

恒谦教学与备考研究中心研究成果
全国名牌重点中学特高级教师编写

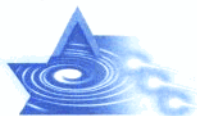
e讲e练

丛书

初三几何

主编 李绍亮

北京教育出版社



恒谦教学与备考研究中心研究成果
全国名牌重点中学特高级教师编写

e讲e练

丛书

初三几何

主 编 李绍亮
撰稿人 李绍亮 唐 敏 李江涛
段春红

北京教育出版社

PDG



恒谦数学与备考研究中心研究成果
全国名牌重点中学特高级教师编写



e 讲 e 练丛书

初三几何

CHUSAN JIHE

主编 李绍亮

*

北京教育出版社出版

(北京北三环中路6号)

邮政编码:100011

网 址: www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

新华书店经销

陕西省印刷厂印刷

*

787×960 16开本 10.375印张 241000字

2002年6月第2版 2002年6月第2次印刷

印数:1-15000

ISBN 7-5303-2434-9

G·2407 定价:10.00元

前

言

▲在学生压力日趋严重的情况下,如何从应试教育向素质教育顺利转变,真正达到减负的效果呢?

▲针对中学各学科教材,教辅图书如何设计编写体例,真正起到行之有效的作用呢?

▲“讲”是纲,“练”是目,如何避开啰唆的讲解,如何从题海战术中跳出,真正做到“讲”中进去“练”中出呢?

▲本丛书的编创立意是精讲精练,科学系统,课时配套,单元提升,力求准确、快捷,真正做到“e 讲 e 练”。

12.4.26.10P

本套丛书所提的“e”字,绝非哗众取宠,而是取意于 E-mail 的第一个字母。现代社会日新月异,“e 网”、“e 教育”、“e 时代”等等,这些都是时代飞速发展的产物,教辅图书亦应适应时代的要求,《e 讲 e 练》丛书正是顺应教育教学改革、照应最新教材的产物。

本套丛书绝非一般的教辅图书,自 2001 年秋季上市后,得到了广大师生的认可和青睐。在接受了诸多师生来信指正、建议后,我研究中心组织了一大批教学一线的特级、高级教师对该丛书进行了认真地修订。全书确立并始终贯穿着与最新教材相互照应,同步辅导,释疑解惑,巩固延伸的主导思想,在总结了众多教辅图书编写的成功经验后,依据最新的教材及教学大纲悉心策划,精心设计,缜密编写而成。

本套丛书力求科学系统地讲解教材的基本内容,使学生容易理解把握,练习设计由浅入深、科学分级,力求避开难题、怪题、旧题、生僻题,展现最新、最妙的题型,真正做到习题科学化。

本套丛书共分 24 册,涵盖了初中、高中语文、数学、英语、物理、化学五门学科。现将本丛书的几大特点介绍如下:

★ “e”化学习 助学减负 本套丛书针对各学科的教材设计栏目,进行了一些有益的探索,严格地讲,她融合了编创集体最新的研究成果,是一套易学易懂、易学易练的助学读物。该丛书既正确处理了社会需求、学生发展与教材固有限制作用的关系,又

把握住了具有普遍意义的行之有效的思维方法,从根本上使求知更轻松,对助学的效果颇大。

★ 讲练互动 “e”品同步 “讲”是教师导入,“练”是学生锻造。老师讲得透彻入微,学生练得炉火纯青,这样才能达到“教”与“学”的互动,使学生学有所练,练有所长,长有所成。故而我们设置【教材完全解读】以助讲,配备【基础巩固】、【综合反馈】以助练。

本丛书的编写确保广、快、精、准地获得所需信息,以使传统的教辅制作理念革故鼎新;在全面覆盖每一学科、每一单元(章)、每一课时(节)主干知识的前提下,精选与学科相关的热点问题,突出开放性、独创性和前瞻性;始于教材,升华教材,引导学生从狭隘的书本走向广阔的现实生活的舞台。

★ 题解分离 讲解到位 本套丛书习题设计力求多元化,遵循由浅入深、由易到难的认知规律。习题量充足,梯度明显,题后不作解答,留有适当空白,便于学生自我检测,解答统一附于单元(章)或书后以供对照。习题解评力求多解、详尽,体现发散思维,启发诱导学生举一反三,同时也便于老师指导参阅。

★ 点睛之笔 复习整合 理科独有的每单元(章)后的本章复习整合,将学习的层次向中、高考方向予以提升,以达到从课时(节)内到单元(章)后的融会贯通,达到从低处入手、向高处攀登之后欣然回首时“一览众山小”的感悟和喟叹!

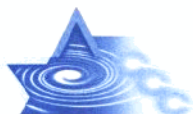
★ 个性设计 事半功倍 教材习题解答栏目简洁、准确地对教材中的习题进行了逐一解答,以供学生在日常学习中参照。

★ 新颖开本 喜闻乐见 本丛书采用国际流行的小16开本,既方便学生使用,又与时尚同步。

本书在编著过程中,得到了教育界有关同仁和教学一线部分师生的鼎力支持,在此表示衷心感谢。限于水平,书中难免有疏漏之处,敬请读者不吝指正,我们将在再版时认真修订,以进一步提高丛书质量。

恒谦教学与备考研究中心

《e讲e练》丛书编委会



e讲e练

（高中）

恒谦教学与备考研究中心最新成果
全国重点中学特高级教师联合编写
丛书主编 方可

（高中）

（高中）

（高中）

（高中）

（高中）

（高中）

（高中）

（高中）

（高中）

（高中）

编委会

总策划 恒谦教学与备考研究中心

丛书主编 方可

编委 (按姓氏笔画为序)

马 骏 王云红 冯力群 邹小鹏

刘 虹 刘玉才 安振平 孙宗坤

李 荧 李绍亮 陈炳玉 范晓晖

段春红 施秉忠 施晓瑜 郭启军

梁德生 谢若钢 熊亚旗 熊晓燕

潘春雷 戴明礼

目录

第六章 解直角三角形

6.1 正弦和余弦	(2)
6.2 正切和余切	(5)
6.3 解直角三角形	(8)
6.4 应用举例	(11)
6.5 本章复习整合	(16)
6.6 全章综合测试	(22)
本章习题解评	(23)

第七章 圆

7.1 圆	(40)
7.2 过三点的圆	(43)
7.3 垂直于弦的直径	(46)
7.4 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系	(49)
7.5 圆周角	(52)
7.6 圆内接四边形	(56)
7.7 直线和圆的位置关系	(59)
7.8 切线的判定和性质	(61)
7.9 三角形的内切圆	(64)
7.10 切线长定理	(67)
7.11 弦切角	(71)
7.12 和圆有关的比例线段	(75)
7.13 圆与圆的位置关系	(80)
7.14 两圆的公切线	(85)
7.15 相切在作图中的应用	(90)
7.16 正多边形和圆	(92)
7.17 正多边形有关计算及画法	(94)
7.18 圆周长、弧长	(96)

目录

7.19	圆、扇形、弓形的面积.....	(98)
7.20	圆柱和圆锥的侧面展开图	(101)
7.21	本章复习整合	(103)
7.22	全章综合测试	(116)
本章习题解评.....		(119)
教材习题解答.....		(153)

第六章

解直角三角形

本章纵览

学校升旗仪式时,某同学站在离旗杆底部 24m 处行注目礼,当国旗升至旗杆顶端时,该同学视线的仰角恰为 30° ,若双眼离地面 1.5m,则旗杆高度是多少呢?

这个问题,翻译成几何语言,即如图 6-1 所示: $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 30^\circ$, $AC = 24\text{m}$, $AD = 1.5\text{m}$, 求: BE 的长. 即在一个直角三角形中, 已知一个锐角和一条边长, 求另一边长, 如何计算呢?

直角三角形是一种特殊的三角形, 除直角外, 还有两个锐角及三条边共五个元素. 我们已知道: 直角三角形的两个锐角互为余角; 斜边的平方等于两直角边的平方和(勾股定理). 除此之外, 边与角又有什么关系呢? 在解决一些实际问题中, 是否需要对这些元素——测量呢? 测量哪些元素, 就可计算出其他元素呢? 本章将对这些问题进行讨论、研究.

本章主要内容是锐角三角函数的概念、性质、应用及直角三角形的性质、解法、应用. 在锐角三角函数的概念中, 反映了角度与边的比值之间的一一对应关系. 因此直角三角形中的边与角也存在相互关系. 所以, 锐角三角函数是解直角三角形的基础, 学习中不仅要分清概念, 还要明白各种符号的含义. 解直角三角形, 是由直角三角形中除直角外的已知元素, 求所有未知元素的过程. 解直角三角形的知识, 在实际生活、科学试验、生产实践等方面都有广泛的应用, 常用来计算距离、高度、角度和面积等. 在应用直角三角形的知识解决实际问题时, 关键是把实际问题数学化. 解题时, 要利用图形的直观、生动性, 注意运用数形结合的思想方法.

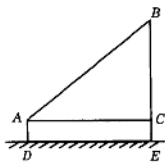
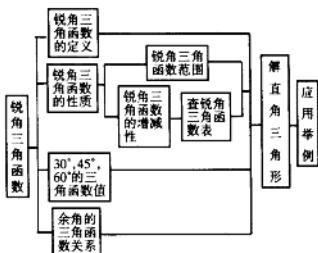


图 6-1

知识框图



6.1 正弦和余弦

【教材完全解读】

我们知道,在直角三角形中,30°角所对的直角边等于斜边的一半.即在直角三角形中,锐角 $A=30^\circ$ 时, $\angle A$ 的对边与斜边的比值也是一个定值,如图 6-2,直角三角形 $AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3, \dots$ 由于 $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2 \sim \triangle AB_3C_3, \dots$

$$\therefore \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \dots$$

若图中 $\angle A=30^\circ$,则有上式的比值都等于一个定值 $\frac{1}{2}$,即

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \dots = \frac{1}{2}.$$

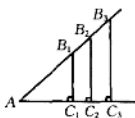


图 6-2

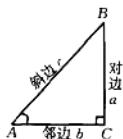


图 6-3

在直角三角形中,如图 6-3,如果锐角 A 取一个定值, $\angle A$ 的对边与斜边的比值也是一个定值.因此,我们定义“锐角 A 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的正弦.”记作“ $\sin A$ ”.

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}.$$

同样,定义:锐角 A 的邻边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的余弦,记为“ $\cos A$ ”.

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}.$$

$$\text{当 } \angle A=30^\circ \text{ 时, } \sin A = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

利用勾股定理,还有 $\cos A = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为锐角三角函数值是建立在相似理论基础上的,它反映了直角三角形边的比与锐角之间的相依关系,只有正确理解认识锐角三角函数的符号的真正含义,知道了正弦、余弦的意义才能真正理解直角三角形中边、角之间的关系.

正弦、余弦的主要性质有:

1. 当锐角 A 取任意一个定值时, $\sin A, \cos A$ 也是一个定值.

$$2. 0 < \sin A < 1, 0 < \cos A < 1.$$

$$3. \sin A = \cos(90^\circ - A),$$

$$\cos A = \sin(90^\circ - A).$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ, \angle A + \angle B=90^\circ$.

$$\angle B=90^\circ - \angle A, \sin A = \frac{a}{c}, \cos B = \cos(90^\circ -$$

$$A) = \frac{a}{c}.$$

$$\therefore \sin A = \cos(90^\circ - A).$$

$$\text{同理 } \cos A = \sin(90^\circ - A).$$

4. 在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 之间,正弦值随着角度的增大而增大,余弦值随着角度的增大而减小.

5. 正弦、余弦之间的一个重要关系式:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

由 $\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c}, a^2 + b^2 = c^2$, 两边同除以 c^2 , 有 $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$

$$\therefore \sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

在学习正弦、余弦的概念和性质时,可利用图形的直观性,结合图形理解,建立形与数之间的关系,为顺利解题找到途径.

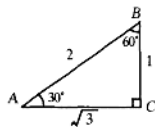


图 6-4

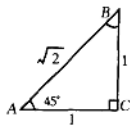


图 6-5

对一些特殊的直角三角形,如图 6-4 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ, \angle A=30^\circ, \angle B=60^\circ$, 则三

边的比例为 $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$. 如图 6-5, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=\angle B=45^\circ$, 则 $a:b:c=1:1:\sqrt{2}$. 熟记边的比例关系, 特殊角 $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ 的正弦、余弦值就便于理解、记忆了.

【好题妙解】

题1 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 如果各边长度同时都扩大 2 倍, 那么锐角 A 的正弦值为().

- A. 扩大两倍 B. 缩小两倍
C. 不变 D. 不能确定

题2 求适合下列式子中的锐角 α :

(1) $2\cos\alpha - \sqrt{3} = 0$,

(2) $2\sin^2\alpha - 1 = 0$.

解

题3 利用几何法求 $\sin 15^\circ$ 的值.

解

题4 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, 化简

$$\sqrt{(1 - \sin\alpha)^2} + |\sin\alpha - 2| + 1.$$

解

题5 已知: $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$,

求: (1) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ 的值;

(2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ 的值.

解

【基础巩固】

1. 用三角函数符号表示下列语言:

(1) $43^\circ 20'$ 的正弦, 记作_____.

(2) 45° 的正弦与 60° 的余弦的和, 记作_____.

(3) $(90^\circ - \alpha)$ 角的余弦, 记作_____.

2. 选择题

(1) 若 α 是锐角, 且 $\cos\alpha = \sin 54^\circ$, 则 α 等于().

- A. 54° B. 36° C. 46° D. 55°

(2) 下列各式不正确的是().

A. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

C. $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) 下列各式中正确的是().

A. 当 $\sin\alpha = \sin\beta$ 时, 锐角 $\alpha = \beta$

B. $\sin\alpha > \sin\beta$

C. $\cos 30^\circ + \cos 30^\circ = \cos 60^\circ$

D. $\sin 30^\circ + \sin 30^\circ = \sin 60^\circ$

(4) 当 α 为锐角时, 且 $\cos\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$, α 取值范围是().

A. $0^\circ < \alpha < 30^\circ$ B. $30^\circ < \alpha < 60^\circ$

C. $30^\circ < \alpha < 90^\circ$ D. $30^\circ < \alpha < 45^\circ$

3. (1) 求适合下列式子中的锐角 α :

$$2\sin\alpha - 1 = 0.$$

(2) 已知 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, 求 $\cos\alpha = ?$

解

4. 计算题

$$(1) \sin 45^\circ - 4\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + 2\sqrt{6} \cdot \cos 60^\circ$$

$$(2) \sin 90^\circ \cdot \cos 0^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ$$

$$(3) 4\sin 54^\circ - 5\cos 36^\circ + \sqrt{2}\sin 45^\circ - \sqrt{(\cos 36^\circ - 1)^2}$$

解

5. 已知 α 是锐角, 化简 $\sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1}$.

解

【综合反馈】

1. 选择题

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $a=5, b=12, c=13$, 则 $\sin A$ 的值为().

A. $\frac{8}{17}$

B. $\frac{5}{13}$

C. $\frac{8}{15}$

D. $\sin A$ 的值不能确定

(2) 下列各式中正确的是().

A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$

B. $2\cos 30^\circ - \cos 60^\circ = 0$

C. $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ D. $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$

2. 设 $\angle A, \angle B, \angle C$ 是 $\triangle ABC$ 的三个内角,

求证: $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$.

证明

3. $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别是 $a, b, c, \angle C = 90^\circ$, 且 $c^2 + 4a^2 = 4ac$.

求 $\sin A$ 的值.

解

4. 如图 6-6, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, CD 是斜边上的高, 分别写出等于 $\angle B$ 的正弦、余弦的线段的比, 这样的比有几个?

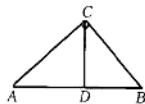


图 6-6

解

5. 已知 α, β 是直角三角形的两个锐角且 $\sin \alpha, \sin \beta$ 是方程 $4x^2 + ax + 1 = 0$ 的两个根, 求 a 的值.

解

6.2 正切和余切

【教材完全解读】

如图 6-7, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 我们定义: $\angle A$ 的对边与邻边的比叫做 $\angle A$ 的正切, 记作 $\tan A$.

$$\text{即 } \tan A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的邻边}} = \frac{a}{b}.$$

并把 $\angle A$ 的邻边与对边的比 (即 $\tan A$ 的倒数) 叫做 $\angle A$ 的余切, 记作 $\cot A$.

$$\text{即 } \cot A =$$

$$\frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\angle A \text{ 的对边}} = \frac{1}{\tan A} =$$

$$\frac{b}{a}.$$

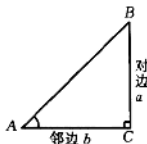


图 6-7

正切、余切与正弦、余弦情况类似, 当锐角 A 取任意一个固定值时, 正切、余切也是一个定值.

正切、余切的主要性质有:

(1) 当锐角 A 取任意一个定值时, 它的正切、余切都是定值.

(2) 任意锐角的正切值 (余切值) 等于它的余角的余切值 (正切值).

$$\text{即 } \tan A = \cot(90^\circ - A),$$

$$\cot A = \tan(90^\circ - A).$$

(3) 当角度从 0° 增加到 90° 时, 它的正切值从 0 开始逐渐增大, 而余切值逐渐减小到 0.

(4) 正切、余切之间的重要关系是互为倒数关系: $\tan A \cdot \cot A = 1$.

在直角三角形中, 我们学习了 $\angle A$ 的正弦 $\sin A$, $\angle A$ 的余弦 $\cos A$, $\angle A$ 的正切 $\tan A$, $\angle A$ 的余切 $\cot A$, 把它们叫做 $\angle A$ 的锐角三角函数值. 由定义知, 锐角三角函数都不可能取负值.

我们学习了锐角 A 的三角函数, 理解、掌握它们的定义和使用它们的性质, 是学好本章内容的关键, 也是为以后学习三角知识奠定基础. 有了锐角三角函数的概念, 对解直角三角形, 引入任意角三角函数的值都有了基础, 因此它是我们学习的重点和难点.

为了方便使用, 下表列出一些特殊角的三角函数值:

三角函数值 \ 角度	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

特殊角的三角函数值应熟记, 便于化简或计算含三角函数的代数式的值及求特殊角.

此外, 还需掌握查“正弦和余弦”、“正切和余切”表的技能, 及四个锐角三角函数值之间的关系:

$$\text{平方关系: } \sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

$$\text{倒数关系: } \tan A = \frac{1}{\cot A}.$$

$$\text{商的关系: } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

这是我们巧解三角函数问题的基础和依据, 特别是对非特殊角问题.

【好题妙解】

题1 求下列各式的值

$$(1) 5\cot 30^\circ - 2\cos 60^\circ + 2\sin 60^\circ + \tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ;$$

$$(2) \cos^2 60^\circ + \frac{\tan 0^\circ}{\sin 90^\circ} - \frac{1}{\sin^2 30^\circ} + 4\tan^2 45^\circ.$$

解

题2 如图6-8, 在等腰三角形中, $AB = AC$, 如果 $AB = 2BC$, 求 $\angle B$ 的四个三角函数值.

解

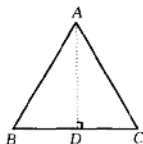


图 6-8

题3 求适合下列各式的锐角

$$(1) 2\cot \alpha \cdot \sin \alpha = \sqrt{3};$$

$$(2) \cot^2 \alpha - (1 + \sqrt{3})\cot \alpha + \sqrt{3} = 0.$$

解

题4 已知 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, α 是锐角.

求: $\sin \alpha$; $\tan \alpha$; $\cot \alpha$.

解

【基础巩固】

1. 选择题

(1) $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 下列各式中不一定成立的是().

- A. $\tan A = \cot B$ B. $\cot A = \tan B$
C. $\tan A = \tan B$ D. $\sin A = \cos B$

(2) 当 $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时, 下列各式正确的是().

- A. $\tan \alpha > \cos \alpha > \sin \alpha$
B. $\cos \alpha > \tan \alpha > \sin \alpha$
C. $\sin \alpha > \tan \alpha > \cos \alpha$
D. $\tan \alpha > \sin \alpha > \cos \alpha$

(3) 当锐角 $A < 30^\circ$ 时, $\cot A$ 的值().

- A. 大于 $\sqrt{3}$ B. 小于 $\sqrt{3}$
C. 大于 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 小于 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(4) 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = m$, $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = n$, 则 m, n 的关系是().

- A. $m = n$ B. $m = 2n + 1$
C. $m^2 = 2n + 1$ D. $m^2 = 1 - 2n$

(5) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\tan A = 3$, $AC = 10$, 则 $S_{\triangle ABC}$ 等于().

- A. 3 B. 300 C. $\frac{50}{3}$ D. 150

(6) 已知 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan \frac{A+B}{2} = 1$, 则下列关系式中成立的是().

- A. $\sin A = \sin B \cdot \sin C$ B. $\cos A = \sin B \cdot \sin C$
C. $\sin C = \sin A + \sin B$ D. $\cos A = \cos B$

(7)如图 6-9, $\angle ACB = 45^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$, M 在 BC 的延长线上, 且 $CM = AC$, 则 $\cos 22^\circ 30'$ 等于 ().

- A. $\sqrt{2} + 1$
 B. $\sqrt{2} - 1$
 C. $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$
 D. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

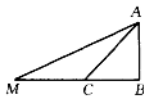


图 6-9

2. 计算式化简

- (1) $\tan 44^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 46^\circ$;
 (2) $(1 + \sin 45^\circ - \cos 30^\circ)(1 - \sin 45^\circ - \cos 30^\circ)$;
 (3) $\frac{\tan 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 60^\circ}{\tan 0^\circ + \cot 60^\circ \cdot \cos 30^\circ}$;
 (4) $\sqrt{1 - 2\sin 27^\circ \cdot \cos 27^\circ}$.

解

3. 解答下列各题

- (1) 已知 α 为锐角, 且 $\frac{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}{2\sin\alpha - \cos\alpha} = 2$, 求 $\tan\alpha$ 的值.

解

- (2) 已知 $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$, 求: ① $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ 的值;

② $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ 的值.

解

4. 求下列式子中的锐角 A

- (1) $\sqrt{3}\tan(A - 30^\circ) = 1$;
 (2) $4 \cdot \sin A \cdot \cos(90^\circ - A) = 1$.

解

【综合反馈】

1. 填空题

若 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\sin\alpha = 3m - 3$, 则 m 的取值范围是_____.

2. 已知 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, 且 α 是锐角, 求: $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

解

3. 已知: $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 求 $2\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ 的值.

解

4. 已知 $2 + \sqrt{3}$ 是方程 $x^2 - 5x \cdot \sin \theta + 1 = 0$ 的一个根, 且 θ 为锐角, 求 $\tan \theta$ 的值.

解

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a \cdot \cos B = b \cdot \cos A$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解

6.3 解直角三角形

【教材完全解读】

三角形的组成元素有 3 条边和 3 个内角, 但在直角三角形中, 除直角外, 一共有 5 个元素, 即 3 条边和 2 个锐角, 在直角三角形中除直角外的已知元素, 求出所有未知元素的过程叫做解直角三角形.

直角三角形中各元素之间, 存在着一定的内

在联系, 要熟练掌握直角三角形的解法, 需对以前所学的相关知识进行归纳总结:

如图 6-10 所示, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$,

(1) 三边之间的关系: 勾股定理 $a^2 + b^2 = c^2$;

(2) 锐角之间的关

系:

$$\angle A + \angle B = 90^\circ;$$

(3) 边角之间的关

系:

$$\sin A = \cos B = \frac{a}{c},$$

$$\cos A = \sin B = \frac{b}{c},$$

$$\tan A = \cot B = \frac{a}{b},$$

$$\cot A = \tan B = \frac{b}{a}.$$

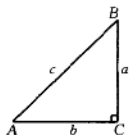


图 6-10

以上各式, 体现了直角三角形中元素之间的关系, 解直角三角形, 即可利用以上关系, 但需已知其中的 2 个元素 (至少有 1 个是边), 即可求出其余的 3 个元素. 选用公式时, 应尽量直接使用题目中的已知条件, 可借助于图形进行分析, 把抽象的内容具体化, 选用原始数据, 减少计算过程中的误差.

解直角三角形有以下四类基本题型:

(1) 已知斜边和一直角边 (如斜边 c , 直角边 a), 由 $\sin A = \frac{a}{c}$, 即可求 A , 从而

$$B = 90^\circ - A, b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

(2) 已知斜边和一锐角 (如斜边 c , 锐角 A), 可先求出 $B = 90^\circ - A$, 从而

$$a = c \cdot \sin A, b = c \cdot \cos A.$$

(3) 已知一直角边和一锐角 (如 a, A), 则 $B = 90^\circ - A, b = a \cdot \cot A$, 以及 $c = \frac{a}{\sin A}$.

(4) 已知两直角边 (如 a, b) 可先求出 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, 由 $\tan A = \frac{a}{b}$, 求出 A , 从而 $B = 90^\circ - A$.

解直角三角形, 关键是从已知条件入手, 合理、恰当、正确地选择边与边、角与角、边与角之间