guanli yunchou xue

管理运筹学

兰州铁道学院 焦永兰 主编

国家级重点教材
GUOJIAJIZHONGDIANJIAOCAI

中
版
社

高等学校教材

管理运筹学

兰州铁道学院　焦永兰　主编
兰州铁道学院　滕传琳　主审

中国铁道出版社
2000年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书是在原顾守淮主编、曾获铁道部优秀教材奖的《管理运筹学》的基础上修订的。编写上，作者注重培养学生运用运筹学的方法分析和解决实际问题的能力；此外，在介绍基本算法的前提下，通过对少量计算机算法的介绍，使学生能注意到一般算法与计算机程序之间的差别和关系。全书共分为十五章。其主要内容有：线性规划、对偶问题、灵敏度分析、运输问题、整数规划、动态规划、图与网络、网络流、统筹方法、排队论、存贮论、决策论和神经网络。

本书是管理工程专业的教科书，也可供管理干部及工程技术人员学习、参考。

图书在版编目(CIP)数据

管理运筹学/焦永兰主编 .—北京：中国铁道出版社，2000
高等学校教材
ISBN 7-113-03662-7

Ⅰ. 管…　Ⅱ. 焦…　Ⅲ. 管理学：运筹学-高等学校教材　Ⅳ. G931.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 01300 号

书　　名：管理运筹学
作　　者：兰州铁道学院　焦永兰
出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑：李小军
封面设计：李艳阳
印　　刷：北京市燕山印刷厂
开　　本：787×960　1/16　印张：20.75　字数：420 千
版　　本：2000 年 3 月第 1 版　2000 年 3 月　第 1 次印刷
印　　数：1～3000 册
书　　号：ISBN 7-113-03662-7/F·307
定　　价：26.50 元

前　言

本书是在原顾守淮主编、曾获铁道部优秀教材奖的《管理运筹学》的基础上进行修订。全书参考学时 90～100 学时。

编写时,我们根据以往的教学实践,参阅了各类运筹学教材,以注重培养学生运用运筹学的方法分析和解决实际问题的能力为主,力求在内容上更能适应管理工程专业的需要。

根据学科的发展,对运筹学中某些分枝的算法作了更新或补充,以保持本书的先进性。

本书在以介绍基本算法为主的原则下,通过对少量计算机算法的介绍,使学生能注意到一般算法与计算机程序之间的差别和关系。这部分内容的扩充,将使本书的实用性更强,因为任何运筹学算法的真正应用最终将借助于计算机。另外本书介绍了人工神经网络的内容。虽然人工神经网络目前还处于发展阶段,但根据其处理信息的特点,可用来解决一些传统算法较难解决的一些组合优化问题和运筹学中的整数规划、0-1 规划等问题。

在例题和习题的选编上,收录了较多的训练学生建立数学模型能力的问题,增加了本书在理论与实际相结合方面的特色。

参加本书编写的单位有兰州铁道学院运输系和石家庄铁道学院经管系,具体分工如下:

刘林忠(兰州铁道学院运输系):　　第一章至第六章、第十五章

顾守淮(兰州铁道学院运输系):　　第七章、第十二章

焦永兰(兰州铁道学院运输系):　　第九章至第十一章

梁成柱(石家庄铁道学院经管系):　　第八章、第十三章至第十四章

本书由兰州铁道学院焦永兰主编,滕传琳主审。编写过程中,参阅了部分运筹学教材及文献(附后),在此向有关作者一并致谢。

由于编者水平有限,不妥之处在所难免,希望专家及读者指正。

编者

一九九八年十二月

Abstract

This book is edited for management speciality. The content of this book include linear programming, dual problem, sensitivity analysis, transportation problem, integer programming, dynamic programming, graph and network, network flow, critical path method, queueing theory, inventory theory, decision theory and neuron network.

This book can be used as the textbook of students of management speciality, or the reference of the management cadre and the engineers and technicians.

数学符号索引表

$\boldsymbol{A}$—— 表示线性规划问题约束条件中决策变量的系数矩阵$(a)_{m\times n}$；

$\sum$—— 求和符号，$\sum\limits_{i=k}^{n}a_i$ 表示对从k 至n 的$n-k+1$ 项 a_i 连续求和；

$\prod$—— 求积符号，$\prod\limits_{i=k}^{n}a_i$ 表示对从k 至n 的$n-k+1$ 项 a_i 连续求积；

$\boldsymbol{B}$—— 表示线性规划问题的基变量在约束中的系数矩阵；

$\boldsymbol{c}$—— $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 表示决策变量在目标函数中的系数向量；

$\boldsymbol{x}$—— $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示线性规划问题中决策变量构成的向量；

$\boldsymbol{x_B}$—— 表示线性规划问题中基变量组成的向量；

$\boldsymbol{c_B}$—— 表示线性规划问题中基变量在目标函数中的系数组成的向量；

max—— 求若干数中的最大数；

min—— 求若干数中的最小数；

$\in$ ——$x\in S$ 表示x 为集合S 的元素；

$\overline{\in}$ ——$x\ \overline{\in}\ S$ 表示x 不属于集合S 的元素；

$\cup$ —— 集合的并运算；

$\cap$ —— 集合的交运算；

$\subset$ ——$A\subset B$ 表示A 为B 的子集；

∞—— 无穷大的量；

$|Q|$ —— 若 Q 为集合，则表示集合中的元素数；若 Q 为数值，则表示该数的绝对值；

[ ]——$[x]$ 表示不大于实数 x 的最大整数；

{ }——$\{a,b,c,\cdots\}$ 表示由元素 $a,b,c\cdots$ 组成的集合；

$c(e)$—— 表示边 e 的容量；

$f(e)$—— 表示弧 e 的流量；

$v(f)$—— 表示流 f 的流值；

$w(e)$—— 表示边 e 的权(长度，费用等)；

$E(G)$—— 表示图 G 的边集合；

$G=(V,E)$—— 表示以顶点集 V 和边集合 E 构成的图 G；

$V(G)$—— 表示图 G 的顶点集合；

λ_n—— 排队系统在顾客数为 n 时的到达强度；

μ_n—— 排队系统在顾客数为 n 时的服务强度；

Δx—— 表示实数 x 的变化量；

$o(x)$—— 表示实数 x 的高阶无穷小；

$(A/B/C):(d/e/f)$—— 排队系统的符号表示，其中 A 为到达间隔的概率分布，B 为服务时间的概率分布，C 为服务员数，d 为排队系统的容量，e 为顾客来源总体的数目，f 为服务规则。

目　　录

第一章　线性规划基础

人们在生产实践中，常常遇到如下的问题:如何运用现有资源(如人力、机器小时、原材料等)安排生产,使产值最大或利润最高；对给定的任务，如何统筹安排，以便用最少的资源消耗去完成任务。对于这种从生产的计划与组织中提出的以达到最大收益或最小支付为目标的问题的研究,构成了运筹学的一个重要分支——数学规划论，而线性规划则是其中发展最早、理论比较成熟、应用最为广泛的一个分支。

早在 1939 年,前苏联数学家康特洛维奇就对运筹学中的一些问题进行了研究。特别是在 Dantzig 和 Kuhn 等数学家提出了单纯形法和对偶理论后,大大完善了线性规划的理论和计算方法,促进了线性规划乃至运筹学的快速发展和广泛的应用。

第一节　线性规划问题的一般模型

用线性规划解决实际问题的基本步骤是先建立问题的数学模型，然后对模型求解。所谓建立数学模型,就是将问题用数学语言描述出来。

下面先用两个简单的模型来说明什么是线性规划问题以及如何建立线性规划模型。

例 1　有甲、乙两种产品,都要在车间 A 和车间 B 加工,有关资料见表 1-1。

表　1-1

产　　品	在 A 加工时数	在 B 加工时数	单位产品利润(元)	市场限制
甲	2	1	6	—
乙	1	1	4	$\leqslant 7$
车间可用工时	10	8		

问如何组织生产,使利润最大?

解　问题是要确定利润最大的甲、乙两种产品的产量。不妨设:

$$x_1 = \text{甲产品的产量};$$

$$x_2 = \text{乙产品的产量}。$$

因为车间 A 和车间 B 的可用工时分别为 10 和 8,所以加工 x_1 单位的产品甲和 x_2 单位的产品乙在车间 A 和车间 B 消耗的工时不应超过车间 A 和 B 的可用工时,同时

产品乙的产量不应超过市场需求的限制，可见车间 A、B 的可用工时和乙产品的市场需求量是限制产品产量的几个因素或条件，因此 x_1 和 x_2 应满足以下不等式：

$$2x_1 + x_2 \leqslant 10, \text{（}A\text{ 车间工时限制）} \tag{1.1}$$

$$x_1 + x_2 \leqslant 8, \text{（}B\text{ 车间工时限制）} \tag{1.2}$$

$$x_2 \leqslant 7, \text{（产品乙的市场限制）} \tag{1.3}$$

另外产品的产量还必须为正数，因此 x_1、x_2 还应满足

$$x_j \geqslant 0, \text{ 对一切 } j\text{。} \tag{1.4}$$

我们称式(1.1)～(1.4)为约束条件，其中式(1.4)称为非负约束。

本问题追求的目标是在甲乙两种产品的产量 x_1 和 x_2 满足约束条件(1.1)～(1.4)的条件下，获得最大利润。若以 z 表示利润，则有 $z = 6x_1 + 4x_2$。追求的目标为利润最大，可用下式表示：

$$\max\ z = 6x_1 + 4x_2 \tag{1.5}$$

式(1.1)～(1.5)就是本问题的数学模型，一般用下面的形式表示：

$$\max\ z = 6x_1 + 4x_2$$

$$\text{满足} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 10, & \text{（}A\text{ 车间工时限制）} \\ x_1 + x_2 \leqslant 8, & \text{（}B\text{ 车间工时限制）} \\ x_2 \leqslant 7, & \text{（产品乙的市场限制）} \\ x_j \geqslant 0, \text{对一切 } j\text{。} & \end{cases}$$

一般建立线性规划问题的模型可按如下步骤进行：

1. 确定决策变量

确定决策变量就是将问题中的未知量用变量来表示，用来表示未知量的变量就是决策变量，如例 1 中的 x_1 和 x_2。确定合适的决策变量是建立线性规划问题模型的关键，它直接涉及到能否成功地建立数学模型。

2. 确定目标函数

每一个线性规划问题都有一个追求的目标，确定目标函数就是将追求的目标用决策变量表示出来，如例 1 中的式(1.5)。

3. 确定约束条件方程

一个问题通常有若干个约束条件(限制条件)，一个线性规划问题就是要在这些条件的限制下，找到最好的行动方案。在建立模型时要把这些约束条件用数学公式表示出来(一般为不等式)。如例 1 中式(1.1)～(1.4)。

例 2 某工厂用钢与橡胶生产 3 种产品 A、B、C，有关资料见表 1-2。

表　1-2

产品	单位产品钢消耗量	单位产品橡胶消耗量	单位产品利润
A	2	3	40
B	3	3	45
C	1	2	24

已知每天可获得100单位的钢和120单位的橡胶，问每天生产 A、B、C 各多少使总利润最大？

解　设：

x_1 = 产品 A 的日产量，

x_2 = 产品 B 的日产量，

x_3 = 产品 C 的日产量。

则该问题的数学模型是：

$$\max\ z = 40x_1 + 45x_2 + 24x_3;$$

$$\text{满足}\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 100, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 120, \\ x_j \geqslant 0,\ \text{对一切}\ j。\end{cases}$$

从以上两个例题我们看到，这两个问题都有如下共同特征：

1. 每个问题都有一个追求的目标，这个目标可表示为一组变量的线性函数，按照问题的不同，追求的目标可以为最大，也可以为最小。

2. 问题中有若干约束条件，用来表示问题中的限制或要求，这些约束条件可用线性等式或线性不等式表示。

3. 问题中用一组决策变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来表示一种方案。在满足约束条件的前提下，变量的一组取值就表示一个具体的方案，同时变量一般应满足非负要求。如果变量可连续取值，问题有无穷组解。在例题中就是有无穷组生产方案可供选择。我们的任务就是要选择一组或多组方案，使目标函数值最大或最小。从选择方案的角度来说，这就是规划问题。从使目标函数最大或最小的角度来说，这就是优化问题。

我们把具有上述3个特征的问题称为**线性规划问题**。

第二节　线性规划问题的标准型

线性规划问题的数学模型，可以有简繁不同的3种描述形式：

1. 对具体的线性规划问题，都将模型列成以下形式：

$$\max/\min\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n;$$

$$\text{满足}\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=,\geqslant)\ b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=,\geqslant)\ b_m, \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1,2,\cdots,n。 \end{cases}$$

2. 为了讨论方便，有时将线性规划问题列成以下简式：

$$\max/\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\text{满足}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (=,\geqslant)\ b_i,\ i = 1,2,\cdots,m,$$

$$x_j \leqslant 0, j = 1,2,\cdots。$$

3. 有时用矩阵和向量描述线性规划问题，以便于数学上的讨论：

$$\max/\min\ z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

$$\text{满足}\quad \begin{cases} \boldsymbol{Ax} \leqslant (=,\geqslant) \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geqslant 0。 \end{cases}$$

其中：

$$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n);$$

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n;$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}。$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为约束条件方程的系数矩阵，一般有 $0 < m < n$。

由上可见，线性规划模型的目标函数，可以是求最大值(例如追求利润最大)，也可以是求最小值(例如追求成本最小)；约束条件方程可以为“$\leqslant$”，也可以为“$\geqslant$”或“$=$”，在实际问题中表示资源约束和对某一种成分的最低含量要求等。对一般的线性规划模型，可以从经济上作如下解释：

这个模型系统包括分享有限资源 $b_i(i = 1,2,\cdots, m)$的若干项活动 $j(j = 1,2,\cdots, n)$；第 j 个活动每单位需要的第 i 种资源的量为 a_{ij}；作为对这些投入的回报，第 j 个活动每个单位的产出(成本、效益等)为 c_j；“$\leqslant$”形式的约束条件意味着各项活动消耗的某种资源的数量，不应超过资源的可用量；“$\geqslant$”形式的约束条件意味着某项活动中对某种资源消耗的最低要求。

线性规划目标函数和约束条件方程的多样性给我们讨论带来不便，为了便于以后的讨论，本书规定线性规划的标准型为：

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\text{满足}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1,2,\cdots,m,$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n。$$

我们还规定上式中的 $b_i \geqslant 0$。若问题中有 $b_i<0$,可对等式两端同时乘以 -1。实际问题的线性规划模型必须转化为标准型,然后求解。

如果根据实际问题建立起来的线性规划模型不是标准型的，可用下述方法将它化成标准型:

1. 若目标是

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

可令 $z=-z'$,将目标函数转化为:

$$\max z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j。$$

2. 若约束方程是"$\leqslant$"形式,可在方程左端加上非负变量,将方程转化为等式方程。如(1.1)可转化为:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_3 \geqslant 0。$$

这里 x_3 的经济意义是 A 车间没有用完的工时,我们称 x_3 为**松弛变量**。

3. 若约束方程是"$\geqslant$"形式,可在方程左端减去非负变量,将方程转化为等式方程。我们称这个非负变量为**多余变量**;

一般情况下，松弛变量和多余变量在目标函数中的系数 $c_j=0$。

4. 若有一个变量 x_k 没有非负约束(称为**自由变量**),为了满足标准型对变量的非负要求,可令 $x_k = x_l - x_m$,其中 $x_l \geqslant 0, x_m \geqslant 0$。由于 x_l 可能大于 x_m,也可能小于 x_m,所以 x_k 可能为正,也可能为负。

例 3　将下列线性规划问题化为标准型:

$$\min z = x_1 + 2x_2;$$

$$\text{满足}\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 \geqslant 0。\end{cases}$$

解　对自由变量 x_2 作替换,令 $x_2 = x_3 - x_4$,其中 $x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0$。再引入松弛变量 x_5,多余变量 x_6,得:

$$\max z' = -x_1 - 2x_3 + 2x_4;$$

$$\text{满足}\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + x_3 - x_4 - x_6 = 4, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_j \geqslant 0, j = 1,3,4,5,6。 \end{cases}$$

线性规划问题模型都包含有如下基本的假设：① 成比例性；② 独立性；③可分性；④ 确定性。所谓**成比例性**就是同一个问题的同一活动范围内，某一活动对目标函数的贡献和对资源的消耗与活动的水平成正比例。成比例性假设将保证目标函数和约束条件为线性的。在实际生活中，真正的线性是少有的，对此类问题有时可用线性规划模型近似地描述。所谓**独立性**指任一变量 x_j 的参数 c_j 和 a_{ij} 对其它变量不产生影响。例如，例 1 中生产产品甲得到的利润不受产品乙的数量的影响，如果没有这个假定，问题就复杂化了。所谓**可分性**就是允许变量取值带小数。所谓**确定性**就是假设所有参数 c_j、a_{ij} 和 b_i 都是确定的。遇到不确定的情况，可利用灵敏度分析、参数规划或随机线性规划来解决。

第三节　线性规划问题的图解法

只有两个或三个变量的线性规划问题，可以用图解法来求解。图解法简单直观，便于理解线性规划问题的基本概念和求解的基本原理，但实用价值不大。下面用例 1 来说明线性规划问题的图解法。

例 4　用图解法解例 1 中的线性规划问题。例 1 的数学模型为：

$$\max\ z = 6x_1 + 4x_2;$$

$$\text{满足}\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ x_1 + x_2 \leqslant 8, \\ x_2 \leqslant 7, \\ x_j \geqslant 0, \text{对一切 } j。 \end{cases}$$

解　如图 1-1，建立以 x_1 和 x_2 为坐标轴的直角坐标系，则第一象限（包括坐标轴）是满足非负约束 $x_1 \geqslant 0$ 和 $x_2 \geqslant 0$ 的一切点的集合。问题中的每一个约束表示一个半平面，将题目中的 3 条不等式约束条件方程改成等式方程，画出直线，这 3 条直线左下方（包括直线本身）和两条坐标轴围成的平面区域（3 个半平面在第一象限的公共部分），就是满足所有约束条件的点的集合，称为**可行域**。

目标函数 $z = 6x_1 + 4x_2$ 在坐标平面上，表示以 z 为参数的一族平行直线。其中的任意一条，是产生相同利润的点的集合，称为**等值线**。例如 $6x_1 + 4x_2 = 12$ 直线上所有的点，都产生 12 元的利润。另外，目标函数 $z = 6x_1 + 4x_2$ 在任一点的梯度方向为(6, 4)，与目标函数的等值线垂直。沿梯度方向目标函数值增大，沿相反方向则使目标函数

值减小。按此原则，将直线 $6x_1+4x_2=12$ 沿右上方平行移动所得的直线，就是目标函数比 12 大的直线。因为我们要使目标函数值最大，就希望找到一条使 z 值尽可能大，但至少包含可行域内一点的等值线，这就是图 1-1 中 $z=36$ 的等值线。任一 $z>36$ 的等值线上将不包含可行域内的点。因此 $z=36$ 就是这个问题的最大利润，此等值线上唯一属于可行域内的点为(2,6)，即 $x_1=2, x_2=6$ 是这个问题的最优解。注意这一点正好是直线 $2x_1+x_2=10$ 和 $x_1+x_2=8$ 的交点，也就是构成可行域的多边形的顶点。

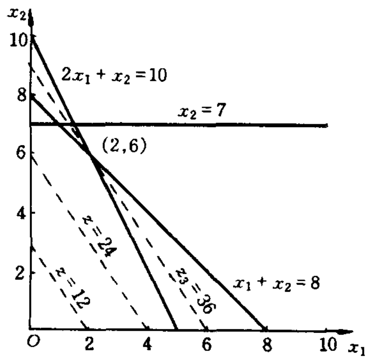

图　1-1

表　1-3

顶点		$z=6x_1+4x_2$
x_1	x_2	
0	0	0
0	7	28
1	7	34
2	6	36
5	0	30

一般地，我们定义可行域的边界上改变方向的点为可行域的顶点，下一章我们将证明线性规划问题的最优解可以在可行域的顶点上找到。因此我们不必研究等直线，只需求出可行域的顶点并计算每一顶点的目标函数值，就可以从中找出最优解。这个问题的各个顶点的目标值见表 1-3。

可见得到最大利润的点是 $x_1=2, x_2=6$。

例 5　若例 1 中甲和乙的利润都是每单位 4 元，则目标函数为 $z=4x_1+4x_2$，试用图解法求该问题的最优解。

解　从图 1-1 可知，等值线是平行于约束条件直线 $x_1+x_2=8$ 的一族平行线。当 z 值由小变大，等值线向右上方移动时，至少包含可行域内一点的等值线与约束条件直线 $x_1+x_2=8$ 重合。在点(1,7)和点(2,6)之间的线段上的任一点都使 z 值最大。这就表明问题有无穷多个最优解，其中两个解是 $x_1=1, x_2=7$ 和 $x_1=2, x_2=6$，目标函数值就是 32。我们称这种情况为线性规划问题有**多重最优解**，简称有**多重解**。

习　　题

1. 一个毛纺厂用羊毛和涤纶生产 A、B、C 三种混纺毛料，生产 1 单位产品所需要的原料见表 1-4。3 种产品的单位利润分别为 4、1、5。每月可购进的原料限额为羊毛 8 000单位，涤纶3 000单位，问此毛纺厂应如何安排生产才能获得最大利润？请建立线