南京工学院出版社

泛函分析习题集

楼宇同 李延保 编

泛函分析习题集

楼宇同　李延保　编

南京工学院出版社

内容简介

本书与南京工学院出版社已出版的《应用泛函基础》一书配套，搜集编写了难易适度的四百余条题目，每题均有详细解答或提示。内容包括分析初步、度量空间、Banach 空间及 Hilbert 空间四章。

本书可作为工科研究生或应用数学专业学生学习泛函分析的辅助教材，也可供理科、师范院校数学系师生及工程技术人员参考。

泛函分析习题集

楼宇同 李廷保 编

南京工学院出版社出版

南京四牌楼2号

江苏省新华书店发行 南京工学院印刷厂印刷

开本 787×1092毫米 1/32 印张 11 1/16 字数 249千

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数 1－7000 册

ISBN 7-81023-014(X)/O·14

统一书号：13409·008 定价：1.85元

责任编辑 徐步政

前　言

泛函分析是一门比较深入的数学理论课程，要想较好地理解它、掌握它仅靠记住一些定理和命题是不够的，必须通过读者自己去思考、琢磨并完成一定数量的习题才有可能真正地领会这门学科的基本概念和处理问题的基本思想。

几年来，我们在给工科研究生讲授泛函分析课程时，深感缺乏一本合适的习题集。因此，利用教学过程中搜集和使用的题目加以整理编写成此书，旨在帮助初学泛函分析的读者通过一些基本训练达到深化学习的目的。

一本好的习题集应该能激发读者的思考和探索的求知欲，扩展视野，提高提出问题和解决问题的能力。本书遵循这个原则，以基本题为主，循序渐进，适当地安排一些技巧性较强的题目，而且有意识地列入一些读者在已有知识的基础上能够进一步提出和解答的问题。对一些较难的题目，均用 * 号加以区分。

本书和《应用泛函基础》（南京工学院出版社已出版，该书中无习题）一书配套，章节编排顺序与之完全相同，且尽量不涉及《应用泛函基础》教材范围之外的内容，对必须补充的概念均重新加以定义。

为了适合自学者的情况，我们对每个题目都作了较为详细的解答或提示。读者应在独立思考并完成作业后再参看相应的解答，将会收到较好的效果。

应用泛函基础作为研究生一学期的课程，只需完成本书中1/4～1/3的题目，其余可当例题参考。

本书不仅适合于工科研究生，对理科或师范院校数学系的师生也有一定的参考价值，对报考相应数学专业硕士生和博士生的读者更是十分有用的。

鉴于我们水平所限，疏漏与不妥之处，敬请读者指正。

编者　1987年6月

符 号 说 明

$\in$	属于
$\overline{\in}$	不属于
$\subset$、$\supset$	包含符号
$\subsetneqq$、$\supsetneqq$	严格包含符号
$\to$	趋于极限
$\mapsto$	映射到
$\Longrightarrow$	（1）蕴涵；（2）必要性
$\Longleftarrow$	（1）被蕴涵；（2）充分性
$\Longleftrightarrow$	充分且必要条件，等价
$\exists$	存在着，有
$\forall$	对所有，对每一
$\sup$	上确界
$\inf$	下确界
$\overline{\lim}$	上极限
$\underline{\lim}$	下极限
$\cup$	并(集)
$\cap$	交(集)
$m(A)$	集A的 Lebesgue 测度
$\mathring{A}$	集A的内部
A'	集A的导集
$\overline{A}$	集A的闭包
$X\times Y$	集X与Y的积集

$d(x,y)$	点 x 到点 y 的距离
$d(x,A)$	点 x 到集 A 的距离
$V(x_0,r)$	点 x_0 的 r 域邻、开球，也简记为 $V_r(x_0)$
$V[x_0,r]$	点 x_0 的 r 闭邻域、闭球，也简记为 $V_r[x_0]$
$S(x_0,r)$	点 x_0 为心，r 为半径的球面
$\overline{z}$	复共轭
$\|z\|$	绝对值、复数模
$Re(z)$	实部
$Im(z)$	虚部
ϕ	空集
A^c	集 A 的余集
N	自然数集
R	实数集
C	复数集
$R^n(C^n)$	n 维欧氏空间(n 维复欧氏空间)
A^T	矩阵 A 的转置阵
A^*	算子 A 的共轭(伴随)算子
$f(A)$	集 A 的象(集)
$f^{-1}(A)$	集 A 的原象(集)
$\triangleq$	定义为
$L(X, Y)$	是 $X\to Y$ 的全体线性算子构成的空间
$B(X,Y)$	$X\to Y$ 的有界线性算子构成的空间
$B(X)$	$X\to X$ 的全体有界线性算子构成的空间
$C(X,Y)$	紧算子空间
$C[a,b]$	连续函数空间
$C^{(k)}[a,b]$	具有 k 阶连续导数的函数空间

$L^p[a,b]$	p 次幂(L)可积函数空间
$L^\infty[a,b]$	本性有界可测函数空间
l^p	$\sum_{i=1}^{\infty}\|\xi_i\|^p$ 收敛的数列 $(\xi_1,\cdots\xi_n,\cdots)$ 组成的数列空间
l^∞	有界数列空间
c	收敛数列空间
c_0	收敛于 0 的数列空间
X^*	X 的共轭空间
$\dim X$	X 的维数
$\mathrm{dia}A$	集 A 的直径
$\mathrm{span}M$	M 的张成空间
$M^\perp$	M 的正交补
$N(A)$	算子 A 的零空间
$R(A)$	算子 A 的值域
$\\|x\\|$	向量 x 的范数
$\\|f\\|$	泛函 f 的范数
$\\|A\\|$	算子 A 的范数
$[x]$	实数 x 的整数部分

目　录

习　题

提 示 及 解 答

习　　题

第一章　分析初步

§1.1　集合与映射

1．设 $X=\{1,2,3,\cdots,10\}$，　　$A_1=\{2,3\}$，

$A_2=\{2,4,6\}$，　　$A_3=\{3,4,6\}$，　　$A_4=\{7,8\}$，

$A_5=\{1,8,10\}$，A_i^c 是 A_i 在X内的余集　($i=1,2,\cdots,5$)，

试求　$\bigcap\limits_{i=1}^{5} A_i^c$

2．证明　$A\cap(B\cup C\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)$

3．试证下列各式：

（Ⅰ）$A-B=A\cap B^c=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$

（Ⅱ）$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

（Ⅲ）$(A-B)-C=A-(B\cup C)$

（Ⅳ）$A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$

（Ⅴ）$(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

4．证明　$(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$

5．试求等式　$A\cup(B-A)=B$ 成立之充分且必要的条

件。

6．求等式 $(A-B)\cup B=(A\cup B)-B$ 成立之充分且必要的条件。

7．求证（Ⅰ）$(A-B)\cup(C-D)\supset(A\cup C)-(B\cup D)$

（Ⅱ）$(A-B)\cup(C-D)\subset(A\cup C)-(B\cap D)$

且举例说明，上述关系式不能改为等式。

8．设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $E=[a,b]$上实函数列，满足：

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\qquad \forall x\in E$$

求证（Ⅰ）$E(f(x)>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)>c)$

（Ⅱ）$E(f(x)\leqslant c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)\leqslant c)$

其中 c 为任意实数。

9．设映射 f：$X\to Y$，A、$B\subset X$，C、$D\subset Y$，

试证（Ⅰ）$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

$f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

（Ⅱ）$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

$f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

（Ⅲ）$f(f^{-1}(D))\subset D$

$f^{-1}(f(A))\supset A$

10．设f：$X\to Y$，则下列命题等价：

（Ⅰ）f 是单射，即 $\forall x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$ 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$

（Ⅱ）若 $f(x) = f(y)$ 则 $x = y$

（Ⅲ）若 $y \in R(f)$ 则 $f^{-1}(\{y\})$ 为X中独点集。

11．设映射 $f: X \to Y$，则下列命题等价：

（Ⅰ）f 是单射

（Ⅱ）$\forall A$、$B \subset X$，有 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

（Ⅲ）$\forall A \subset X$，$f^{-1}(f(A)) = A$

12．设X为非空集，$A \subset X$，作X上实函数

$$x_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \in A \\ 0 & \text{当 } x \overline{\in} A \end{cases}$$

称 $x_A(x)$ 为集合A的**特征函数**。试证 $x_A(x)$ 具有如下性质：

（Ⅰ）$A = B \iff x_A(x) = x_B(x)$

（Ⅱ）$A = X \iff x_A(x) \equiv 1$

$A = \phi \iff x_A(x) \equiv 0$

（Ⅲ）$A \subset B \iff x_A(x) \leqslant x_B(x)$

（Ⅳ）$x_{A \cup B}(x) = \max(x_A(x), x_B(x))$

$x_{A \cap B}(x) = \min(x_A(x), x_B(x))$

$x_{A-B}(x) = x_A(x) - x_B(x)$ （其中$B \subset A$）

13．设 $A = \{1,2,\}$，$B = \{a,b,c\}$，$C = \phi$ 试求：

$$A \times B, \quad B \times C$$

14．设 $X = \{x; a \leqslant x \leqslant b\}$，$Y = \{y; c \leqslant y \leqslant d\}$，

$Z=\{z;\ -\infty<z<+\infty\}$. 试求：$X\times Y$，$X\times Y\times Z$

15．设 $Z=\{\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$，它是整数集，试证其为可列集。

16．设A为无穷集，证明：存在 $A^*\subset A$，使得

$$A^*\sim A \text{ 且 } A-A^* \text{ 为可列集。}$$

17．设 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 是一个代数方程，如果它的系数a_0，a_1，a_2，$\cdots$，a_n 都是整数，就称该方程为**整系数代数方程**。若Q表示一切整系数代数方程所组成的集合，证明Q为可列集。

18．设 $A=\{I_\alpha;\ \alpha\in\wedge\}$ 是实直线R中一族非空的、彼此不交的开区间，试证A为可列集。

19．设A是一可列集，证明A 的所有有限子集所组成的集合A^*亦为可列集。

（注 A^*中元素实际上是由A中有限个元素所构成的子集合，故有时亦称 A^* 为**集类**。）

20．证明实直线 $R=(-\infty,\ +\infty)$ 为不可列无穷集。

21．证明$(0,\ 1)$中无理数集P为不可列集。

*22．证明平面点集 $A=\{(x,\ y);\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$ 是与 $B=(0,\ 1)$ 对等的不可列无穷集。

*23．设 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$为一列集合，定义：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\stackrel{\Delta}{=}\{x;\ x\text{ 属于}A_n(n\geqslant1)\text{中的无穷多个}\}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\stackrel{\Delta}{=}\{x;\ x\text{ 至多不属于}A_n(n\geqslant1)\text{中的有限个}\}$$

称$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 为集列$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$的**上限集**，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 为集列的**下限集**。试证明：

（Ⅰ）$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$

（Ⅱ）$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$

*24．若有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 称**集列** $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ **极限存在**，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$。试证明：

（Ⅰ）若 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$， 即集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ **单调上升**，则

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

（Ⅱ）若 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$，即集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为**单调下降**，则

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$$

*25．设有集合 A，B 及集列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中

$$E_n=\begin{cases}A & \text{当 } n \text{ 为奇数}\\ B & \text{当 } n \text{ 为偶数}\end{cases}$$

试求集列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 极限存在的充分且必要之条件。

*26．设 $A\subset R$ 且被开区间集 $G=\{I_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ 所覆盖，证明存在 G 的可列子集 G^* 覆盖 A。

§ 1.2 实直线与连续函数

1．设 $A=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;\ n=1,\ 2,\ \cdots\right\}$

$$B=\left\{0,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n}+1;\ n=1,\ 2,\ \cdots\right\}$$

试求：　A'，$\overline{A}$，$\mathring{A}$，B'，$\overline{B}$，$\mathring{B}$．

2．设 A，$B\subset R$，证明：

（Ⅰ）当 $A\subset B$ 时，必有 $A'\subset B'$，$\overline{A}\subset\overline{B}$．

（Ⅱ）$(A\cup B)'=A'\cup B'$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

（Ⅲ）$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$

3．设 $A\subset R$，则下列命题等价：

（Ⅰ）$x_0\in\overline{A}$

（Ⅱ）$\forall\varepsilon>0$，$A\cap V_\varepsilon(x_0)\neq\phi$

（Ⅲ）$\exists x_n\in A$，$n=1$，2，$\cdots$ 使得 $x_n\to x_0$

4．R 中任一点 x 的 ε 邻域均为开集。

5．设 $A\subset R$，证明 A' 为闭集。

6．设 $A\subset R$，求证：

（Ⅰ）$\mathring{A}$为包含于集A的最大开集；

（Ⅱ）$\overline{A}$为包含集A的最小闭集。

7．若G为R中开集，且 $G\cap A=\phi$，试证：

$$G\cap\overline{A}=\phi$$

8．求证（Ⅰ）R 中闭集必为可列个开集的交集；

（Ⅱ）R 中开集必为可列个闭集的并集。

*9．设 $A\subset R$，试证：$A-A'$ 至多可列。

*10．设 $\mathscr{F}=\{G;\ G$为R中开集$\}$　证明：

存在 $\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^{\infty}\subset\mathscr{F}$ 且有

$$\cup\{G\in\mathscr{F}\}=\cup\{G_\lambda;\ \lambda=1,\ 2,\ \cdots\}$$

11．证明 Cauchy 数列是有界的。

12．设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调数列，试证：

（Ⅰ）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则它的任何子列也收敛于 a

（Ⅱ）若∃子数列$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，使得$x_{n_k}\to a$ $(k\to\infty)$
则数列 $x_n\to a$ $(n\to\infty)$

13．求证 Cauchy 数列的子列必为 Cauchy 列。

14．利用柯西准则证明：

（Ⅰ）由 $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ 所成的数列$\{x_n\}$收敛；

（Ⅱ）由 $x_N=\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\cdots+\frac{1}{\ln N}$ 所成的数列$\{x_N\}$发散。

15．设 $X=\left\{\frac{1}{2}\pm\frac{n}{2n+1}\right\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，证明：

$$\inf X=0,\ \sup X=1$$

16．设A为有界数集，则存在 $\{x_n\}$、$\{y_n\}\subset A$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sup A,\ \lim_{n\to\infty} y_n=\inf A$$

17．设函数 $f(x)$，$g(x)$均定义在A集上，试证：

（Ⅰ）$\sup\limits_{x\in A}(f(x)+g(x))\leqslant\sup\limits_{x\in A}f(x)+\sup\limits_{x\in A}g(x)$

（Ⅱ）$\sup\limits_{x\in A}(f(x)+g(x))\geqslant\sup\limits_{x\in A}f(x)+\inf\limits_{x\in A}g(x)$

（Ⅲ）$\inf\limits_{x\in A}(-f(x))=-\sup\limits_{x\in A}f(x)$

*18．设A，B为R上的非空集，定义：

$$d(x,\ y)\overset{\Delta}{=}\inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}}|x-y|$$

称为**集A与B之间的距离**，试证：若A，B为闭集，且A有界，则必有 $x_0\in A$，$y_0\in B$，使得