because a\in R^+$ 且 $b<c$ $\therefore ab<ac$

$\because b$、$c\in R^+$，$\therefore bc>0$ $\therefore ac<ac+bc$ $\therefore ab<ac+bc$

思路点拨：

本题反映出比较两数大小常用的两种方法

【例 2】已知$-1<2a<0$，将下列各数按大小顺序排列：

$$A=1+a^2,B=1-a^2,C=\frac{1}{1+a},D=\frac{1}{1-a}$$

➡分析　若直接作差比较需两两逐个作差，比较麻烦，不妨从满足条件$-1<2a<0$的a中任意取一个数试一试，如设$a=-\frac{1}{4}$，则$A=\frac{17}{16},B=\frac{15}{16},C=\frac{4}{3},D=\frac{4}{5}$，由此，猜想$D<B<A<C$，于是，设法证明：$C-A>0,A-B>0,B-D>0$即可.

➡解　由$-1<2a<0$，得$-\frac{1}{2}<a<0$

则$B-D=(1-a^2)-\frac{1}{1-a}=\frac{a^3-a^2-a}{1-a}=\frac{a[(a-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}]}{1-a}$

由$-\frac{1}{2}<a<0$知$1-a>0,-1<a-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{4}<(a-\frac{1}{2})^2<1$，故$(a-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}<0$

$\therefore \frac{a[(a-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}]}{1-a}>0$，故$B>D$.

由$A-B=(1+a^2)-(1-a^2)=2a^2>0$　故$A>B$

$$C-A=\frac{1}{1+a}-(1+a^2)$$

$$=\frac{-a(a^2+a+1)}{1+a}=\frac{-a[(a+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]}{1+a}$$

$\because (a+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0,1+a>0,-a>0$，

$\therefore \frac{-a[(a+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]}{1+a}>0$，$\therefore C>A$　　综上可知，$C>A>B>D$

思路点拨：

①为了便于解题，往往取一个或一组特殊的数值，使问题简单化，使抽象字母表

示的数具体化，以便于得出结论，但对得到的结论，还需加以严格的论证.

②如果比较的数或式较多时，一般先分组，然后按组比较，如本题中，由于$-\frac{1}{2}<a<0$，显然 A 与 C 均大于 1，而 B 与 D 均是小于 1 的正数，因此，只要比较 A 与 C、B 与 D，就能区分出这四个数的大小关系.

▲金题回眸

1.（1993 上海）"$a+b>2c$"的一个充分条件是（　　）

A. $a>c$ 或 $b>c$　　B. $a>c$ 且 $b<c$

C. $a>c$ 且 $b>c$　　D. $a>c$ 或 $b<c$

➡**分析**　要找 $a+b>2c$ 成立的充分条件，即是看 A、B、C、D 四个选项中哪一选项能推出 $a+b>2c$ 或立，可用排除法求解. C. $a>c$ 且 $b>c\Rightarrow a+b>2c$ 因此选 C.

2.（1999 年上海）若 $a<b<0$，则下列结论中正确的是（　　）

A. 不等式 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不能成立

B. 不等式 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不能成立

C. 不等式 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 和 $(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$ 均不能成立

D. 不等式 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 和 $(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$ 均不能成立

➡**分析**　[illegible]　由于 $a<b<0$，$\therefore a-b<0$，且 $|a|>|b|>0$

则 $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}=\frac{b}{a(a-b)}<0$　$\therefore \frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$.

由 $|a|>|b|>0$ 得 $\frac{1}{|a|}<\frac{1}{|b|}$　因此选答案 B

3.（1993 年全国）若 a,b 是任意实数，且 $a>b$，则（　　）

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{b}{a}<1$　　C. $\lg(a-b)>0$　　D. $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

分析　① 由于 $y=(\frac{1}{2})^x$ 是减函数，$a>b$

$\therefore (\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$　选 D.

② ，不妨取 $a=2,b=1$ 可排除 C，再取 $a=-1,b=-2$，又可排除 A 和 B，即选 D.

▲精题选萃

一、选择题

1. 已知 $a+b>0,b<0$，那么　(　　)

A. $a>b>-a>-b$

B. $a>-a>b>0$

C. $a>-b>b>-a$

D. $-a>-b>a>b$

2. 如果 $a>b$，则下列不等式成立的有　(　　)

①$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；　②$a^3>b^3$；　③$\lg(a^2+1)>\lg(b^2+1)$；　④$2^a>2^b$

A. ②，③　　B. ①，③

C. ③，④　　D. ②，④

3. 若 $ac>bd$ 且 $a>b>0$，则 c 与 d 的大小关系是　(　　)

A. $0<c<d$　　B. $c>d>0$

C. $d<c<0$　　D. 不能确定

4. 如果 $1<\alpha<3,-4<\beta<2$，那么 $\alpha-|\beta|$ 的取值范围是　(　　)

A. $(-1,3)$　　B. $(-3,6)$

C. $(-3,3)$　　D. $(1,4)$

5. 若 $a>b$，则下列不等式成立的是　(　　)

A. $a+b>a-b$

B. $\frac{b}{a}>1$

C. $2^a>2^b$

D. $\lg^{(a-b)}>0$

6. 设 $a,b,c\in R$,有如下四个命题:

(1)$a<b<0\Rightarrow a^2<b^2$　　(2)$ac^2>bc^2\Rightarrow a>b$

(3)$\frac{a}{b}<c\Rightarrow a<bc$　　(4)$a<b<0\Rightarrow \frac{b}{a}<1$

其中正确的命题是 (　　)

A. (1)与(2)　　B. (1)与(3)

C. (2)与(3)　　D. (2)与(4)

7. 设命题甲:$\alpha>2$ 且 $\beta>2$;命题乙:$\alpha+\beta>4$,且 $\alpha\beta>4$. 则 (　　)

A. 命题甲是命题乙的充分不必要条件

B. 命题甲是命题乙的必要不充分条件

C. 命题甲是命题乙的充要条件

D. 命题甲是命题乙的既不充分又不必要条件

8. 设 a、$b\in R^+$ 且 $a\neq b$,$n\in N^*$ 则 $ab^n+a^nb-a^{n+1}-b^{n+1}$ 的值 (　　)

A. 恒为正　　B. 恒为负

C. 与 a、b 的大小有关　　D. 与 n 是奇数或偶数有关

二、填空题

1. 若 $-1<a<b<0$,则 $\frac{1}{a}$,$\frac{1}{b}$,a^2,b^2 按从大到小排列为______.

2. 设角 α、β 满足 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,则 $\alpha-\beta$ 的取值范围是______.

3. 已知奇函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调减函数,$\alpha,\beta,\gamma\in R$,且 $\alpha+\beta>0$,$\beta+\gamma>0$,$\gamma+\alpha>0$,则 $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)$ 的值与"0"的大小关系是______.

4. 若 $a\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$,则 $\sin^2\alpha$ 的取值范围是______.

5. 若 $x>y$ 且 $a>b$,则在"①$a-x>b-y$;②$a+x>b+y$;③$ax>by$;④$x-b>y-a$;⑤$\frac{a}{y}>\frac{b}{x}$"这五个式子中恒成立的不等式的序号是______.

6. 设 $x>y>z>1$,则 xyz、xy、yz、xz 从大到小依次排列为______.

三、解答题

1. 已知 $f(x)=ax^2+c$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，求 $f(3)$ 的取值范围.

2. 已知 $-3<a<b<1$，$-2<c<-1$，求证 $-16<(a-b)c^2<0$.

3. 用不等式的性质证明：若 $a>b>0$，$d<c<0$，则 $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$.

4. 比较 5^{44} 与 4^{55} 的大小.

5. 设 $a,b\in R$，比较 $(a^4+b^4)(a^2+b^2)$ 与 $(a^3+b^3)^2$ 的大小.

6. 已知 $b<0$，$|c|>|b|>|a|>0$ 且 $\frac{ab^2}{c}=\frac{b}{c}$ ac，比较实数 a、b、c 的大小.

参考答案：

一、1. $\because a+b>0, b<0$

$\therefore a>-b>0, -a<b<0$

即 $a>-b>b>-a$ 成立，选 C

2. 对于①，只有当 a 与 b 同号时才成立；

对于②，由于缺少 $b>0$ 的条件，不能用推论 2，但利用幂函数 $y=x^3$ 的性质知②成立；

对于③，由于 $a>b$ 不能得到 $a^2+1>b^2+1$，故③不成立；

对于④，利用指数函数 $y=2^x$ 的性质知④成立；

综上所述，应选 D.

3. 可通过取　　　，令 $a=100, b=1, c=\frac{1}{2}, d=20$

显然 $ac>bd$　即 $100\times\frac{1}{2}>1\times 20$　且 $100>1>0$

即 $a>b>0$　这里 $0<c<d$　$\therefore$ 排除 B，C

再令 $a=100, b=1, c=10, d=5$.

显然仍满足 $ac>bd$ 及 $a>b>0$

但 $c>d$，排除 A，故选 D.

4. 由 $-4<a<2$，知 $0\leqslant|\beta|<4$，$-4<-|\beta|\leqslant 0$

又 $1<a<3$，故 $-3<a-|\beta|<3$. 选 C.

5. $\because y=2^x$，$2>1$，$\therefore y=2^x$ 是增函数，当 $a>b$ 时有 $2^a>2^b$，故选 C.

6. 由不等式性质知②④正确，故选 D.

7. 甲：$\alpha>2$ 且 $\beta>2$　由不等式性质知乙：$\alpha+\beta>4$

且 $\alpha\beta>4$ 成立. ∴甲是乙的充分条件.

又若 $\alpha+\beta>4$，且 $\alpha\beta>4$ 不一定推出 $\alpha>2$ 且 $\beta>2$.

如：$\alpha=9$，$\beta=1$，则 $\alpha+\beta>4$，且 $\alpha\beta>4$

但 $\alpha>2$，且 $\beta>2$ 不成立

由此得出甲不是乙的必要条件. 故选 A.

8. $\because (ab^n+a^nb)-(a^{n+1}+b^{n+1})=a(b^n-a^n)+b(a^n-b^n)$

$=(a^n-b^n)(b-a)=-(a-b)(a^n-b^n)$

∵若 $a>b>0$，则 $a-b>0$，$a^n-b^n>0$　$\therefore -(a-b)(a^n-b^n)<0$

若 $0<a<b$，则 $a-b<0$，$a^n-b^n<0$　$\therefore -(a-b)(a^n-b^n)<0$

故选 B.

二、1. $\because -1<a<b<0$，$\therefore 0>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，$-a>-b>0$

$\therefore (-a)^2>(-b)^2>0$，即 $a^2>b^2>0$

则 $a^2>b^2>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

2. 由 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$

则 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\\ -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\\ \alpha<\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\\ -\frac{\pi}{2}<-\beta<\frac{\pi}{2}\\ \alpha-\beta<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\pi<\alpha-\beta<\pi\\ \alpha-\beta<0\end{cases} \Rightarrow -\pi<\alpha-\beta<0$

3. 由 $\alpha+\beta<0$，$\alpha>-\beta$

又由 $f(x)$ 为减函数，得 $f(\alpha)<f(-\beta)$

根据 $f(x)$ 为奇函数，有 $f(-\beta)=-f(\beta)$，

故 $f(\alpha)<-f(\beta)$

$\therefore f(\alpha)+f(\beta)<0$

同理 $f(\beta)+f(\gamma)<0$，$f(\gamma)+f(\alpha)<0$

以上三式相加即得 $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)<0$

4. $\because \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha$

而 $-\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{6}$

$\therefore -\frac{2}{3}\pi\leqslant 2\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$

$\therefore -\frac{1}{2}\leqslant\cos 2\alpha\leqslant 1$

则 $0\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha\leqslant\frac{3}{4}$ 故 $\sin^2\alpha$ 范围为 $[0,\frac{3}{4}]$.

5. 由 $\begin{cases}x>y\\a>b\end{cases}\Rightarrow x+a>y+b$

又由 $\begin{cases}x>y\\-b>-a\end{cases}\Rightarrow x-b>y-a$ 故②和④成立

6. $\because \sqrt{xyz}>0,\sqrt{xy}>0,\sqrt{xz}>0,\sqrt{yz}>0$

∴可先比较它们的平方的大小.

即先比较 xyz,xy,yz,xz 的大小

可用作差法：$\because xyz-xy=xy(z-1)>0\quad(z>1)$

$\therefore xyz>xy$ 同理 $xy-xz=x(y-z)>0\quad(y>z,y-z>0)$

$\therefore xy>xz$，同理 $xz>yz$ $\therefore xyz>xy>xz>yz$

故 $\sqrt{xyz}>\sqrt{xy}>\sqrt{xz}>\sqrt{yz}$

三、1. $\because f(1)=a+c,f(2)=4a+c$

$\therefore a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)],c=\frac{4}{3}f(1)-\frac{1}{3}f(2)$

故 $f(3)=9a+c=3[f(2)-f(1)]+\frac{4}{3}f(1)-\frac{1}{3}f(2)$

$=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$

又 $\because -1\leqslant f(2)\leqslant 5,\therefore -\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}$,

$-4\leqslant f(1)\leqslant -1,\therefore \frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant\frac{20}{3}$.

两式相加得 $-1\leqslant\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)\leqslant 20$,

即 $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$.

2. 证明：$\because a<b$ $\therefore a-b<0$，又 $c^2>0$ $\therefore (a-b)c^2<0$