

第7篇 控制与系统

主 编 执 笔者	深 秋	尾 影	毅 雄	(東京工業大学)
	安 藤	和 昭	(早 稲 田 大 学)	
	伊 藤	正 美	(京 都 大 学)	
	茅 陽	一	(名 古 屋 大 学)	
	北 森	俊 行	(東 京 大 学)	
	佐 藤	孝 平	(電 子 技 術 總 合 研 究 所)	
	坂 和	愛 幸	(大 阪 大 学)	
	示 村	悦 二 郎	(早 稲 田 大 学)	
	首 藤	勝 久	(三 菱 電 機)	
	田 村	久	(横 河 電 機 製 作 所)	
	中 村	嘉 平	(名 古 屋 大 学)	
	西 川	禰 一	(京 都 大 学)	
	長 谷	健 介	(東 京 工 業 大 学)	
	原 島	文 雄	(東 京 大 学)	
	松 本	吉 弘	(東 京 芝 浦 電 氣)	
	森 永	智 昭	(東 京 工 業 大 学)	

译 者	李月景
校 者	王逸民 谢新民

目 录

第1章 反馈控制理论	7-1	第4章 伺服机构	7-46
1.1 线性控制系统	7-1	4.1 伺服机构的组成	7-46
1.2 采样控制系统	7-8	4.2 伺服机构的设计	7-46
1.3 非线性控制系统	7-14	第5章 过程控制	7-49
1.4 随机(统计)控制系统	7-17	5.1 反馈过程控制	7-49
第2章 系统控制理论	7-19	5.2 顺序控制	7-52
2.1 线性系统理论	7-19	5.3 顺序控制的应用领域	7-55
2.2 稳定理论	7-25	第6章 计算机控制	7-55
2.3 最佳控制理论	7-26	6.1 计算机控制系统	7-55
第3章 系统的规划与分析	7-32	6.2 控制用计算机	7-58
3.1 系统的最佳化技巧	7-32	6.3 控制用计算机的软件	7-61
3.2 系统的建模(模型化)及仿真(模拟)	7-36	6.4 实例	7-64
3.3 大规模系统	7-39	参考文献	7-69
3.4 适应与学习	7-42		

第1章 反馈控制理论

1.1 线性控制系统⁽¹⁾

1.1.1 动态系统与传递函数 当用输入输出
的因果关系表征系统时,若某瞬时的输出仅决定于
该瞬时的输入,则那种系统是静态系统;若输出还
受以前输入的影响,则属动态系统。因此,动态系
统可以看作包含有存贮以前输入影响的积分器。而
且要引入与积分器数目相等的变量,作为联系输入
变量与输出变量的内部变量,来规定系统的内部状
态。这种变量称为状态变量(见图1)。积分器的
数目有限的系统称为集中参数系统,而数目无限的
系统则称为分布参数系统。用状态变量来描述集
中参数系统的关系如下

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (1)$$

$$y = g(x, u, t) \quad (2)$$

式中, x 为 n 维状态变量的矢量; u 为 p 维输入
变量的矢量; y 为 r 维输出变量的矢量; $\dot{x}$ 表示
(d/dt) x 。式(1)就称为状态方程式,式(2)
称为输出方程式或观测方程式。



图 1

当函数 f 、 g 不是时间 t 的显函数,并且状态
变量与输入变量成线性关系时,系统就成为常系数
线性系统。于是对于单一输入、单一输出的情况,
 u 、 y 就变为标量,则可写成

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (3)$$

$$y = c'x + du \quad (4)$$

式中, A 是 $(n \times n)$ 常数矩阵; b 、 c 是 n 维常
数矢量; d 是标量。 a'^n 表示矢量转置。对常系数
线性系统式(3)、(4)进行拉普拉斯变换,设初
始值为零,则输入输出关系变成

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = c'(sI - A)^{-1}b + d \quad (5)$$

其中

$$\tilde{y}(s) = \mathcal{L}[y(t)] \quad (6)$$

$$\tilde{u}(s) = \mathcal{L}[u(t)] \quad (7)$$

$G(s)$ 称为传递函数。那么

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} \quad (8)$$

由此,式(5)变成

$$G(s) = \frac{c' \text{adj}(sI - A)b}{|sI - A|} + d \quad (9)$$

由于 $|sI - A|$ 是 s 的 n 阶多项式, $\text{adj}(sI - A)$ 的所有
环节都是 $(n-1)$ 阶以下的多项式, $c'(sI - A)^{-1}b$
就成为分母比分子高一阶以上的 s 的有理函数。
 $d \neq 0$ 时,有理函数 $G(s)$ 的分母和分子多项式
的阶数相同; $d = 0$ 时,分母的阶数比分子高。
 $|sI - A| = 0$ 是 s 的 n 阶代数方程式,称为特征方
程式

$$|sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (10)$$

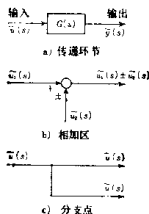


图 2

特征方程式的根称作系统式(3)、(4)的本
征根、特征根或传递函数式(5)的极点。并且,

① 本篇中ベクトル(Vector)均译为矢量,以示与相
量(phaser)有别。——译者注

对于传递函数式(5)的分子多项式等于零的代数方程的根,称为传递函数式(5)的零点。

1.1.2 方块图 对于单一输入单一输出的常系数线性系统,其方块图中的三个基本单元如图2所示。至于传递环节的连接,则在图3中示出了三种基本的连接方式。

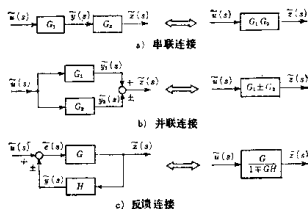


图 3

1.1.3 单位阶跃响应 取输入 $u(t)$ 为单位阶跃函数

$$u(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} *$$

$$* \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (11)$$

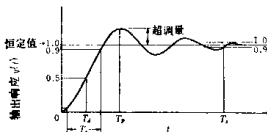
则系统式(5)的输出 $y(t)$ 可由下式计算

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right] \quad (12)$$

对单位阶跃输入的响应,称为单位阶跃响应,它在表征系统的过渡特性方面具有重要意义。

关于单位阶跃响应,由图4所示的量来定义。

一阶惯性环节 $[G(s) = K/(1+Ts)]$, 二阶环节 $[G(s) = \omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)]$, 具有零点的二阶环节 $[G(s) = 2(\zeta + z)/\omega_n^2 (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)]$, 三阶



T_r : 上升时间, T_d : 延迟时间, T_r : 峰值时间, T_s : 调整时间

图 4

环节 $[G(s) = 2p/(s^2 + 2s + 2)(s + p)]$ 的单位阶跃响应, 分别示于图5~8。

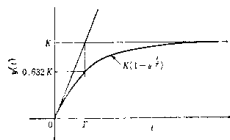


图 5

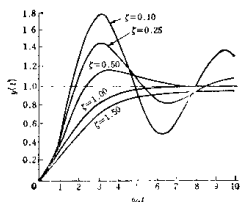


图 6

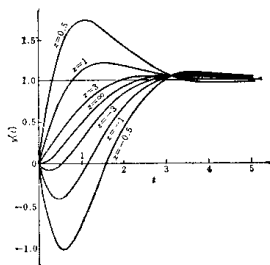


图 7

1.1.4 频率响应 用 $s = j\omega$ 代入线性系统的传递函数 $G(s)$ 中, 得到 $G(j\omega)$, 就称为频率传递函数。由于 $G(j\omega)$ 是复数, 则可表示成

$$G(j\omega) = |G|e^{j\varphi} \quad (13)$$

通常称 $|G|$ 为增益, φ 为相角。若线性系统稳定, 则频率传递函数能对对各种频率 ω 的正弦波输入的恒定输出响应(成为相同频率的正弦波信号)上计算得到。也就是说, 当输入是 $X \cos \omega t$, 恒定输出响

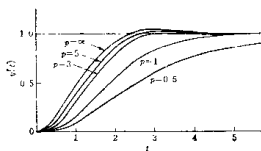


图 8

应为 $Y \cos(\omega t + \theta)$ 时, 则能算出式 (13) 的 $|G|$ 及 φ 为

$$|G| = \frac{Y}{X}, \quad \varphi = \theta \quad (14)$$

这意味着式 (14) 的 $|G|$ 及 φ 与 ω 的关系而被称作频率特性或频率响应。

由于增益 $|G|$ 及相角 φ 是频率 ω 的函数, 当频率 ω 在 $\omega = -\infty \sim 0 \sim +\infty$ 间变化时, 可在复平面上描绘出 $G(j\omega)$ 的轨迹。这种轨迹称为奈奎斯特 (Nyquist) 线图或矢量轨迹。如果这一轨迹的 $\omega = -\infty \sim 0$ 部分与 $\omega = 0 \sim +\infty$ 部分对实轴对称, 则计算时只描出 $\omega = 0 \sim +\infty$ 部分的轨迹即可。图 9 所示为二阶环节 $G(s) = \omega_n^2 / (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ 的矢量轨迹。

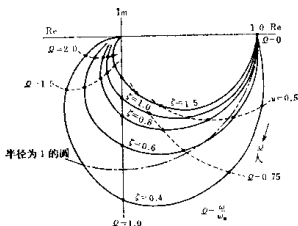


图 9

在纵轴上取增益 $|G(j\omega)|$ 的对数值 $20 \log_{10} |G|$ (单位为分贝) 及相角 φ (单位为度), 在横轴上取角频率 ω (单位为 rad/s) 的对数分度, 这样得到的频率特性图称为伯德 (Bode) 图。而且, 特别把增益相对于频率的线图称为增益图, 把相角相对于频率的线图称为相位图。

伯德图与奈奎斯特图相比有以下几项特点:

(1) 由于角频率 ω 的分度取对数值, 则在同一图上可表示非常宽的频率范围, 并且把角频率 ω 的对数值上 1:10 的间隔称作 1 个 10 倍频 (1 decade 简称为 dec)。

(2) 由于增益用对数量表示, 环节的乘积 $\odot$ 的增益可以表示成线图上各个环节增益的代数和。因此, 只需作出基本传递环节 (为积分环节, 一惯性环节, 二阶振荡环节) 的伯德图, 则一般通用的传递环节的伯德图就容易从这些线图的和来获得。

(3) 因为以直线来近似折线 (二阶振荡环节不能近似, 但容易作出低频部分及高频部分的渐近线 (直线)), 对于增益图可简单地得到大致的频率特性。

(4) 对于最小相位变迁系统, 当其传递函数的极点及零点仅处于复平面上左半面时, 其相角特性单一地决定于增益线图的倾斜度, 尤其是期望频率的相角受其频率增益倾斜度的影响最大 (伯德定理), 从而, 对于最小相位变迁系统, 只要知道了增益线图, 即能大略知道有关的频率特性, 并容易计算出必要的相应相角特性。图 10、11 分别表示一惯性环节 $G(s) = 1/(1+Ts)$, 二阶振荡环节 $G(s) = \omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ 的伯德图。

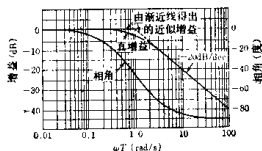


图 10

1.1.5 反馈控制系统的基本性质 反馈控制

系统 (图12) 的主要目的是在各种非于期外干扰 (外加扰动, 参数扰动, 初始值扰动) 存在的前提下, 要将控制对象的输出量 (被控量) 与希望值 (目标值或给定值) 保持一致。这种使被控量跟踪任意变化的给定值的问题, 称为随动控制问题或伺服问题。在给定值恒定的情况下, 则称为定值控制问题或调节问题。这里, 外加扰动 (负荷扰动之类) 是

⊙ 环节相串联。——译者注

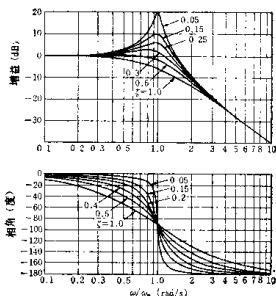


图 11

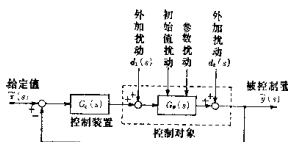


图 12

指加在系统中的线性外扰动；参数扰动则指引起动态特性测定（所谓同定）误差、动作中的动态特性的变动、由非线性线性化引起的误差等的动态特性微小波动；此外，初始值扰动是指控制期间在初始时刻状态恒定值的偏移。因此抑制外扰动及跟踪目标值就成为反馈控制系统的主要任务。要达到这目的，首先必须稳定系统。

图12可视为最标准的反馈控制系统。系统是稳定的，对于控制对象，除了外加扰动 $d_1(s)$ 及 $d_2(s)$ 外，还作用有使传递函数 $G_p(s)$ 变动的参数扰动及表示初期状态偏离恒定值的初始值扰动。首先，假设系统是稳定的，在足够的时间内可消除初始值扰动；其次，为了考察因控制对象传递函数 $G_p(s)$ 的变动对闭环传递函数 $\bar{y}(s)/F(s) = W(s)$ 的影响，要计算 $W(s)$ 对于 $G_p(s)$ 变动的敏感度。设 $G_{ps}(s)$ 、 $W_0(s)$ 为变动前的传递函数， $G_{pv}(s)$ 、 $W_v(s)$ 为变动后的传递函数， ΔG_p 、 ΔW 为变动部分，即得

$$G_{pv} = G_{ps} + \Delta G_p \quad (15)$$

$$M_v = W_0 + \Delta W \quad (16)$$

$$W_0 = \frac{G_c G_{ps}}{1 + G_c G_{ps}} \quad (17)$$

$$W_v = \frac{G_c G_{pv}}{1 + G_c G_{pv}} \quad (18)$$

因此， $W(s)$ 对于 $G_p(s)$ 变动的敏感度（所谓伯德 (Bode) 敏感度）定义为：

$$S = \frac{\Delta W/W_0}{\Delta G_p/G_{ps}} \quad (19)$$

而

$$S = \frac{1}{1 + G_c G_{ps}} \quad (20)$$

因此，若 $(1 + G_c G_{ps})$ 增加，敏感度 S 就减小，即使控制对象变化，对闭环传递函数的影响也会减小。 $1 + G_c G_{ps}$ 称为送还差。要使送还差增大，开环传递函数 ($G = G_c G_p$) 的增益大些为好，结果如要抑制参数扰动，开环传递函数的增益宜增大。此外，从外加扰动 $\tilde{d}_1(s)$ 及 $\tilde{d}_2(s)$ 到输出 $\tilde{y}(s)$ 的传递函数为

$$\frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{d}_1(s)} = \frac{G_{ps}}{1 + G_c G_{ps}} = S G_{ps} \quad (21)$$

$$\frac{\tilde{y}(s)}{\tilde{d}_2(s)} = \frac{1}{1 + G_c G_{ps}} = S \quad (22)$$

若送还差变大（若增加开环传递函数的增益），输出（被控制量） $\tilde{y}(s)$ 受扰动的影响就能减小。但是，对于扰动 $\tilde{d}_1(s)$ ，由于增大 G_c 的增益，开环传递函数 $G = G_c G_p$ 的增益必然增大。一般，由于提高扰动输入点前传递函数的增益，开环增益变大的话，则能得到抑制扰动的效果。并且，由于从给定值 $\tilde{r}(s)$ 到输出 $\tilde{y}(s)$ 的闭环传递函数为 (17) 式，若增加开环增益，就使 $W_0(s) \approx 1$ ，则亦能提高跟踪给定值的效果。

因此，就提高跟踪给定值及抑制扰动的效果而言，一般开环增益宜大，但是，即使开环增益增加，由于开环传递函数 $G_c G_p$ 一般是复数频率函数 s 的有理函数，其处理也不那么简单，还必须考虑其稳定性。通常，为了评价给定值的跟踪性能和干扰的抑制性能，必须研究稳态特性及动态特性（速度响应性及稳定性）。

1.1.6 稳定判据 反馈控制系统是否稳定，可研究系统方程式的系数来判别。由特征方程式的

系数作出稳定判别的方法有劳斯判据及霍尔维茨(Hurwitz's)判据。本书介绍霍尔维茨判据。

设图12的系统特征方程式为式(10),由特征方程式的系数列出行列式(23)

$$H_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-2} & a_{n-3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \quad (23)$$

作出行列式(23)的子行列式,称为霍尔维茨行列式。

$$H_1 = a_{n-1} \quad (24)$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ 1 & a_{n-2} \end{vmatrix} \quad (25)$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad (26)$$

$\vdots$

霍尔维茨稳定判据叙述如下:

「图12系统稳定的主要条件是下列(i)、(ii)式成立:

(i) 特征方程式的系数 $a_i (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 全部为正;

(ii) 霍尔维茨行列式 $H_i (i = 2, 3, \cdots, n-1)$ 全部为正($n < 3$ 时,无需该条件)。」

另外,反馈控制系统的稳定判据亦可利用奈奎斯特线图。若图12系统的开环传递函数为 $G(s)$ [$= G_c(s)G_p(s)$],则用奈奎斯特线图的稳定判据法如下:

「(1) 在开环传递函数 $G(s)$ 中,使 $s = j\omega$,令 ω 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$,将 s 平面的右半平面包围起来,从而作出 G 平面上的奈奎斯特轨迹。如果, $G(s)$ 在虚轴上有极点,如图13所示,则使 s 不包围那个极点而变化」;

(2) 这种轨迹围绕 $(-1 + j0)$ 点反时针方向旋转 R 次;

(3) 在 $G(s)$ 的极点中,设实数部分为正数的极点数目为 P 。

在上述情况下,只有 $R = P$ 时,图12的系统

才是稳定的。」

开环传递函数 $G(s)$ 在右半平面上无极点, $P = 0$ 时,上述稳定条件变为 $R = 0$,这称为狄义的奈奎斯特稳定判据。在这种情况下,使用下列判据是方便的。

「在开环传递函数 $G(s)$ 中,令 $s = j\omega$,当 ω 从0变到 ∞ 时,若所作的奈奎斯特轨迹(矢量轨迹)使 $(-1 + j0)$ 点在其左侧,则图12的系统是稳定的。」

1.1.7 反馈控制系统的特性

(a) 稳态特性 分析图14所示的简单直接反馈控制系统,其偏差 $e(s)$ 为

$$\begin{aligned} \tilde{e}(s) &= \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)} \tilde{r}(s) \\ &\quad + \frac{G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \tilde{d}(s) \quad (27) \end{aligned}$$

它是偏离给定值的偏差 $\tilde{e}_r(s)$ 及因扰动引起的偏差 $\tilde{e}_d(s)$ 之和。而由于给定值或扰动加到系统上,经过足够长时间后达到稳定状态的稳态偏差 e 。(若系统是稳定的),可由拉氏变换终值定理在 s 域内由下式计算获得

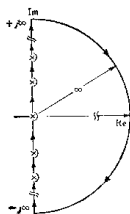


图 13

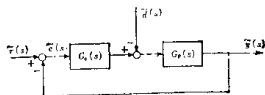


图 14

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{e}(s) \quad (28)$$

关于给定值的稳态偏差 e_{sr} 为

$$e_{sr} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \bar{r}(s)}{1 + G(s)} \quad (29)$$

它决定于给定值 $\bar{r}(s)$ 及开环传递函数 $G(s) = G_c(s)G_p(s)$ 的形式。通常, 给定值可认为是阶跃输入 $\{u(t), \mathcal{L}[u(t)] = 1/s\}$ 、恒速输入 $\{tu(t), \mathcal{L}[tu(t)] = 1/s^2\}$ 亦称斜坡输入) 以及恒加速度输入 $\{t^2u(t), \mathcal{L}[t^2u(t)] = 2/s^3\}$ 。并且, 开环传递函数 $G(s)$ 一般如下式

$$G(s) = \frac{k(1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_n s^n)}{s^l(1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_n s^n)} \quad (30)$$

式中, 当 $l = 0, 1, 2, \dots$ 时, 对于给定值来说, 图 14 的系统分别称为 0 型、1 型、2 型、... 的系统。若将表示稳态偏差的常数定义为:

$$\text{位置偏差常数 } k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (31)$$

$$\text{速度偏差常数 } k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (32)$$

$$\text{加速度偏差常数 } k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s) \quad (33)$$

则对于 0 型系统, 当给定值为阶跃输入时, 稳态偏差为:

$$e_{sr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + k_p} = \frac{1}{1 + k} \quad (34)$$

它具有非 0 的有效值。这种偏差通常称为稳态位置偏差。在 1 型系统中, 给定值为恒速输入时出现的稳态偏差称为稳态速度偏差

$$\begin{aligned} e_{sr} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} \\ &= -\frac{1}{k_v} = -\frac{1}{k} \end{aligned} \quad (35)$$

对于 2 型控制系统, 给定值为恒加速度输入时, 剩下非零的有限稳态偏差为

$$\begin{aligned} e_{sr} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{2}{s^3}}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^2G(s)} \\ &= -\frac{2}{k_a} = -\frac{2}{k} \end{aligned} \quad (36)$$

这种偏差称为稳态加速度偏差。

由于稳态偏差是在 $s = j\omega$ 的伯德图上 $s \rightarrow 0$ 时的特性, 因而是低频区域 ($\omega \approx 0$) 的特性。因为

在式 (30) 中令 $s = j\omega$, 并使 $\omega \approx 0$ 得到

$$G(j\omega) \approx \frac{k}{(j\omega)^l} \quad (37)$$

则 0、1、2 型系统的开环增益特性, 在低频时分别具有 0 分贝/10 倍频程, -20 分贝/10 倍频程, -40 分贝/10 倍频程的斜率, 若在低频区域提高增益, 则 k , k_v , k_a 将增大。

由于扰动引起的偏差为

$$e_d = \lim_{t \rightarrow \infty} e_d(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG_p(s)\bar{d}(s)}{1 + G(s)} \quad (38)$$

因此, 这和给定值变动的情况不同, 不能仅由扰动 $\bar{d}(s)$ 及开环传递函数 $G(s)$ 的形式决定, 而要根据扰动输入点前传递函数 [图 14 中 $G_d(s)$] 的型式来定义对扰动的 0 型、1 型、2 型... 的系统。

(b) 过渡特性 为使反馈控制系统满意地工作, 除了满足 (i) 系统是稳定的; (ii) 稳态偏差小的要求外, 还要求到达稳态的过渡状态的偏差要小。为此, 必须评价达到给定值的响应速度 (速度响应性能) 及表征振荡分量衰减程度的衰减度 (稳定性)。作为速度响应性及稳定性的评价指标, 有直接根据时间域的响应作为定义的尺度和将系统开环及闭环频率特性作为定义的指标。

在时间域中的瞬态响应指标, 通常定义为闭环系统的单位阶跃响应, 如图 4 中所示各量常用来表示此种尺度。在此, 上升时间、延迟时间、峰值时间是速度响应尺度, 超调量 (超越度) 是稳定性尺度, 调整时间是速度响应及稳定性的综合评价尺度。

对于频率域中的速度响应指标, 在开环频率特性 $G(j\omega)$ 上定义了交界频率 ω_c , 而在闭环频率特性 $W(j\omega)$ 上定义了带宽 ω_b (亦称截止频率) 及谐振频率 ω_r (见图 15 及图 16), 若这些频率大, 则速度响应就好。

另外, 在频率域中作为稳定尺度有相位裕量、增益裕量及最大增益 M_p (见图 15, 16)。通常, 相位裕量及增益裕量大致按下述去选择为好。

对于伺服机构, 相位裕量为 $40^\circ \sim 60^\circ$, 增益裕量为 10~20 分贝; 对于过程控制 (恒值控制), 相位裕量在 20° 以上, 增益裕量为 3~10 分贝。

此外, 根据大多数经验, M_p 约取 $1.1 < M_p < 1.5$ 为好。

1.1.8 反馈控制系统的特性设计 作为特性

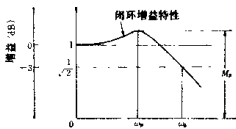


图 15

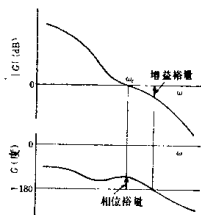


图 16

设计方法有根轨迹法、频率响应法（由伯德线图、奈奎斯特线图、尼柯尔氏线图的方法得到）等，本书叙述应用最广的伯德图频率响应。

相位滞后补偿使用于低频区域，以不破坏系统的稳定性，改善稳态特性为目的。相位滞后环节的传递函数为

$$G_2(s) = \frac{1 + T_2 s}{1 + (T_2/\alpha)s} \quad (39)$$

其伯德图如图 17 所示，在高频区域具有低增益特性。图 19 所示为用图 18 上的补偿环节 $G_c = KG$ ($K > 1$) 时的相位滞后补偿效果。高频特性不变，

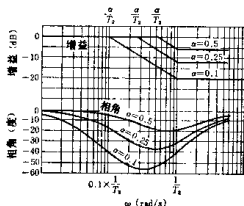


图 17

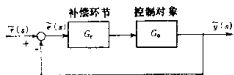


图 18

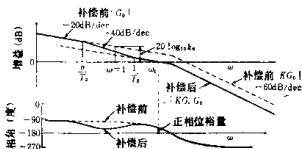


图 19

由于将低频增益提高，不影响过渡特性（稳定性，速度响应性），而稳态特性可得到改善。

相位超前补偿使用于较高频率区域，从而改善了稳定性及速度响应性，亦即改善了过渡特性。相位超前环节的传递函数如下

$$G_1(s) = \frac{\beta_2(1 + T_1 s)}{1 + \beta T_1 s} \quad (40)$$

其伯德图如图 20 所示。图 21 示出了相位超前补偿改善过渡特性的效果。在高频部分使相位超前补偿起作用，将 -20 分贝/10 倍频程部分扩大，就提高了稳定性，从而提高增益 (K 倍)。在该图上，将增益提高了的增益特性当作原来的特性，那么 0 分贝线是下降的。

将相位超前环节与相位滞后环节相串联，测得相位超前滞后环节，对于过程控制系统常采用 PID 调节器，基本上与相位超前滞后环节具有相同的工作特性。

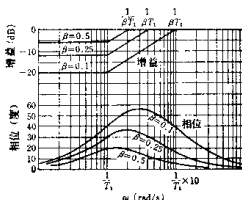


图 20

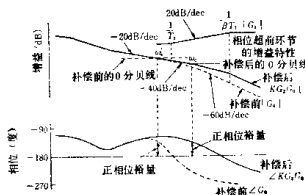


图 21

1.2 采样控制系统

具有一部分间歇信号的控制系统称为采样控制系统。这种间歇信号一般是由按某种时间规律动作的采样器或由能间歇地送出数值序列信号的计算机等产生的。图22(a)中所示为误差采样式采样控制系统的典型例子。图(b)则为引入计算机情况的例子。

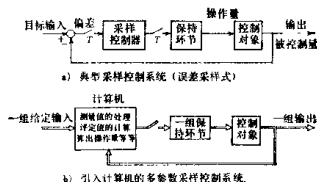


图22 采样控制系统的典型组成

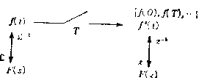


图23 采样的动作说明

1.2.1 采样动作与数列信号 (见图23) 一种有代表性的采样动作是动作周期 T 与采样时间宽度 h 均固定不变的情况。采样器的输出一般是宽度为 h 的…连串的采样脉冲序列, 当 h 相对地小时, 可按瞬时 (或是理想) 采样器处理。由于瞬时采样器的输出 $f^*(t)$ 为信号 $f(t)$ 时固定周期的单位

脉冲序列 $\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$ 进行幅值调制所得的结果, 故 $f^*(t)$ 可表达为

$$f^*(t) = f(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT) \quad (41)$$

而这关系式又可容易地写成

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \quad (42)$$

式(42)表示: 如以单位脉冲序列为媒介, 采样值或计算机的输出就可作为数值序列信号进行传送。 $f^*(t)$ 称为采样值函数。

1.2.2 z 变换法^{[5](7)}

(a) $f^*(t)$ 的 z 变换表示 将式(42)取拉普拉斯变换, 并使 $z = e^{sT}$ 置换所得的结果, 就叫做 $f(t)$ 、 $f^*(t)$ 或数列 $\{f(nT)\}$ 的 z 变换, 可表示成以下的形式。记号 $\mathcal{Z}$ 表示对其作 z 变换运算。

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(t)] &= \mathcal{Z}[f^*(t)] = \mathcal{Z}[f(nT)] \\ &= F(z) = F^*(s) \Big|_{s=e^{zT}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-nT} \end{aligned} \quad (43)$$

(b) z 变换的求法 z 变换主要有以下两种方法求得:

(i) 由式(43)的定义直接求取方法

$$\begin{aligned} \text{例 } \mathcal{Z}[e^{-\sigma t}] &= 1 + e^{-\sigma T} z^{-1} + e^{-2\sigma T} z^{-2} + \dots \\ &= 1/(1 - e^{-\sigma T} z^{-1}) \\ &= z/(z - e^{-\sigma T}) \end{aligned}$$

(ii) 由拉普拉斯变换 $F(s)$ 求取方法

将式(41)取拉普拉斯变换, 因 $\mathcal{Z}[\delta_T(t)] = 1/(1 - e^{-sT})$, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f^*(t)] &= F^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(p) \\ &\quad [1 - e^{-T(p)}]^{-1} dp \end{aligned} \quad (44)$$

在此, 积分路线 C , 为平行于虚轴的无限长直线, 使 $F(p)$ 的所有极点在 其左侧, 而使 $1/(1 - e^{-T(p)})$ 的全部极点在 其右侧, 与一半径为无限大的左半圆所构成的正方向闭合回路, 故当 $f(t)$ 为一稳定的 (不发散) 函数时, 积分路线就变成一包含整个左半平面的封闭回路。在式(44)中取 $e^{sT} = z$,

并作 $p \rightarrow s$ 的置换, 得

$$F(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(s) [1 - e^{Ts} z^{-1}]^{-1} ds \quad (45)$$

于是, 用计算留数的方法求出式 (45) 的积分, 便可得到 $F(z)$ 。

例: $\mathcal{Z}[a/s^2(s+a)] = [2 \text{ 重极点 } s=0 \text{ 的留数}] + [\text{单极点 } s=-a \text{ 的留数}] - Tz/(z-1)^2 - (1-e^{-aT})z/a(z-1)(z-a^{*T})$

(c) z 逆变换 求对应于所给 $F(z)$ 的数列 $\{f(nT)\}$ 或 $f^*(t)$, 就称做 $F(z)$ 的 z 逆变换。此种逆变换的求法如下:

(1) 幂级数展开法 将 $F(z)$ 展开成 z^{-1} 的幂级数, 由所得各项的系数, 即可求得其 z 逆变换。现设 $F(z)$ 取以下的形式

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots + f_n z^{-n} + \dots \quad (46)$$

在系数 $b_i, a_i, i=0, 1, \dots, n$, 与 $f_i, i=0, 1, \dots$ 之间有如下关系

$$\left. \begin{aligned} f_i a_0 + f_{i-1} a_1 + f_{i-2} a_2 + \dots + f_1 a_{i-1} + f_0 a_i \\ = b_i \quad (i=0, 1, \dots, n) \\ f_i a_0 + f_{i-1} a_1 + f_{i-2} a_2 + \dots + f_{i-n+1} a_{n-1} \\ + f_{i-n} a_n = 0 \quad (i=n+1, n+2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

利用此种关系, 或对式 (46) 实行除法计算, 便可求得 $F(z)$ 的 z 逆变换 $f_0, f_1, f_2, \dots$ 。

(2) 留数计算法 $F(z)$ 的 z 逆变换又可从算出以下复数积分的留数来求得

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_l F(z) z^{n-1} dz \quad (48)$$

在此, 积分路线 l , 为包含 $F(z)$ 所有极点的 z 正方向封闭回路。

在以上 (b) 和 (c) 中, 虽已讲到 z 变换与 z 逆变换的主要求法, 但通常多用表 1 求得。

(d) 有关 z 变换的基本定理

(i) 初值定理 $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} z F(z)$

(ii) 终值定理 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) F(z)$

1) $F(z)$

(iii) 推移定理

$$\mathcal{Z}[f(t \pm nT)] = \mathcal{Z}[e^{\pm nTs} F(s)] = z^{\pm n} F(z)$$

(iv) 衰减定理

$$\mathcal{Z}[e^{-at} f(t)] = \mathcal{Z}[F(s+a)] = F(z \cdot e^{aT})$$

(v) 微分定理

$$\mathcal{Z}\left[\frac{\partial}{\partial a} f(t, a)\right] = -\frac{\partial}{\partial a} F(z, a)$$

(vi) 巴塞伐尔 (Parseval) 定理

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^2(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_r F(z) F(z^{-1}) z^{-1} dz,$$

积分路线 r , 即为 z 平面内单位圆圆周。

(c) 扩展 z 变换 如令 $F(z, \tau)$ 表示将 $f(t)$ 的采样时刻从 kT 移至 $kT + \tau$ ($0 \leq \tau < T$) 时的 z 变换, 据此, 可用以描述采样时间间的关系。

$$F(z, \tau) = \mathcal{Z}_\tau[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT + \tau) z^{-n} \quad (49)$$

Gray 曾将 $f(t)$ 通过一滞后时间为 $(1-m)T$ ($0 \leq m < 1$) 的滞后环节后的输出的 z 变换用 $F(z, m)$ 来表示, 并称为扩展 z 变换。因此

$$\begin{aligned} F(z, m) &= \sum_{n=0}^{\infty} f[n - (1-m)T] z^{-n} \\ &= z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} f[(n+m)T] z^{-n} \end{aligned} \quad (50)$$

如令 $\tau = mT$, 在 $F(z, \tau)$ 与 $F(z, m)$ 之间, 就可有以下关系:

$$F(z, \tau) = z F(z, m) \quad (51)$$

此种扩展的 z 变换和扩展的 z 逆变换可根据如下的公式算出

$$\begin{aligned} F(z, \tau) &= \mathcal{Z}[F(s)e^{s\tau}] \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(s) e^{s\tau} [1 - e^{Ts} z^{-1}]^{-1} ds \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} f(nT + \tau) &= \mathcal{Z}^{-1}[F(z, \tau)] \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_r F(z, \tau) z^{n-1} dz \end{aligned} \quad (53)$$

1.2.3 采样系统的 z 变换描述⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁸⁾

(a) 连续环节的脉冲序列响应 如图24, 当将采样信号 $f^*(t)$ 输入脉冲响应为 $g(t)$ 的连续环节时, 其输出采样值可用以下的卷积和来给出。

$$y(kT) = \sum_{n=0}^k f(nT) g[(k-n)T] \quad (54)$$

表1 z 变换及扩展 z 变换

$F(s)$	$f(t) (t \geq 0)$	$F(z)$	$F(z, m) (0 < m \leq 1)$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$T^2 \left\{ \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1+2m}{2(z-1)^2} + \frac{m^2}{2(z-1)} \right\}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-a}$	$\frac{a^m}{z-a}$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{a} \frac{(1-a)z}{(z-1)(z-a)}$	$\frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{z-1} - \frac{a^m}{z-a} \right\}$
$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a} \left(t - \frac{1-e^{-at}}{a} \right)$	$\frac{1}{a} \left\{ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-a)z}{a(z-1)(z-a)} \right\}$	$\frac{1}{a} \left\{ \frac{T}{(z-1)^2} + \frac{amT-1}{a(z-1)} + \frac{a^m}{a(z-a)} \right\}$
$\frac{(s+b)}{s^2(s+a)}$	$\frac{a-h}{a^2} + \frac{b}{a} t + \frac{1}{a} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) e^{-at}$	$\frac{1}{a} \left\{ \frac{bTz}{(z-1)^2} + \frac{(a-h)(1-a)z}{a(z-1)(z-a)} \right\}$	$\frac{1}{a} \left\{ \frac{bT}{(z-1)^2} + \left(bmT + 1 - \frac{b}{a} \right) \frac{1}{z-1} + \frac{b-a}{a} \frac{a^m}{(z-a)} \right\}$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} \left(1 + \frac{b}{a-b} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt} \right)$	$\frac{1}{ab} \left\{ \frac{z}{z-1} - \frac{bz}{(a-b)(z-a)} - \frac{az}{(a-b)(z-b)} \right\}$	$\frac{1}{ab} \left\{ \frac{1}{z-1} + \frac{ba^m}{(a-b)(z-a)} - \frac{ab^m}{(a-b)(z-b)} \right\}$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$	$\frac{z \sin aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$	$\frac{z \sin amT + \sin(1-m)aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$	$\frac{z(z - \cos aT)}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$	$\frac{z \cos amT - \cos(1-m)aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$

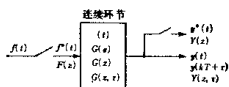
注: $\alpha = e^{-aT}$, $\beta = e^{-bT}$ 

图24 连续环节的采样响应

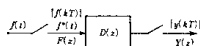


图25 数字环节采样响应

$$y(kT + \tau) = \sum_{n=0}^k f(nT) g[(k-n)T + \tau] \quad (55)$$

对两边取 z 变换, 可得

$$Y(z) = G(z) F(z),$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT) z^{-n} \quad (56)$$

$$Y(z, \tau) = G(z, \tau) F(z),$$

$$G(z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT + \tau) z^{-n} \quad (57)$$

式 (56)、(57) 即为采样系统的输入输出关系式。

 $G(z)$ 、 $G(z, \tau)$ 称为与连续量系统的传递函数 $G(s)$ 对应的脉冲传递函数与扩展脉冲传递函数。

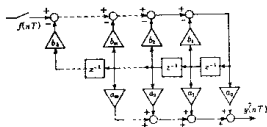
(b) 线性数字环节的输入输出关系 其输入输出关系由以下线性差分方程表示的环节, 叫做线性数字环节, 并可用图25来表示。

$$y(nT) + b_1 y[(n-1)T] + b_2 y[(n-2)T] + \dots + b_k y[(n-k)T] = a_0 f(nT) + a_1 f[(n-1)T] + \dots + a_m f[(n-m)T] \quad (58)$$

线性数字环节的脉冲传递函数, 如下式所示

$$D(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_k z^{-k}} \quad (59)$$

此种环节可用通用的数字计算机或如图26所示的专用机构来实现, 并可用采样控制装置。



▽: 系数器 z^{-1} : 把信号保持T时间的存储器

图26 数字控制器的组成($m \leq k$ 时)

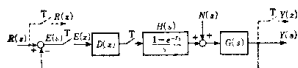


图27 闭环采样系统的响应

(c) 闭环采样系统的响应 图27所示闭环采样系统的输出 z 变换, 可用下式来表示

$$Y(z) = \frac{D(z)HG(z)}{1 + D(z)HG(z)} R(z) + \frac{NG(z)}{1 + D(z)HG(z)} \quad (60)$$

$HG(z)$ 、 $NG(z)$ 各为 $H(s)G(s)$ 、 $N(s)$ $G(s)$ 的 z 变换。

(d) 零阶保持器环节 将采样值在一个采样周期内保持恒定的环节叫做零阶保持器环节, 其传递函数如下式所示

$$H(s) = (1 - e^{-Ts})/s \quad (61)$$

1.2.4 多变量采样系统的描述⁽¹⁾⁽²⁾⁽¹¹⁾

(a) 多变量线性采样系统的方程式及其解 连续线性时不变多变量系统的状态方程式及其解, 见2.1节为:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (62)$$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\lambda)Bu(\lambda)d\lambda \quad (63)$$

此处, $u(t)$ 是输入矢量; $x(t)$ 为状态矢量; $x(0)$ 是初始状态; $\Phi(t) = \exp(At)$ 则为其状态转移矩阵。



图28 多变量系统的采样响应

由于图28所示采样系统在采样时刻 kT 、 $(k+1)T$ 区间内的响应, 即为将 $x(kT)$ 作为初始值的连续量响应, 利用式(63), 就有

$$x(kT + \tau) = \Phi(\tau)x(kT) + \Gamma(\tau)u(kT) \quad (64)$$

$(0 \leq \tau \leq T)$

式中, 在上述区间内对象的输入, 可看作一个固定值 $u(kT)$, 而 $\Gamma(\tau) = \int_0^\tau \Phi(\tau-\lambda)Bd\lambda$ 。如设式

(64)中的 $\tau = T$, 则在时刻 $(k+1)T$ 的状态有如下式

$$x[(k+1)T] = \Phi(T)x(kT) + \Gamma(T)u(kT) \quad (65)$$

式(65)虽是作为采样系统的响应式而被推导出来, 但从将 Φ 、 Γ 视作单纯的常数矩阵这点来说, 就可看作是包括数字系统、个体系统、生态系统等在内的广范围的离散时间系统的描述表达式。

在式(65)中, 通过令 $k=0, 1, 2, \dots$ 可得与 $x(0)$ 有关的初始值响应如下

$$x(kT) = \Phi(kT)x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi[(k-i-1)T]\Gamma(T)u(iT) \quad (66)$$

或 $x(k) = \Phi(kT)x(0)$

$$+ \sum_{i=1}^k \Phi[(k-i)T]\Gamma(T)u[(i-1)T] \quad (67)$$

输出方程式可写成下式:

$$y(kT) = Hx(kT) + Ju(kT) \quad (68)$$

式中, H 、 J 分别为与图28中的 C 、 D 相同的矩阵。对应于式(64)、(65)、(68)的方块图如图29所示。再者, 当为时变系统时, Φ 、 Γ 、 H 、 J 均是 k 的函数。

(b) 系统方程式的 z 变换与脉冲传递函数矩阵 如将式(66)的两边进行 z 变换, 则 $x(t)$ 的

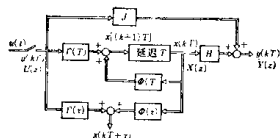


图29 多变量采样系统方框图

z 变换 $\mathcal{Z}[x(t)] = X(z)$ 就成为

$$X(z) = [zI - \Phi(T)]^{-1} z x(0) + [zI - \Phi(T)]^{-1} \Gamma(T) U(z) \quad (69)$$

式中的 $U(z) = \mathcal{Z}[u(t)]$, 此处:

$$[zI - \Phi(T)]^{-1} z = \mathcal{Z}[\Phi(t)]: \Phi(z) \quad (70)$$

利用这一关系, $X(z), Y(z) = \mathcal{Z}[y(t)]$ 成为如下形式:

$$X(z) - \Phi(z)x(0) + z^{-1}\Phi(z)\Gamma(T)U(z) \quad (71)$$

$$Y(z) = H\Phi(z)x(0) + [H z^{-1}\Phi(z)\Gamma(T) + J]U(z) \quad (72)$$

此处, 若令 $x(0) = 0$, 便可得脉冲传递函数矩阵 $G(z)$ 为:

$$G(z) = H[zI - \Phi(T)]^{-1} \Gamma(T) + J \\ = H z^{-1}\Phi(z)\Gamma(T) + J$$

对其作 z 逆变换可得脉冲响应矩阵 $G(kT)$ 为

$$G(kT) = H\Phi[(k-1)T]\Gamma(T) \quad (k \geq 1) \\ = J\delta(\tau) \quad (k = 0) \quad (73)$$

对应于以上所述, 若将 (64) 式作 z 变换, 可得 $x(t), y(t)$ 的扩展 z 变换和扩展脉冲传递函数矩阵如下式

$$X(z, \tau) = \Phi(\tau)X(z) + \Gamma(\tau)U(z) \quad (74)$$

$$X(z, \tau) = \Phi(\tau)[zI - \Phi(T)]^{-1} z x(0) \\ + \{\Phi(\tau)[zI - \Phi(T)]^{-1} \Gamma(T) + \Gamma(\tau)\}U(z) \quad (75)$$

$$Y(z, \tau) = H\Phi(\tau)\Phi(z)x(0) + [H\Phi(\tau)z^{-1}\Phi(z)\Gamma(T) + \Gamma(\tau) + J]U(z) \quad (76)$$

$$G(z, \tau) = H\{\Phi(\tau)z^{-1}\Phi(z)\Gamma(T) + \Gamma(\tau) + J\} \quad (77)$$

$$G(kT + \tau) = z^{-1}\{G(z, \tau)\} \\ = H\{\Phi(\tau)\Phi[(k-1)T]\Gamma(T) + \Gamma(\tau)\} \quad (k \geq 1) \\ = H\Gamma(\tau) + J\delta(\tau) \quad (k = 0) \quad (78)$$

1.2.5 无振荡响应 包括采样时间的响应在

内, 能使误差在有限时间内, 变成零的响应, 称为无振荡响应。现将其两种有代表性的设计方法列举如下。

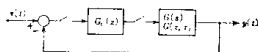
(a) Jury 的方法⁽⁷¹⁾⁽⁸¹⁾ (见图 30) 单输入单输出控制对象的 $G(s)$ 及其 $G(z, \tau)$, 一般取如下形式

$$G(s) = \left(\sum_{i=0}^q A_i s^i \right) / s^p \left(\sum_{j=0}^l B_j s^j \right) \quad (79)$$

$$G(z, \tau) = \left[\sum_{h=0}^{p+l} a_h(\tau) z^h \right] / [(z-1)^k (z-r_1) \cdots (z-r_l)] \quad (80)$$



a. 串联补偿型



b. 反馈补偿型

图30 无振荡控制系统 (Jury)

对于阶跃输入, 为使系统具有无振荡响应的串联补偿环节 $G_{sc}(z)$ 可取下面的形式, 这是由 Jury 提出的。

$$G_{sc}(z) = [(1 - z^{-1})^p (1 - r_1 z^{-1}) \cdots (1 - r_l z^{-1})] / \sum_{h=0}^{p+l} a_h(\tau) \quad (81)$$

在式 (81) 中, 其 $\sum a_h(\tau)$ 需与 τ 无关这一条件, 在通常的情况下是可满足的。

构成反馈系统所应设置的 $G_c(z)$ 可利用式 (81) 按下式求得:

$$G_c(z) = G_{sc}(z) / [1 - G_{sc}(z)G(z)] \quad (82)$$

(b) 反复设计法 (Tou 的方法)⁽¹⁰⁾ Tou 利用式 (67) 提出了一种无振荡响应的设计方法。

(1) 开环无振荡响应的设计 设控制对象是可控制的, 则从初始状态 $x(0)$ 经历 p 个采样周期能移回原点的条件为

$$x(pT) = 0 \quad (83)$$

将此条件用于式 (67) 可得下式

$$x(0) = - \sum_{i=1}^p S_i u[(i-1)T] \quad (84)$$

此处, $S_i = \Phi(-iT) \Gamma(T)$; $p = \lceil x \text{ 的维数} / u \text{ 的维数} \rceil$ 的凑成整数。

利用式 (82) 对 u 求解, 可得如下的设计公式:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(T) \\ \vdots \\ u((p-1)T) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix} x(0) \\ \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix} &= [S_1 S_2 \cdots S_p]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

其中

根据式 (85), 可得图31所示的开环时变无振荡响应系统。

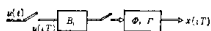


图31 开环时变无振荡系统

(2) 闭环无振荡响应的设计 倘若从 $x(0)$ 经历 p 个周期就能移回到原点, 则从 $x(T)$ 只要经历 $(p-1)$ 个周期便可移回到原点。更进一步考虑到 $u(iT) = 0 (i \geq p)$, 则可得

$$x(T) = - \sum_{i=1}^p S_i u(iT) \quad (86)$$

和做开环设计时一样, 若将式 (86) 就 u 求解, 可得:

$$\begin{bmatrix} u(T) \\ u(2T) \\ \vdots \\ u(pT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix} x(T) \quad (87)$$

由此可得:

$$u(T) = B_1 x(T) \quad (88)$$

反复进行上述顺序的推导, 可得如下的普通关系式:

$$u(kT) = B_1 x(kT) \quad (89)$$

由此, 可得如图32所示的闭环时不变 (参数恒定) 无振荡响应控制系统。

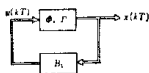


图32 闭环时不变 (参数恒定) 无振荡系统

1.2.6 离散定值最优控制系统的设计 (离散

调节问题)^[(90)(11)] 这里叙述一下用动态规划(DP)求解离散定值最优控制问题的方法。现设:

对象的状态方程

$$x(k+1) = \Phi(1)x(k) + \Gamma(1)u(k) \quad (90)$$

二次型评价指标

$$J_N = \sum_{k=1}^N [x'(k)Qx(k) + \lambda u^2(k)] \quad (91)$$

此处, 为简单起见, 令输入 u 为一维变量, 采样周期等于 1。又 Q 为准正定的。这里的问题是, 要就式 (90) 的系统, 从初始状态 $x(0)$ 开始, 决定能使式 (91) 的评价指标为最小的 N 段最优控制过程。

对 N 段决策过程的第 $j+1$ 段而言, 在以 $x(j)$ 作为初始状态的其余 $(N-j)$ 段过程中, 若所选的控制量 $u(j), u(j+1), \dots, u(N-1)$ 能使评价指标 J_{N-j} 为最小, 设此时的 J_{N-j} 值是 j_{N-j} , 则:

$$\begin{aligned} j_{N-j}[x(j)] &= \min_{u(j), u(j+1), \dots, u(N-1)} \\ &\sum_{k=j+1}^N [x'(k)Qx(k) + \lambda u^2(k)] \quad (92) \end{aligned}$$

此处若利用最优性原理, 则它又可表达为:

$$\begin{aligned} j_{N-j}[x(j)] &= \min_{u(j)} \{ x'(j+1)Qx(j+1) \\ &+ \lambda u^2(j) + j_{N-j-1}[x(j+1)] \} \quad (93) \end{aligned}$$

考虑到 j_{N-j}, j_{N-j-1} 都属二次型, 可令

$$\begin{cases} j_{N-j}[x(j)] = x'(j)P(N-j)x(j) \\ j_{N-j-1}[x(j+1)] = x'(j+1)P(N-j-1)x(j+1) \end{cases}$$

于是可将式 (93) 写成如下的形式:

$$\begin{aligned} x'(j)P(N-j)x(j) &= \min_{u(j)} [x'(j+1) \\ &\times S(N-j-1)(j+1) + \lambda u^2(j)] \quad (94) \end{aligned}$$

其中 $S(N-j-1) = Q + P(N-j-1)$ (95)

在式 (94) 中利用式 (90) 的关系, 并就 $u(j)$ 对其实行微分运算, 可得:

$$\begin{aligned} u^0(j) &= B(N-j)x(j) \quad (96) \\ B(N-j) &= -[\Gamma'(1)[Q + P(N-j-1)]\Gamma(1) + \lambda]^{-1}[\Gamma'(1) \\ &\times [Q + P(N-j-1)]\Phi(1)] \quad (97) \end{aligned}$$

根据式 (96) 可构成如图 33 所示的时变反馈控制系统。

此处 $B(N-j)$ 可用如下的办法来求得。若将式 (96) 的 $u(j)$ 与式 (90) 应用于式 (94), 可得

$$\begin{aligned} P(N-j) &= (\Phi(1) + \Gamma(1)B(N-j))' \\ & \quad (Q + P(N-j-1))' \Gamma(1) - \Gamma(1) \\ & \quad + B(N-j) \Gamma + \lambda B'(N-j)B(N-j) \quad (98) \end{aligned}$$

故利用由式 (97) 与 (98) 构成的递推关系, 可按如下的方式求出 $B(0), B(1) \dots$ 。

$$\begin{array}{ccccccc} P(0) & \xrightarrow{\text{式(97)}} & B(1) & \xrightarrow{\text{式(98)}} & P(1) & \xrightarrow{\text{式(97)}} & B(2) \xrightarrow{\text{式(98)}} P(2) \dots \\ & \nwarrow \text{式(98)} & & \nearrow \text{式(98)} & & \nwarrow \text{式(98)} & \nearrow \text{式(98)} \end{array}$$

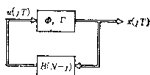


图33 离散最优调节器

1.3 非线性控制系统

虽然实际的控制对象多少都具有一定的非线性, 但在多数场合下, 常将其近似地作为线性的来进行控制, 但也有必要作非线性来分析与设计。此外, 还有用到继电器型非线性控制装置的情况。作为这方面的分析与设计方法, 虽则还有折线近似法、级数展开法和统计线性化法等, 但一般常用描述函数法与相平面法。

1.3.1 相平面分析法⁽¹²⁾ 这是一种主要用来求解二阶非线性微分方程的图形解法, 可获得正确的分析结果。

(a) 相平面轨迹 设需研究的系统可用如下的二阶非线性微分方程来表示

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + f(x, \dot{x}) \frac{dx}{dt} + g(x, \dot{x}) &= u \\ \dot{x} &= \frac{dx}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

若令 $\dot{x} = y$, 则上式可表现为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u - g(x, y)x - f(x, y)y}{y} \quad (100)$$

故如输入 u 与时间 t 无关而为常量, 则上式的右边就不显出包含 t 。因此可作 $-xy$ 平面, 在该平面上给定一个作为初始值的点 (x_0, y_0) , 就可由此确定式 (100) 的解的曲线。这种作为其解的曲线就

成为相平面轨迹, 而 x, y 平面即 $x, \dot{x}$ 平面则叫做相平面。

(b) 相平面轨迹的描绘方法 虽然在此只说明等斜率线法, 但也可用相平面得耳塔法⁽¹³⁾、利埃纳尔 (Liennard's) 方法等。

(1) 等斜率线 由式 (100), 满足下式的所有点 (x, y) , 就构成了相平面轨迹的斜率为 k 的诸点的轨迹 (等斜率线):

$$\frac{u - g(x, y)x - f(x, y)y}{y} = k \quad (101)$$

将对应于种种 k 值的等斜率线在相平面上加以描绘, 从初始值 (x_0, y_0) 开始, 沿着等斜率线上标出的倾斜方向, 按次序描下去, 就可得到相平面轨迹。例如在 $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ 的情况, 由于斜率等于 k 的等斜率线为 $(1+k)y = -x$, 就可描绘得如图34中所示的相平面轨迹。

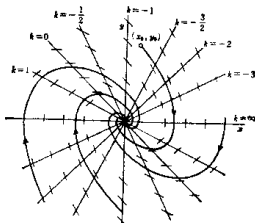


图34 $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ 的相平面轨迹 (用等斜率线法)

(2) 相平面轨迹上时间的计算 因 $y = \dot{x}$, 故 $\int dt = \int \frac{1}{y} dx$ 。由此可知, 在相平面上的 2 点间运动所需要的时间, 则通过该 2 点的轨迹在远离 x 轴处所需的时间就较短。

如将 x 轴、 y 轴的单位长度分别对应于 x, y 的值 a 和 b 。如图35所示, 当相平面轨迹为一圆心在 x 轴上的圆弧时, 对通过弧上两点所需的时间便可如下式由其中心角来决定

$$t = \int \frac{1}{y} dx = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{a \sin \theta}{b \sin \theta} d\theta = \frac{a}{b} (\theta_1 - \theta_2) \quad (102)$$

若将 B 的对称点 B' 与 A 连结起来, 则如图中所示

θ_1, θ_2 极易求得。对于一般的轨迹, 则可用几段圆弧来近似地逼近。在图36的情况, 从A运动至D所需要的时间 t_{AD} 可由下式来给出:

$$t_{AD} \approx (a/b) (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

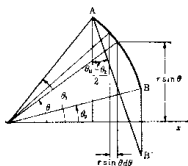


图35 相平面轨迹在圆弧情况时的经过时间计算法

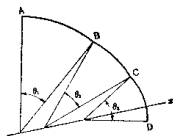


图36 采用圆弧来近似的轨迹

(c) 特异点 当系统由联立微分方程式 $\frac{dx}{dt} =$

$$= P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

表示时, 使 $\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0$ 的点, 就成为使轨迹的斜率不确定的

特异点。设特异点的坐标为 (a, b) , 则可展开如下:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= a_1(x-a) + a_2(y-b) \\ &\quad + a_3(x-a)^2 + a_4(x-a) \\ &\quad \times (y-b) + a_5(y-b)^2 + \dots \\ Q(x, y) &= b_1(x-a) + b_2(y-b) \\ &\quad + b_3(x-a)^2 + b_4(x-a) \\ &\quad \times (y-b) + b_5(y-b)^2 + \dots \end{aligned}$$

在特异点附近, 若忽略其高次项, 则可近似地得到以下的线性微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1(x-a) + a_5(y-b) \\ \frac{dy}{dt} &= b_1(x-a) + b_5(y-b) \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

因此, 在特异点附近相平面轨迹的性质可由式(103)的特征方程式

$$\lambda^2 - (a_1 + b_5)\lambda + (a_1b_5 - a_2b_1) = 0 \quad (104)$$

的根所决定, 并分成如图37的多种类型。

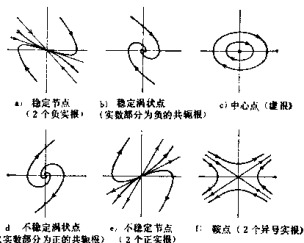


图37 特异点的分类

(d) 继电器型控制系统的例子 作为相平面轨迹的适用例子, 现在来研究一下图38所示的继电器型控制系统。由于其中的 u 所取的数值为 ± 1 , 其对应的轨迹是将图34中的轨迹左右各平行移动 K 所得的结果。因而, 当输入 $r = 0$ 时, 闭环系统的轨迹成为如图39所示, 图中通过A点的轨迹将会按A B C D A的路线又回到原来的位置, 这样的轨迹称为极圈。另外, 此极圈附近的轨迹总是无限趋近于该极圈, 此时是一稳定的极圈。

(e) 最优切换⁽¹⁴⁾ 在上例, 对对应于 $u =$

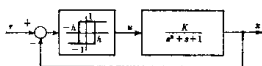


图38 继电器型控制系统

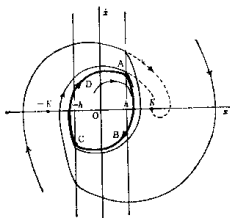


图39 极圈的例子