[德]W. 瓦尔特 著

常微分方程导论

邹应 译　费浦生 秦裕瑗 校

高等教育出版社

内容提要

本书是按 W. Walter 著《Gewöhnliche Differentialgleichungen, Eine Einführung》第二版（Springer-Verlag 1976 年出版）翻译的. 主要内容有一阶常微分方程，一阶常微分方程组与高阶微分方程，线性微分方程，复线性方程组，边值与特征值问题，等等. 可供大学数学、计算数学与物理专业师生参考.

常微分方程导论

［德］W. 瓦尔特 著

邹 应 译

费浦生
秦裕瑗 校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张9.375 字数 220 000

1988 年 8 月第 1 版 1988 年 8 月第 1 次印刷

印数 00 001—2,620

ISBN7-04-001140-9/O·214

定价2.70元

第二版序言

自这本著作经评定博得了读者的好评之后，对第二版作出不做大修改的决定，对我来说就不是难事了. 许多细心的读者向我指出了印刷上的错误和一些细微的不严密之处，这些都在新版中作了修正. 对微分方程的解关于参数的可微性定理 (13.VI)——这是一个众所周知的难点——的证明作了简化.

卡尔士鲁厄 1976年1月　　W. 瓦尔特

第一版序言

多年来，著者在卡尔士鲁厄大学为数学和物理系的学生，前不久也为情报系的学生讲授常微分方程，这本引论性的常微分方程讲义就是由此而产生的. 因此，例题和初等积分法占了比较大的篇幅. 可是，就内容来说，这本书在许多地方超出了通常视为引论性讲义的范围. 前三章叙述了必要的理论基础. 初读时，注明作为"补充内容"的段落以及§13可略去. 读者应具备有数学系一年级学生的分析及线性代数的基本知识. 除了§10中的补充内容(在 Carathéodory 意义下的微分方程)和特征值问题中的展开定理28.XII之外，本书其他地方没有用到 Lebesgue 积分理论.

由于在许多重要的地方，我们放弃了一些行之有效的证明方法，因此适当作了一些原则上的附注. 倘若我们不考虑最后一章的边值问题，那末就方法而言，压缩原理，即Banach 空间中的压缩映射的不动点定理是核心. 这个定理有使其成为分析的基本原理的一切特性：它是基本的，有多方面的应用并且是深刻的. 在应用

此定理证明我们的命题时，它的灵活性主要表现在使用适当的带权最大值范数.对此，第一个例子可在 Morgenstern(1952)的著作中找到；而文献中却多次记载着后来的作者们的论述，从历史上来看这是不公正的．证明§21的复线性系统的存在性定理时，使用这样一种范数可能是新的．首先是通过它避免了函数论中比较复杂的论述(解析延拓和单值定理将不必要)．其次，对奇点的处理，可以说顺便获得了解的重要的增长性质．关于微分方程的解对初始值和参数的连续依赖性定理以及关于复参数的全纯性定理都可以立即由不动点定理推出，这还很少被人知道．证明微分方程的解对实参数的可微性时，需要用到不动点定理的一个推广．

在研究具有弱奇点的线性方程组时，关键的收敛性证明，同样是通过在一个适当的 Banach 空间中利用压缩原理来证明的．这个新的证明方法是由 Harris, Sibuya, 和 Weinberg(1969)研究全纯解，从而幂级数展开的解时所发现的．对于具有对数奇点的类似情形，仍可用这个方法来加以研究．如果我们用这个方法去代替古典的强函数法，那末这不仅仅是为了在各种情况下去使用一个原理．我们觉得这个新的方法更简明扼要，特别是用这个方法——正如在所引的原著中所分析的那样——还能够处理超出了本书范围的更困难的情形(比如 Lettenmeyer 定理等等)．

在出版本书的时候，著者得到了许多同事们的支持. S. Hoffmann抄写了手稿，B. Deimling绘了插图. J. Dietrich, G. Lamott, R. Lemmert 和 U. Lemmert, A. Voigt 博士及 P. Volkmann 博士参加了校对.因此，对于他们的多次的辛勤劳动表示热忱的谢意.著者多年来与斯普林格出版社，特别是与 Peters博士先生在一起亲睦地合作．这本书的出版与和他们的合作始终是分不开的．

卡尔古鲁厄　1972年8月　　W. 瓦尔特

译者的话

这本常微分方程导论是著者在卡尔士鲁厄大学为数学和物理系的学生编写的一本教科书．此书除了讲述常微分方程中最基本的理论外，对常微分方程的解析理论以及边值问题和特征值问题也作了比较详细的论述，其内容是相当丰富的．著者对常微分方程的传统写法作了大胆的，然而是有益的革新．在许多重要的地方，放弃了历来被认为是行之有效的证明方法，而以 Banach 空间的压缩映射的不动点原理作为方法的核心．

虽然著者对于近代日趋重要的常微分方程的数值解法未在本书中专门论述，但是对于想单独学习和深刻掌握常微分方程基本理论的读者来说，此书的确是一本不可多得的好书．著者对基本理论的论述是相当严谨的，有些证明方法是十分巧妙的．每一节的正文后面还附有一部分有代表性和启发性的练习题，这对于进一步理解和掌握本节的内容是颇有收益的．

在翻译的过程中，译者得到吴厚心教授和张延昌教授的热情帮助．费浦生副教授和武汉钢铁学院的秦裕瑗教授为校阅译稿作了十分认真细致的工作，提出了许多宝贵的修改意见，出版社编辑部的同志对译稿的最后定稿作了许多工作，这本译著能与读者见面是与他们的辛勤劳动分不开的．译者在此对他们表示衷心感谢．

由于译者水平有限，谬误之处仍恐难免，请读者批评、指正．

译　　者

1985 年 9 月于武昌珞珈山．

读者须知

在引用其它章节中的公式、定理……时，有关章节的号码放在所在章节的公式、定理……的号码的前面．因此，比如(12.7)或定理 13.II 意味着是 § 12 中的公式(7) 或 § 13 中的定理 II.

如果在著者名字后面的括号中有年份，比如 Perron(1926)，那末这表示书末的文献索引中所标的年份．名词汇编索引和所使用的记号的简短注释同样附于书末.

目　录

导言

一个微分方程，我们指的是联系自变量，自变量的函数以及这个函数的导数的一个方程．例如：

$$y' + 2xy = 0; \tag{1}$$

这里 x 是自变量， y 是所求的函数．微分方程的解就是这样的一个函数 $y=\phi(x)$：将它代入 (1) 后，方程变成 x 的恒等式，就是说，$\phi'(x)+2x\cdot\phi(x)\equiv 0$．易于检算，函数 $y=e^{-x^2}$ 是方程(1)的一个解：

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2})+2xe^{-x^2}\equiv 0 \qquad -\infty<x<\infty.$$

稍后，我们将看到，方程(1)的全部解为 $y=C\cdot e^{-x^2}$，这里 C 取遍一切实数．

方程 (1) 是一个一阶微分方程．我们称一个微分方程为一阶微分方程，如果在此方程中只出现自变量函数的一阶导数而没有更高阶的导数．

一般的一阶微分方程记为

$$F(x, y, y')=0. \tag{2}$$

函数 $y=y(x)$ 是方程 (2) 在区间 J 上的解，如果 $y(x)$ 在 J 中可微并且

$$F(x, y(x), y'(x))\equiv 0$$

对所有的 $x\in J$ 成立．

如果在一个微分方程中还出现了更高阶的导数，例如高至 n 阶，那末称此方程为 n 阶微分方程．n 阶微分方程总可以写成下述形式：

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)},y^{(n)})=0. \tag{3}$$

这里，一个解就是这样的一个 n 次可微函数，将它代入 F 之后，方程(3)恒等地被满足. 一个 n 阶微分方程称为显式的，如果此方程的最高阶导数已解出，也就是

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}). \tag{4}$$

否则称为隐式的.

以上我们讨论的是所谓常微分方程，它们是一个自变量 x 的函数 $y(x)$ 的微分方程. 如果在一个微分方程中出现了多个自变量以及关于它们的偏导数，那末称此方程为偏微分方程. 因此，比如

$$u_x+u_y=x+y$$

就是一个未知函数为 $u(x,y)$ 的一阶偏微分方程. 例如，$u(x,y)=xy$ 就是它的一个特解. 所谓 $u=u(x,y,z)$ 的"空间势能方程"

$$\Delta u\equiv u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$$

就是一个 2 阶的偏微分方程.

本书中，我们只讨论常微分方程. 重点放在实域中的微分方程；于是自变量 x 是一个实变量，$y(x)$ 是一实函数. 然而，复微分方程的基本事实也将讨论.

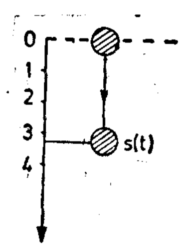
微分方程的解也叫作微分方程的积分，或者，如果将解 $y(x)$ 几何地解释为某一区域上的一条曲线，也称此解为微分方程的解曲线或积分曲线. 此外，我们称依赖于 x 及 n 个参数 $C_1,\cdots,C_n$ ($C_1,\cdots C_n$ 可在某一点集 $M\subset R^n$ 中变化)的函数 $y(x;\ C_1,\ \cdots,\ C_n)$ 为 n 阶微分方程(4)的通积分或通解，如果它具有下述特性：对任意选择的一组参数值 $(C_1,\cdots,C_n)\in M$，函数 $y(x;C_1,\cdots,C_n)$ 是微分方程(4)的解，并且按此种方法可得到微分方程的一切解. 此概念的理论价值不大，只是在涉及到一些简单的例子时，它才显得重要，在这些例子中，方程的全部解往往确实成功地表示成一个依赖于 n 个参数的显式.

我们首先讨论的一阶常微分方程就是下述显式方程:

$$y' = f(x, y). \tag{5}$$

微分方程的理论对于自然科学与技术,特别是对于物理具有巨大的意义,因为许多自然规律都具有微分方程的形式.在用数学模型和理论来研究的其它科学领域里也常常出现微分方程.下面三个例子可以使我们对微分方程理论中的典型问题有一个初步的印象.这三个例子都是讨论物体在重力场中的运动.

I. 自由落体 首先假设一个固定的物体突然松开,那末此物体在重力的作用下将垂直向下运动.它所经过的路程在数学上用函数$s = s(t)$来描述,它表明物体(精确地说是它的重心)经过时间t所走的路程.人们所关心的另外一些量是在时间t物体所达到的瞬时速度$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \dot{s}(t)$及其加速度$b(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \ddot{s}(t)$.



(在描述一个运动的过程中,时间是独立变量,通常不是用x,而是用t来表示时间的.此外,导数不是用一撇,而是用一点来表示.)力学中我们学过,这个加速度是常数,而且等于重力加速度g.因此路程—时间函数$s(t)$满足二阶微分方程

$$\ddot{s} = g. \tag{6}$$

这里,找出它的全部解是容易的.因为根据一个简单的分析定理,由$\dot{v}(t) = g$得到$v(t) = gt + C_1$,同样由$\dot{s}(t) = gt + C_1$得到

$$s(t) = g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ 为常数}).$$

因此我们找到了微分方程(6)的通积分.

为了从微分方程(6)的许许多多的解中找出描述此物理过程

的那一个解，还需要知道一些其他的条件，即所谓的初始值条件. 比如，我们假设这个物体在时间 $t=0$ 时是静止的，然后放开. 那末它所满足的初始值条件是 $s(0)=0$ 和 $\dot{s}(0)=v(0)=0$. 由第一个条件得到 $C_2=0$，由第二个条件得到 $C_1=0$，因此，我们得到解

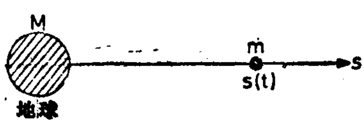
$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2.$$

由其他的初始值条件按照类似的方法可得到另外的解.

II. 高空中的自由落体 现在假设物体是离地球很远的. 在 I 中我们曾认为加速度等于 g，然而这只是在地球表面上才有效. 根据万有引力定律，质量分别为 M（地球）与 m（所研究的物体）而相距为 s 的两个物体之间的引力为 $K=\gamma\frac{Mm}{s^2}$（γ 为万有引力常数）. 因此，其加速度满足方程：

$$\ddot{s}=-\gamma M\frac{1}{s^2}. \tag{7}$$

这个负号说明力是与 s 的正方向相反的. 比起方程(6)来，积分这个二阶微分方程实际上要困难的多. 不过它的解还是可用显式表达出来；在后面的 11. VII 中我们还要再讨论它. 如果我们假设物体是在与距离地球中心为 R 处从静止状态下放开的，那末它的初始值条件为：$s(0)=R$, $\dot{s}(0)=0$.



在求一个微分方程的解时，有一个简单的，有时是卓有成效的方法：找一个比较明显的函数估计式（尽可能含有参数），然后验证，是否由它可求得方程的解. 例如，对方程(7)我们用下面的估计式来试一试

$$s(t)=a\cdot t^b.$$

于是，方程(7)成为$ab(b-1)t^{b-2}=-\gamma Ma^{-2}t^{-2b}$，由此得到$b-2=-2b$，因而$b=\frac{2}{3}$，及$a\cdot\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)=-\gamma Ma^{-2}$，因此$a=\left(9\gamma M/2\right)^{\frac{1}{3}}$。故方程的解为 $s(t)=a\cdot t^{\frac{2}{3}}$. 容易看出，所有的函数

$$s(t)=a(C\pm t)^{\frac{2}{3}}\ \text{这里}\ a=\left(9\gamma M/2\right)^{\frac{1}{3}},\ C\ \text{是任意常数} \tag{8}$$

当 $C\pm t>0$ 时，都是微分方程(7)的解. 然而，在这些解中，没有一个解是满足上述初始值条件的. 例如，对解

$$s(t)=a\left(\frac{R\sqrt{2R}}{\sqrt{9\gamma M}}-t\right)^{\frac{2}{3}}$$

我们有 $s(0)=R$，但 $v(0)=\dot{s}(0)=-\sqrt{2\gamma\frac{M}{R}}$. 因此这个解描述的是：一个物体在 $t=0$ 时，在距地心 $s=R$ 处以$\sqrt{2\gamma\frac{M}{R}}$的初速度向地球下落.

我们再来考虑特解($C=0$)

$$\bar{s}(t)=at^{\frac{2}{3}}. \tag{9}$$

它对应于这样一个运动：物体不返回地球，当 $t\to\infty$ 时，$\bar{s}(t)\to\infty$，然而它的速度$\bar{v}(t)=\frac{2}{3}at^{-\frac{1}{3}}$，当 $t\to\infty$时趋于0. 通过消去 t，易于计算物体在距地心 ρ 处的速度为：

$$v_\rho=\sqrt{2\gamma\frac{M}{\rho}}.$$

如果令 ρ 等于地球半径，那末我们得到(这里 $\rho=6{,}370\times10^8\text{cm}$，$\gamma=6.685\times10^{-8}\ \text{dyn}^{\dagger}\cdot\text{cm}^2\cdot\text{g}^{-2}$，$M=5.97\times10^{27}\text{g}$)

$$v_\rho=1.12\times10^6\ \text{cm/s}=11.2\ \text{km/s}.$$

这就是大家知道的"逃逸速度"，即从地球表面上发射出去的物体

† 指我国法定单位，为 $6.685\times10^{-18}\text{N.cm}^2, \text{g}^{-2}$. 译者

为了不再返回地球所必须具有的最小速度. 试将本导言末的问题与它作一比较.

III. 在两个物体的引力场中的运动（人造卫星轨道） 下面的方程组(10)描述的是在两个大物体(地球与月球)的引力场中一个小物体(人造卫星)的运动. 在这里，假设这三个物体是在一个固定的平面上运动，并且这两个大物体以常角速度及相互距离不变的方式围绕它们的公共的重心旋转. 因此，特别，小物体对此运动的干扰可忽略不计(这就是形容词"小"与"大"的意义). 取一辅助旋转坐标系，这两个大物体在此坐标系中被看作是静止的，而小物体的轨道用一个函数对$(x(t), y(t))$来描述，它们满足两个二阶微分方程的方程组:

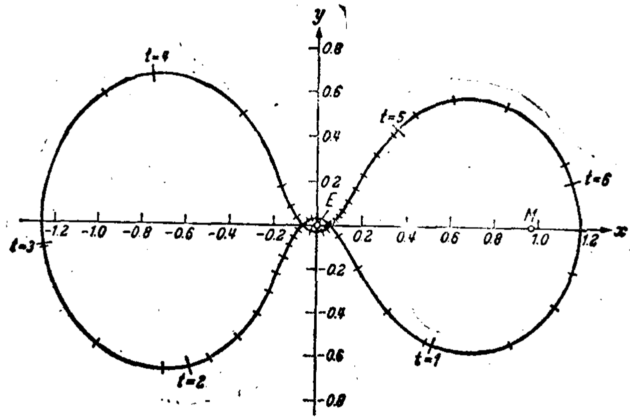
$$\begin{aligned}\ddot{x}&=x+2\dot{y}-\mu'\frac{x+\mu}{[(x+\mu)^2+y^2]^{\frac{2}{3}}}-\mu\frac{x-\mu'}{[(x-\mu')^2+y^2]^{\frac{2}{3}}}\\ \ddot{y}&=y-2\dot{x}-\mu'\frac{y}{[(x+\mu)^2+y^2]^{\frac{2}{3}}}-\mu\frac{y}{[(x-\mu')^2+y^2]^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}\tag{10}$$

这里，方程的零点就是位于x轴上的两个大物体的重心，值μ或$\mu'=1-\mu$分别等于位于正x轴上的物体的质量与两物体的总质量之比或位于负x轴上的物体的质量与两物体的总质量之比. 此外，长度单位这样选择，使得两个大物体之间的距离等于1，而时间单位的选择也是使得旋转角速度等于1(即旋转一周经历2π个时间单位). 下图描绘了小物体运动的封闭轨道（总共标明了48个计算轨道点）. 这里$\mu\approx0.01213$*(这就是地球——月球的质量比)其初始条件为:

$$x(0)=1.2,\quad y(0)=0$$

---

* 按上面的说法，$\mu=\dfrac{M}{M+m}$，$M=6.0\times10^{24}$kg，$m=7.4\times10^{22}$kg，所以$\mu\approx$ 0.01213. 译者



在地球与月球的重力场中的周期运动

$$\dot{x}(0)=0 \qquad \dot{y}(0)\approx-1.04934.$$

周期(旋转时间)为$T\approx6.19217$.

在这些例子中，显示了各种十分不同的问题. 眼下我们将利用初等求解法并且将认识微分方程的一些类型，它们的解可以表示成封闭形式(例 I,II). 但是在这里更多的还是这种情况: 明显的可解性是例外，不是规律，这在求原函数的积分计算中就已经出现了这种现象. 本来研究微分方程理论的目的就是去建立一般的存在——唯一性定理及有关定理 (例如关于方程的解对各种数据的连续依赖性定理)以及对有关解的性态(解的有界性，解的增长阶，解的振动特性，…) 作出定性的论述. 这里不等式定理也是重要的；下面的问题就是第一个例子.

在本本导论性的教科书中，不可能讨论各种重要的课题. 例如常微分方程的周期解就是如此. 它在力学(振动)及天体力学(封闭轨道)中有着重要的应用，但是一般来说，数学上的研究是困难的. (在问题 11. IV 中，我们将要研究有关周期解方面的一些简单

结果）．例 III 中所描述的“平面约束三体问题”中周期轨道的存在性问题不久之前才得到满意的解决．参看 Arenstorf(1963)．

有关微分方程的数值解的问题，本书也没有去讨论．我们指出，例如在有关空间航行的问题中（飞行体的轨道的确定）常常出现非常困难的数值问题．近年来，发展起来的有效的数值计算方法可以确定具有足够精确度的轨道和可实现的计算量（对于大型的计算机来说是可实现的！）；例如参看 Bulirsch 和 Stoer(1966) 的著作．上面的插图就是此书上的．

IV. 问题 试证明在例 II 的结尾所提出的论断．此结论的更准确的提法是：如果 $s(t)$ 是微分方程(7)在区间 $0<t_0\leqslant t<t_1$ 内的一个正解（允许 $t_1=\infty$），$\bar{s}(t)$ 是由(9)所确定的解，并且 $s(t_0)=\bar{s}(t_0)$，$\dot{s}(t_0)=v(t_0)<\bar{v}(t_0)$，那末对 $t_0<t<t_1$ 有 $s(t)<\bar{s}(t)$ 和 $v(t)<\bar{v}(t)$．此外，$s(t)$ 是上有界的，并且 $v(t)$ 最多有一个零点（这就是说，若 $v(t_0)>0$，则出现一个返回轨道）．

提示．导出关于差值 $d(t)=\bar{s}-s$ 的微分方程并由此推出，只要 d 是正的，则 $\dot{d}$ 是单调增加的．要注意 $\ddot{s}<0$ 以及当 $t\to\infty$ 时 $v(t)\to 0$．

I. 一阶常微分方程

§1. 一阶显式微分方程. 初等可积情形.

在这里我们考虑一阶显式微分方程

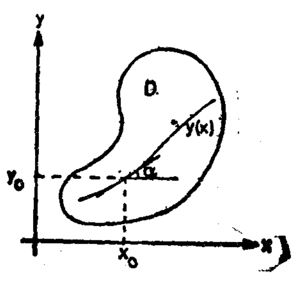
$$y'=f(x,y), \tag{1}$$

这里假设右端 $f(x,y)$ 是定义在 (x,y) 平面某一集合 D 上的实值函数.

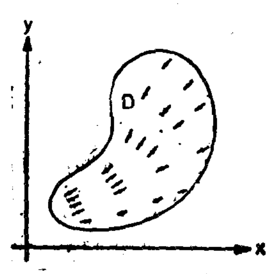
I. 解、线素、方向场 设 J 是一区间(如果没有特别申明，一个区间可以是开的、闭的、半开的、一条半直线或整条直线). 函数 $y(x)$: $J\to R$ 是微分方程(1)(在 J 中)的一个解，如果在 J 中 y 是可微的，又它的图形 $y\subset D$ 并且满足方程(1)，即如果对 $x\in J$ 有

$$(x,y(x))\in D \quad 和 \quad y'(x)=f(x,y(x)).$$

微分方程(1)有一个简单的几何解释. 如果积分曲线 $y(x)$ 通过点 $(x_0,y_0)\in D$，即 $y(x_0)=y_0$，那末此曲线在该点的斜率是 $y'(x_0)=f(x_0,y_0)$. 因此通过点 (x_0,y_0) 的解曲线在 (x_0,y_0) 处的斜率是由微分方程(1)来确定的：它等于 $\operatorname{tg}\alpha=f(x_0,y_0)$. 对 D 中的每一点都可以这样来考虑. 这就产生了线素与方向场的概念. 一个三元



斜率与线素



方向场