随机振动实验技术

戴诗亮　编著

清华大学出版社

随机振动实验技术

戴诗亮　编著

清华大学出版社

内 容 简 介

本书讨论随机振动实验的方法、原理和应用，包括随机振动参量的测量分析方法，随机数据处理方法，随机振动实验的模拟、控制方法以及随机振动实验用于机械阻抗测量、模态参数识别和故障诊断的方法。可供力学、机械、航空、土建、水利、交通和海洋工程等各行业中从事随机振动实验的工程技术人员和高等院校师生参考，也可作为有关专业研究生和大学生教材。

随机振动实验技术

戴诗亮　编著

★

清华大学出版社出版

北京　清华园

北京景山学校印刷厂排版

河 北 新 城 印刷厂印装

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

★

开本：787×1092　1/16　印张：15 3/4字数：380千字

1984年4月第一版　1984年4月第一次印刷

印数：1～15000

统一书号：15235·102　定价：2.10元

前言

机械振动分为确定性振动和随机振动两大类。二者有本质的区别。

在自然界和工程技术领域中有大量随机振动问题。例如：汽车、拖拉机、装甲车等行驶时因路面凸凹不平引起的振动，挖土机等工程机械作业时由于随机性载荷引起的振动，机床切削时因工件表面硬度不均匀引起的振动，海洋风浪引起船舰及采油平台等海洋结构的振动，空气湍流引起机翼的振动，地震引起土建结构的振动等等都是随机振动。

随着科学技术的飞速发展，不断提出大量随机振动研究课题。例如：关于随机激励的调查与分析，随机振动响应分析，材料与结构随机振动强度与可靠性分析，利用随机振动实验作系统动特性分析等问题以及随机隔振、减振问题，舒适性问题，结构抗震问题等都是工程技术中提出的非常重要的研究课题。

随机振动现象虽然广泛存在，随机振动课题虽然大量摆在我们面前，但由于其复杂性和困难，随机振动研究工作在一个长时间内进展缓慢。直到最近二、三十年才有较大的发展，而特别是最近十几年来由于快速富里叶变换技术的发展和计算机的普及和微型化，使得随机振动数据处理和实验控制技术有飞跃进步，大大推动了随机振动研究工作，为解决工程技术中的随机振动问题提供了很好的条件。

要解决随机振动问题，就要开展随机振动的理论和实验研究工作，二者应该紧密结合。而且，在很多情况下，实验工作有特殊的重要性。不管是振动设计问题、系统识别问题还是环境预测问题都离不开随机振动实验，有些问题甚至只能用实验的方法进行研究，即使用理论分析方法研究随机振动问题，也往往要用实验验证。所以，要研究和解决随机振动问题，不解决实验方法、实验技术和实验设备的问题是很难进行的。可以说，在随机振动实际工作中，大部分工作都是实验工作。

本书对随机振动实验技术作专门介绍，全书共分十章。

第一章介绍随机振动的特点和描述方法。

第二章主要介绍随机振动实验区别于确定性振动实验的特点。

第三章叙述随机振动参量的模拟式测量与分析方法。

第四章介绍随机实验数据的数字化处理方法，包括数据准备、数据检验、采样与富里叶变换技术。

第五章叙述随机振动参量的数字式分析方法。

第六章介绍随机振动的实验室再现方法，包括在实验室模拟真实随机振动环境的方法、等价条件、模拟式振动控制方法（均衡技术）以及振动台随机振动能力计算和强化随机振动实验方法。

第七章介绍随机振动实验的数字式控制方法，即数字式均衡技术。

第八章至第十章讨论随机振动实验技术的应用，包括利用随机振动实验方法作机械阻抗

测量、模态参数识别以及结构故障诊断分析。

本书重点在阐述随机振动实验技术的物理概念、力学原理和实验方法、并介绍常用仪器设备的原理，不准备详细涉及仪器的电路结构和使用细节。限于篇幅，关于确定性振动实验方法都未包括在本书中。为了便于学习，结合随机振动实验内容，本书介绍有关的概率论、数理统计、富里叶变换及随机振动理论等方面的基础知识。

由于作者水平所限，书中错误和不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

本书在编写过程中得到清华大学罗远祥教授的热情支持，他在百忙中对全文仔细审阅，提出了许多宝贵的、指导性的修改意见。清华大学徐秉业副教授、郑兆昌副教授、丁奎元老师、徐远超老师及蒋和明、陈赣同志也给了热情的鼓励和帮助。在此对他们表示衷心的感谢。

作者　1981年

目　录

第一章　随机振动的基本特性

1.1 概　　述

一、振动的分类

振动是物体机械运动的一种特殊形式。振动常用运动的时间历程来描述，或者说用位移、速度或加速度的时间函数来表示。例如简谐振动的位移时间历程是

$$x(t)=x_0\ \sin(\omega t+\varphi) \tag{1.1}$$

式中 $x(t)$是振动位移，

x_0是位移振幅值，

ω是振动圆频率，

t是时间，

φ是初相角。

显然，在 x_0、ω 和 φ 一定时，简谐振动是一个确定性运动。对任意时刻 t，振动位移 $x(t)$ 的数值可以精确计算出来，它是一个确定的数，换句话说，描述简谐振动所用的是确定性数据。

我们按照描写振动的数据的特点，可将物体振动分类如图 1.1 所示。即将振动分为确定性振动和随机振动两大类。

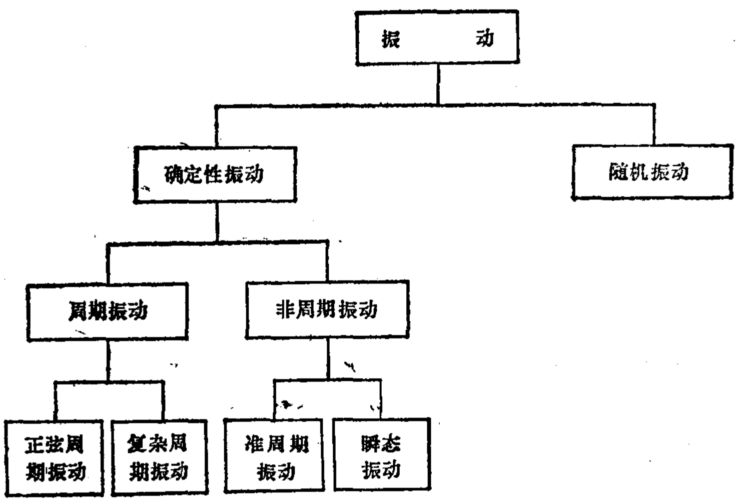

图 1.1　振动的分类

确定性振动又分为周期性振动和非周期性振动。

周期振动包括简谐振动和复杂周期振动，所谓复杂周期振动就是除简谐振动以外的周期振动。

非周期振动包括准周期振动和瞬态振动。所谓准周期振动也是由一些不同频率的简谐振动合成的振动，这一点与复杂周期振动类似。但是，准周期振动没有周期性，组成它的简谐分量中总会有一个分量与另一个分量的频率之比值为无理数。而复杂周期振动的诸简谐分量

中任两个分量的频率比都是有理数，这是准周期振动与复杂周期振动的不同之点。至于非周期振动中的瞬态振动，其时间函数为各种脉冲函数或者衰减函数，例如有阻尼自由振动就属于瞬态振动。或者可以说除准周期振动以外的一切可以用时间函数描述的非周期振动都属于瞬态振动。

简谐振动、复杂周期振动、准周期振动和瞬态振动的时间历程图分别如图 1.2 所示，其中瞬态振动是一种衰减振动。

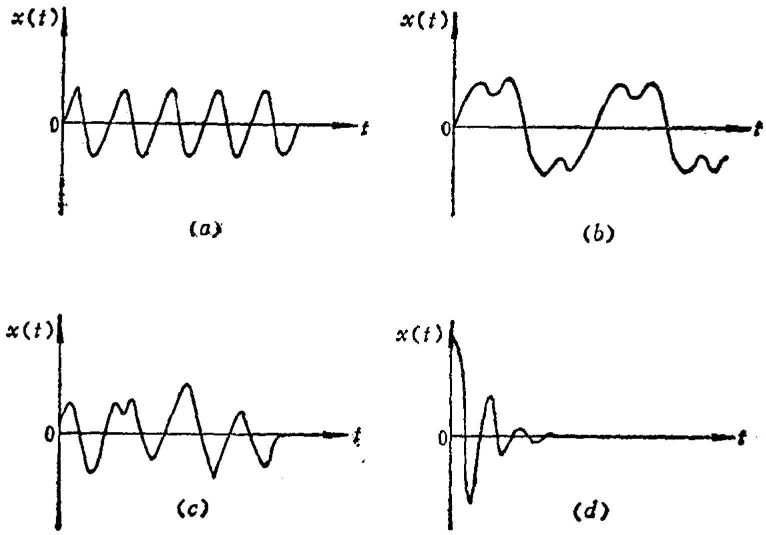

图 1.2　确定性振动

(a) 简谐振动　(b) 复杂周期振动　(c) 准周期振动　(d) 瞬态振动

随机振动是一种非确定性振动。当系统作随机振动时，事先不可能确定系统中观测点在某时刻的位置以及振动的有关振幅、频率或相位等参数的瞬时值，即不能用确定函数来描述这种振动。例如，我们研究结构抗震问题时，就不能用一个确定函数来描述可能要发生的地震的振动波形，也就是对振动系统的激励事先不能用确定函数描述。因此振动响应也就不能用确定函数描述。

随机振动虽然具有不确定性，但却有一定统计规律性。所谓统计规律性就是在一定条件下多次重复某项实验或观察某种现象所得结果呈现的规律性。例如当实验次数很多时，某参量测量结果的平均值就可能会趋向某一确定的极限值。

在自然界和生产实践中除了因激励随机变化引起随机振动外，振动系统本身的参量随机变化也会引起随机振动。

与确定性振动一样，振动系统在随机初始条件激励下会引起随机自由振动，当激励长时间作用时引起的随机振动叫做随机受迫振动。

在有些场合，一种振动是属于确定性振动还是属于随机振动很难区分。因为在确定性振动中也难免有意外因素的影响，使得振动有一定随机性。从这个意义上讲，绝对的确定性振动不存在。在实践中，判断振动是确定性的还是随机的，通常是以在相同条件下是否产生相同的振动结果作为依据。如果在实验人员控制的相同的实验条件下多次重复同一实验，所得振动结果都相同，则为确定性振动，否则为随机振动。

既然一个随机振动系统在相同的条件下进行多次重复实验所得振动记录都不完全一样，因此要研究随机振动就要研究大量实验数据的统计规律性，这是在研究方法上与确定性振动的不同之点。

随机振动的时间历程如图 1.3 所示。

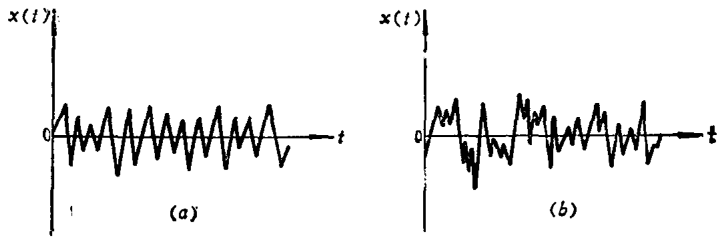

图 1.3　随机振动时间历程图

要注意一点，随机振动不等于复杂振动。例如，初相角随机变化的简谐振动，波形十分简单，但它却是一种随机振动。“随机”不是复杂的意思，而是不确定性的意思。一个确定性振动波形无论怎样复杂，也不是随机振动。对于任意时刻 t，确定性振动参数是可以根据描述振动的函数进行计算的，即表示振动特性的位移、速度和加速度的幅值，频率以及相位等参数都是确定的。

随机振动的其它特性后面再详细讨论。按照随机振动的特性，从不同的角度，随机振动还可有以下各种分类方法：

（1） 按振动激励和振动系统参数的特性可分为：

随机激励引起的随机振动；

系统参数的随机性引起的随机振动；

随机激励和系统参数的随机性共同引起的随机振动。

（2） 按激励类型可分为：

随机自由振动；

随机受迫振动。

（3） 按系统自由度可分为：

单自由度随机振动；

多自由度随机振动；

无限多自由度随机振动。

（4） 按振动微分方程的特点可分为：

线性随机振动；

非线性随机振动。

（5） 按随机振动频带宽窄可分为：

宽带随机振动；

窄带随机振动。

（6） 按振动的特性随时间变化情况可分为：

平稳随机振动；

非平稳随机振动。

关于这里所列分类方法，有些与确定性振动的分类方法类似，有一些以后再详细讲，这

里就不多说了。

二：各类振动的频谱特性

各类确定性振动和随机振动不仅时间历程图有很大的差别，而且频谱特性也有很大的差别。频谱特性在振动研究中非常重要，很多振动问题，例如系统动特性研究，共振问题，响应分析，环境预测以及寻找振源等各种振动理论分析和实际工程问题都离不开对振动进行频率分析。所以我们将各类振动的频谱特性分述如下。

简谐振动只包括单一频率成分，可用图 1.4 所示线谱图来表示，这是振动能量按频率的分布图。显然，简谐振动全部能量集中在单一频率上。

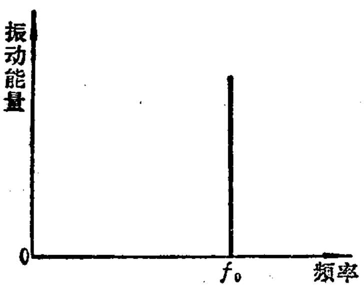

图 1.4 简谐振动的线谱

图 1.5 周期振动的线谱

复杂周期振动，通常即称周期振动，可按富里叶级数展开而分解为简谐振动的叠加。其振动能量线谱图如图 1.5 所示。图中 f_1 是基频，它等于周期振动的周期的倒数。而 $f_2, f_3, \cdots, f_n$ 是高次谐振频率。且

$$
\begin{aligned}
f_2 &= 2f_1, \\
f_3 &= 3f_1, \\
&\vdots \\
f_n &= nf_1
\end{aligned}
$$

即周期振动的能量分散于基频及各个整倍频处。

虽然准周期振动也是由简谐振动叠加而成，例如

$$x(t) = x_1 \sin\omega t + x_2 \sin\sqrt{2}\,\omega t$$

就是准周期振动，但不管时间 t 延续多长，$x(t)$ 都不会成为周期函数。具有多个简谐分量的准周期振动的线谱如图 1.6 所示。虽然准周期振动能量也是集中在频率 $f_1, f_2, \cdots f_n$ 处，但这里至少存在一个 $f_i (i = 2, 3, \cdots, n)$，使得 f_i/f_1 为无理数，更不会所有谱线都在 f_1 的整倍频处。

图 1.6 准周期振动的线谱图

瞬态振动的频谱与周期振动及准周期振动的情况都不一样。当瞬态振动 $x(t)$ 满足绝对可积条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty \qquad (1.2)$$

时，$x(t)$ 的富里叶积分

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \qquad (1.3)$$

就存在。式中 $j=\sqrt{-1}$，f 是振动频率。

$X(f)$ 就是瞬态振动 $x(t)$ 的频谱，一般为复数，若只考虑其幅值大小，则 $X(f)$ 的模 $|X(f)|$ 就直接表示 $x(t)$ 的各频率分量的大小。

如图1.2(d)所示瞬态振动

$$x(t)=\begin{cases}x_0e^{-at}\cos bt & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

即 $x(t)$ 是一衰减振动，则其 $|X(f)|-f$ 关系如图 1.7 所示。

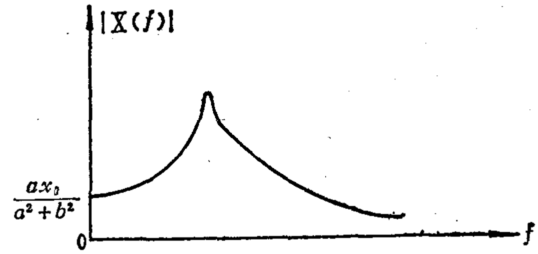

图 1.7 图 1.2(d)所示瞬态振动的频谱图

由于 $|X(f)|$ 是 f 的连续函数，所以瞬态振动不是离散谱，而是连续频谱。即振动能量分布在一个连续的频率区间上，不象周期振动和准周期振动的能量是集中在离散频率点上，这是瞬态振动与周期振动及准周期振动的一个根本不同点。

随机振动的频谱也是连续频谱，能量也是分布在一个连续的频带 (f_1，f_2) 上。图 1.3 所示随机振动的能量对频率的分布图如图 1.8 所示。

随机振动和瞬态振动一样，都具有连续频谱，这是它们的相同之点。但二者有本质的不同，即瞬态振动的频谱是一确定函数，每个频率点上的振动能量是唯一确定的。而随机振动的频谱具有不确定性，每个频率点上的振动能量有不确定性。在相同的条件下多次重复实验时，每次所得频谱图是有差别的，但却是有一定统计规律性的。具有不确定性和统计规律性这两点就是随机振动的频谱区别于瞬态振动频谱之所在。

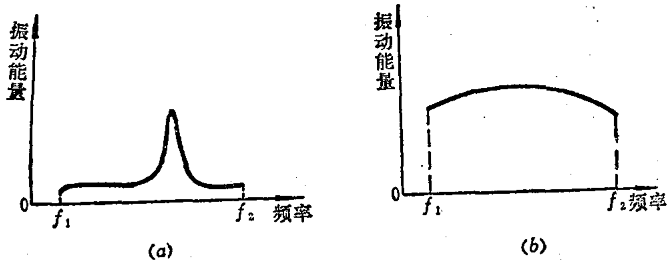

图 1.8 随机振动能量对频率的分布图

三、样本函数与随机过程

研究随机振动需要研究相同实验条件下所得多个振动记录的统计规律性，即需要研究多组振动数据，要研究可能取得的全部数据集合。举例说，汽车从甲地到乙地行驶，我们测量车身上某点铅垂加速度随时间的变化量，所得结果就是随机振动记录的一个典型例子。从甲地到乙地行驶 N 次所得的振动加速度时间历程图如图 1.9 所示。图中 t 表示时间，$x_i(t)$ 表示第 i 次行驶所测得的加速度值，$i=1,2,\cdots,N$。

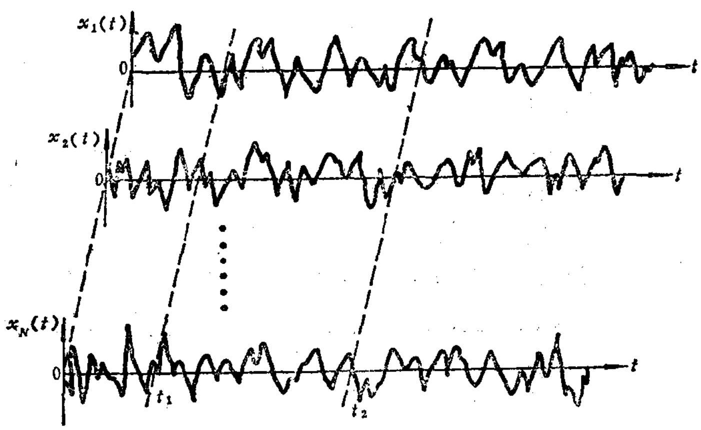

图 1.9 随机振动记录

显然，对于某一时刻 t_1，$x_i(t)$ 到底等于多大是不确定的，随次数 i 而变化。即每次记录都不可能重复前次的记录。如果为了某种目的，例如为了货物隔振而需要

研究即将发生的某一次行驶的加速度随时间的变化规律，那就得等该次行驶开始后去实地测量记录才能得到。在这以前所得的记录，虽然车辆、道路、装载、驾驶等各方面条件都相同，但也不能代替。所以，要研究某型号汽车从甲地到乙地行驶时车身上某点的振动规律，理论上就得行驶无穷多次，才能得到随机振动的全部信息。

图 1.9 所示随机振动记录中的某一次记录 $x_i(t)$ 称为一个样本函数。严格说，样本函数的时间区域应是无穷的。在有限时间区间观察所得结果叫做样本记录。

图 1.9 所示随机振动记录当$N\to\infty$时就形成一个随机过程。为了叙述随机过程的定义，我们先讨论随机事件、概率和随机变量的概念。

有许多现象，它们在一定条件下可能出现也可能不出现，这种现象称为随机事件，简称事件。例如"掷硬币得正面"就是随机事件。

概率就是在一次实验中随机事件A出现的可能性的数量上的描写，记作 $\mathrm{Prob}(A)$。概率可以用频度（也叫频率）来定义：进行 n 次实验，若事件A出现 μ 次，则称$\frac{\mu}{n}$为A在这 n 次实验中出现的频度。当 n 充分大时，频度有稳定的趋势，$\frac{\mu}{n}$在$\mathrm{Prob}(A)$附近摆动。当 $n\to\infty$ 时，$\frac{\mu}{n}$按一定意义趋向于概率$\mathrm{Prob}(A)$。

通俗地讲概率就是指随机事件出现的可能性的大小，它既表示在多次实验中某一事件发生的次数的可能性，又表示一次观测中该事件发生的可能性，即事件发生的机会。如果事件肯定发生，概率为 1，肯定不发生概率为零。一般情况下：

$$0\leqslant \mathrm{Prob}(A)\leqslant 1 \tag{1.4}$$

随机变量：若变量X的取值是不确定的，要由实验结果而定，但"取值小于任意实数"有确定的概率，则称 X 为随机变量。

例如某人打靶，弹着点离靶中心点距离X事先是不知道的，要射击以后才能确定，即X的取值要由实验结果而定。打靶时虽然每次射击弹着点距中心点距离X有无穷多个可能，但是对于确定的人，在确定的条件下，X的取值小于任意实数 x 的概率是确定的，所以X就是一个随机变量。

由于有了随机变量的概念，使概率由研究事件发展为研究函数。下面我们就可以定义随机过程：

随机过程是时间的函数，但不同于一般的函数，它在给定时刻的函数值不是一个数值，而是一个随机变量。

例如图 1.9 所示随机振动记录，当$N\to\infty$时，样本函数的总体就是一个随机过程。在某一时刻 $t=t_1$，车身上某点的振动加速度值 $X(t_1)$是一个变量，它的取值 $x_i(t_1)$，$i=1,2,\cdots,N$，是不确定的，但取值小于任意实数 x 的概率是确定的，所以 $X(t_1)$是一个随机变量。同样，在另一时刻 $t=t_2$，振动加速度 $X(t_2)$也是一个随机变量。

一个随机过程是随机现象可能产生的全部样本函数的集合，而一个样本函数是随机过程的一个物理现实。

由于在实践中只能得到有限长的样本记录，而不可能得到无限长的样本函数，所以在随机振动实验工作中并不严格区分样本记录和样本函数，有时也称样本记录为样本函数。一个随机过程的每一个样本记录的时间区间一般是相同的。这个时间区间可以是很长的时间，也

可以是相对很短的时间，这要根据所研究问题及数据处理的特点和需要而定。例如，河水流量随机过程的样本长度为一年，高大建筑物脉动随机过程的样本记录长度也许需要数小时，而在发射阶段火箭振动随机过程的样本记录可能只有几秒钟长。

图 1.9 所示随机过程的具体获得方法可以是某一个驾驶员驾驶同一辆车，努力控制车速和其它驾驶条件不变，在同一条道路上行驶N次而测量得到。也可以是N个驾驶员各驾驶一辆同一型号的车，在驾驶条件不严格控制的情况下各行驶一次而测量得到。显然，这样得到的两个随机过程会有所不同，前者各样本记录之间差异较小，后者则各样本记录间差异较大。

四、随机过程的特性与分类

（一） 概率分布函数和概率密度函数

为了研究随机过程，我们先介绍随机变量的概率分布函数和概率密度函数。

随机变量的取值事先是不可预知的，但是取值大于某值，小于某值或落在某一范围的概率是确定的，是可以计算出来的。

随机变量分为离散型和连续型两种。对于连续型随机变量X，我们定义X的取值小于某一实数x的概率为概率分布函数

$$P(x)=\mathrm{Prob}(X<x) \tag{1.5}$$

例如，在数轴上$[0,a]$区间内随机地投一质点，则质点所在的坐标是随机变量X，X的取值是连续的，是$[0,a]$内之任一实数，如图 1.10(a) 所示。

显然，上例中X小于任意实数x的概率是可以计算的，即概率分布函数可以算出：

$$P(x)=\begin{cases}0 & (x\leqslant 0)\\ \dfrac{x}{a} & (0<x\leqslant a)\\ 1 & (x>a)\end{cases}$$

此概率分布函数如图 1.10(b) 所示。

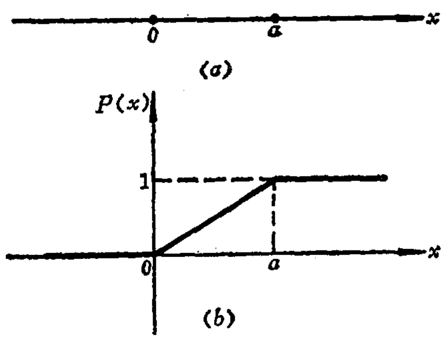

图 1.10 概率分布函数图

概率分布函数的一些性质简述如下：

（1） $P(x)$非降：若 $b>a$，则 $P(b)\geqslant P(a)$。

（2） $P(x)$左连续，即 $\lim\limits_{x\to a^-}P(x)=P(a)$，$a^-$ 表从左边趋近 a。

（3） $P(-\infty)=0$；
$P(\infty)=1$。

（4） X连续则 $P(x)$必连续。

如果随机变量X的概率分布函数 $P(x)$可表示为

$$\begin{aligned}P(x)&=\int_{-\infty}^{x}p(x')dx'\\&=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx\end{aligned} \tag{1.6}$$

则称 $p(x)$ 为随机变量X的概率密度函数。如图 1.10(b) 所示概率分布函数对应的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & (0<x\leqslant a)\\ 0 & (\text{其它})\end{cases}$$

如图 1.11 所示，

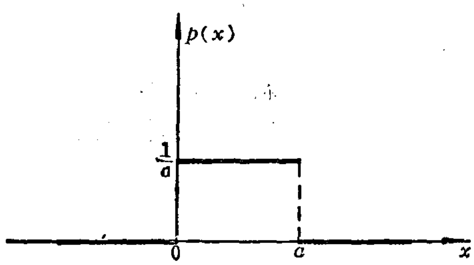

图 1.11 一种概率密度函数图

概率密度函数的一些性质简述如下：

（1） $p(x)\geqslant 0$。

（2） $\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1$。

（3） 对于 $a<x<b$

$$\int_a^b p(x)dx=P(b)-P(a)$$
$$=\text{Prob}(a\leqslant X<b)。$$

（4） $p(x)=\dfrac{dP(x)}{dx}$；

$$\begin{aligned}\text{Prob}(x\leqslant X<x+dx)&=P(x+dx)-P(x)\\&\approx dP(x)\\&=p(x)dx。\end{aligned}$$

设随机变量X的概率密度函数 $p(x)$ 如图 1.12 中曲线所示，则X的取值落在 x 与$x+dx$ 之间的概率等于 $p(x)dx$ 如图 1.12 中影线面积所示。这是随机振动中一种典型的一维概率

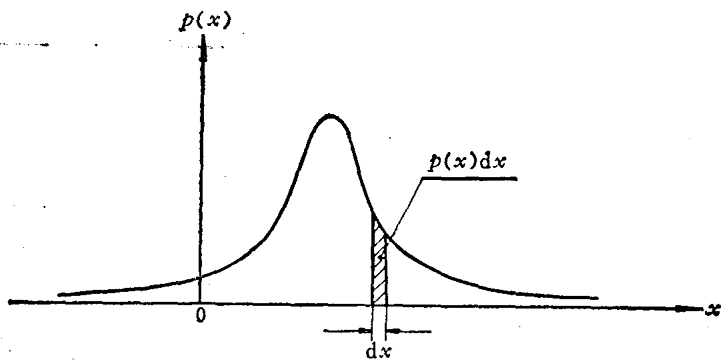

图 1.12 一种典型的一维概率密度图

密度图。一维概率密度函数的量纲是$\dfrac{1}{x}$的量纲，$p(x)$只有乘以区间 dx 才等于概率。连续随机变量的取值落在一个点上的概率为零。所以概率密度函数中密度二字与质量线密度中的密度二字意思类似。

当两个随机变量 X_1，X_2 的取值由实验结果而定，且对任意实数 x_1 和 x_2，X_1 的取值小于 x_1 以及同时 X_2 的取值小于 x_2 有确定的概率，则称 X_1,X_2 为二维随机变量。且

$$P(x_1,x_2)=\text{Prob}(X_1<x_1,X_2<x_2) \tag{1.7}$$

就是二维概率分布函数。

二维概率分布函数有如下特性：

（1） 对 x_1,x_2 都非降。

（2） 对 x_1,x_2 都左连续。

（3） $P(-\infty, x_2)=0$;

$P(x_1, -\infty)=0$;

$P(-\infty, \infty)=0$;

$P(\infty, -\infty)=0$;

$P(\infty, \infty)=1$。

（4） 对于实数

$a_1 \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant b_2$

有 $$P(a_2, b_2)-P(a_1, b_2)-P(a_2, b_1)+P(a_1, b_1)=A \geqslant 0$$

如图 1.13 所示。A 即二维随机变量的取值落在图中影线面积之内的概率。

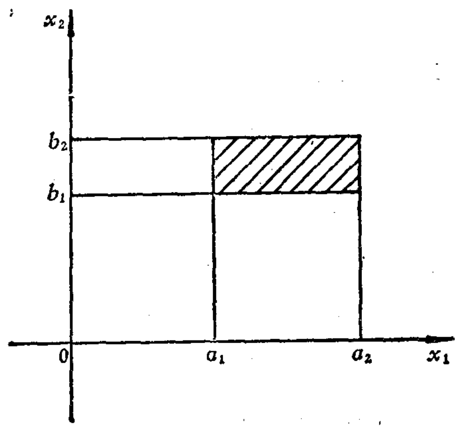

图 1.13 二维概率分布函数的区间

当二维概率分布函数 $P(x_1, x_2)$ 可表示为

$$P(x_1, x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} p(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \tag{1.8}$$

时，$p(x_1, x_2)$ 即为二维随机变量 X_1, X_2 的二维概率密度函数。其典型图形之一如图1.14所示。

如图 1.9 所示随机过程，同时考虑两个随机变量 $X(t_1)=X_1$ 及 $X(t_2)=X_2$ 的联合概率密度时，则 $X(t_1)$ 的取值落在 x_1 和 x_1+dx_1 之间，同时 $X(t_2)$ 的取值落在 x_2 和 x_2+dx_2 之间的概率

$$\text{Prob}[x_1 \leqslant X(t_1) < x_1+dx_1,\ \ x_2 \leqslant X(t_2) < x_2+dx_2]$$

就等于图 1.14 所示以微元面积 dx_1dx_2 为截面、以 $p(x_1, x_2)$ 为高度的体积。

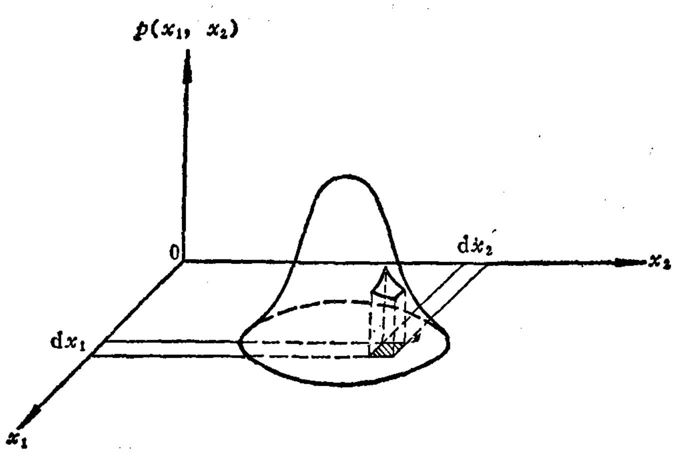

图 1.14 二维概率密度函数

二维概率密度函数 $p(x_1, x_2)$ 的一些性质：

（1） $p(x_1, x_2) > 0$。

（2） $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1$。

（3） $dP(x_1, x_2)=p(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$。