

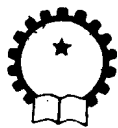
庄葆华 李真 编著

齿轮 近代测量技术与 仪器



齿轮近代测量技术与仪器

庄葆华 李 真 编著



本书着重介绍了齿轮误差的近代测量技术及新型齿轮量仪。本书共有八章,内容包括:基本概念、齿轮误差及齿轮公差标准介绍、三项主要齿轮单项误差及齿轮整体误差的测量技术与量仪、齿轮噪声测量方法和微型计算机技术在齿轮误差测量中的应用。

本书可作为高等学校中精密计量与测试仪器专业硕士研究生及高年级大学生的选修课教材或教学参考书,亦可供其他有关专业研究生及大学生和有关工程技术人员、科研人员参考。

齿轮近代测量技术与仪器

庄葆华 李真 编著

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

北京市密云县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张16 3/4·字数 406 千字

1986年5月北京第一版·1986年5月北京第一次印刷

印数 0,001—4,700 ·定价4.00元

*

统一书号: 15033·6252

前 言

本书是根据高等学校机械工业部对口专业座谈会有关编写部分选修课教材及教学参考书的精神编写的。

近年来, 齿轮测量技术发展很快。由于齿轮误差参数比较复杂, 为了实现高精度自动化测量, 在齿轮测量技术中几乎应用了目前发展的各种新技术, 如光栅技术、激光技术、数字技术及计算机技术等。由于这些新技术的应用, 形成了一套与传统测量技术所不同的新测量原理、新测量技术及新型量仪。本书所编入的内容着重反映了这些近代齿轮测量技术。

本书共分八章: 第一章概论中简介了齿轮测量技术的发展概况及一些基本概念; 第二章介绍了齿轮误差概念及新制定的齿轮公差标准; 第三、四、五、六章编写了主要的齿轮单项误差: 周节误差、齿形误差、齿向误差及齿轮整体误差的近代测量技术; 第七章介绍了齿轮噪声的测量方法; 第八章简介了微型计算机技术在齿轮误差测量中的应用。其中, 光栅式周节误差检查仪及微型计算机在周节误差测量中的应用部分为作者的科研成果。

本书可作为高等学校中精密计量与测试仪器专业硕士研究生及高年级大学生的选修课教材或教学参考书, 亦可供其他有关专业研究生及大学生和有关工程技术人员、科研人员参考。

本书由庄葆华(一、三、四、七章和第八章中第一、二、四节)、李真(二、五、六章和第八章中第三节)编著。本书由机械工业部成都工具研究所傅崧俊同志主审, 张迺君同志和郝志峰同志参加了审稿工作。此外, 天津大学孙祖宝同志、中国计量科学研究院唐启昌同志、上海量具刃具厂陈志一同志及北京量具刃具厂赵尔夫同志为本书的编写工作提出了宝贵的意见, 谨此一并表示感谢。

由于编者学识水平有限, 书中难免有缺点和错误, 恳请读者给予指正。

编者

1984·9.1.

本书所用主要符号表

a	中心距, 标准中心距	r_a	齿顶圆半径
b	齿宽	r_b	基圆半径
d	直径, 分度圆直径	r_f	齿根圆半径
d_b	基圆直径	s	齿厚, 分度圆齿厚
d_a	齿顶圆直径	s	弦齿厚, 分度圆弦齿厚
d_f	齿根圆直径	s_c	固定弦齿厚
e	偏心距	x	变位系数
h	齿高, 全齿高	z	齿数
h_a	齿顶高	P_z	导程
h_a^*	齿顶高系数	L	展开长度
h_c	固定弦齿高	α	压力角, 齿形角, 分度圆压力角
i	传动比, 顺序数	α_a	顶圆压力角
k	跨越齿数	α_n	法向压力角
m	模数	α_t	端面压力角
m_n	法向模数	α'	啮合角, 工作压力角
m_t	端面模数	α'_t	端面啮合角
n	转数	β	螺旋角, 分度圆螺旋角
p	齿距, 分度圆齿距, 周节	β_b	基圆螺旋角
p_b	基圆齿距	ε	重合度
p_n	法向齿距	θ	角度
p_t	端面齿距	ρ	曲率半径
p_x	轴向齿距	τ	齿距角, 周节角
r	半径, 分度圆半径	φ	角度, 展开角

目 录

本书所用主要符号表

第一章 概论	1
§ 1-1 绪言	1
§ 1-2 渐开线齿轮的基本方程	3
一、渐开线齿形方程	5
二、渐开线螺旋面的形成及方程	7
三、螺旋齿轮传动齿面接触迹线的方程	9
第二章 齿轮加工误差与齿轮精度标准	11
§ 2-1 概述	11
一、齿轮传动的使用性能要求	11
二、制订齿轮精度标准的基本原则	11
§ 2-2 滚齿加工误差的分析	13
一、齿轮误差的来源	13
二、分析齿轮误差用的坐标系统	14
三、影响齿轮传递运动准确性的加工误差分析	15
四、影响齿轮传动平稳性的加工误差分析	27
五、影响齿轮接触精度的加工误差分析	30
§ 2-3 渐开线圆柱齿轮精度标准	35
一、JB179—83 渐开线圆柱齿轮精度标准的基本结构	35
二、误差定义和代号	37
三、公差项目分组与齿轮检验	44
四、公差或极限偏差数值的确定	46
五、齿轮副的侧隙	48
第三章 周节误差测量与仪器	51
§ 3-1 概述	51
一、误差定义与相互关系	51
二、周节误差的测量方法	54
§ 3-2 绝对测量法	55
一、测量方法	55
二、绝对测量法精度分析	57
§ 3-3 绝对式周节误差测量仪器与测量系统	59
一、组合式测量系统	59
二、光栅式齿轮周节误差自动测量仪	61
三、计数式周节误差自动测量仪	74
四、非接触式周节误差测量系统	78
五、带微型计算机的周节误差测量系统	80
§ 3-4 相对测量法	82

一、单齿相对测量法	82
二、跨齿相对测量法	84
三、测量误差分析	87
§ 3-5 相对式周节误差测量仪器与测量系统	91
一、上置式周节误差测量仪	91
二、采用单板微型机的周节误差测量系统	96
第四章 渐开线齿形误差测量与仪器	99
§ 4-1 概述	99
一、齿形误差的定义	99
二、齿形误差的测量方法	99
三、齿形测量范围的确定	100
四、齿形误差的评定与分析	103
五、采样间隔的确定	105
§ 4-2 坐标测量法与仪器	107
一、法向极坐标测量法	107
二、带专用计算机的齿形误差测量仪	109
三、激光—光栅式高精度渐开线测量仪	115
四、直角坐标测量法	118
§ 4-3 标准轨迹测量法与仪器	119
一、机械展成式测量法与仪器	119
二、电子展成法	123
三、电子展成式测量仪	128
第五章 齿向误差测量与仪器	133
§ 5-1 齿向误差的测量	133
一、齿向误差测量的基本原理和方法	133
二、齿向误差的评定和齿向误差曲线分析	134
三、标准轨迹法	135
四、坐标测量法	142
§ 5-2 接触线误差的测量	147
一、接触线误差的评定	147
二、接触线误差的测量方法	148
第六章 齿轮整体误差测量与仪器	151
§ 6-1 概述	151
一、齿轮整体误差及其读数系统	151
二、渐开线圆柱齿轮的齿形线	151
三、四种整体误差曲线	153
四、整体误差测量技术的发展简况	159
§ 6-2 单面啮合间齿测量法与仪器	160
一、间齿测量法	160
二、单面啮合整体误差测量仪	163
§ 6-3 坐标测量法与仪器	168
一、逐齿坐标点测量法与仪器	169

二、间齿坐标测量法与仪器	178
§ 6-4 齿轮各项误差的读取方法	185
一、截面整体误差曲线上误差项目的读取	185
二、全齿宽整体误差曲线上误差项目的读取	187
三、双向截面整体误差曲线上误差项目的读取	188
四、双向全齿宽整体误差曲线上误差项目的读取	190
第七章 齿轮噪声测量	191
§ 7-1 基本概念及术语	191
一、声音与噪声	191
二、噪声的物理量度	192
三、噪声的评价(噪声的主观量度)	194
四、声场	194
§ 7-2 齿轮噪声产生机理简介	195
一、齿轮副圆周方向的振动	196
二、齿轮误差对噪声的影响	199
§ 7-3 噪声测量仪器	205
一、传声器	205
二、声级计	206
三、频率分析仪	208
四、记录仪器	213
五、齿轮噪声测试台	214
§ 7-4 噪声测量方法	215
一、齿轮装置的噪声测量方法	215
二、用声全息技术测定声源	220
第八章 齿轮误差测量中微型计算机技术的应用	223
§ 8-1 微型计算机系统	223
一、微型计算机系统组成与分类	223
二、微型计算机的程序设计语言	224
三、一个实用的单板微型计算机系统	225
四、微型计算机的新发展	231
§ 8-2 齿轮误差测量系统中配用微型计算机的方法概述	232
一、对测量装置的要求	232
二、硬件系统的选择与设计	233
三、软件研制	235
§ 8-3 微型计算机在周节误差测量中的应用	236
一、用绝对法自动测量周节误差的要求	237
二、微型计算机硬件系统的设计	237
三、程序设计	242
§ 8-4 微型计算机在传动链误差频谱分析中的应用	250
一、测量系统的组成	251
二、应用程序设计	253
三、实验结果	258
参考书目	259

第一章 概 论

§1-1 绪 言

齿轮传动是广泛应用于机器和仪表中的一种重要传动形式。它用来传递位移、速度和动力。随着现代工业生产和科学技术的迅速发展,对齿轮传动的性能所提出的要求愈来愈高。例如,在重载情况下传递的圆周速度达 120m/s , 在高精度的齿轮分度装置中分度精度达 $2''$ 。齿轮传动是由一套齿轮副、轴、轴承以及齿轮箱等机件所组成的齿轮机构来实现的。固然,轴、轴承、齿轮箱以及润滑油等都对齿轮传动的质量有影响,但在很大程度上起决定作用的因素是齿轮的性能。通常,对齿轮传动使用性能的要求可归纳为:传递运动的准确性,传动的平稳性,载荷分布的均匀性以及适当的传动侧隙。对于不同的使用条件,上述的各项要求也应有所侧重,如高速重载用齿轮,对传动平稳性及接触均匀性都要提出很高的要求;低速重载用齿轮主要应提高接触均匀性;作为精密的传动链或分度机构则应严格控制传动的准确性。因此,齿轮质量的高低与上述的四项要求是分不开的。而这四项要求都应与一定的齿轮精度相适应。

为了在加工中能达到设计对齿轮精度所提出的要求,必须有适当的检测方式。齿轮检测方式按其检测目的来分有三种:

① 验收检测。目的在于评定齿轮是否符合使用上的要求。验收检测所得到的测量结果应能表明使用要求的指标;

② 工艺检测。目的在于找出工艺过程中每一个工艺因素对齿轮精度的影响,以便改进工艺过程,提高齿轮的质量;

③ 预防性检测。齿轮的精度主要是由机床精度、刀具精度以及齿坯安装精度所决定的。因此可以在加工之前,预先检测机床精度及刀具精度,把它们的误差控制在允许的范围之内。在这个基础上,若再控制了齿坯的安装误差,就可以在加工中保证被加工的齿轮符合质量要求。为此,预先对机床精度、刀具精度进行检测称之为预防性检测。预防性检测常是在做过大量工艺检测,充分掌握误差产生规律的基础上,才能应用。应当说这种检测方式是一种积极的检测方式,可以预防废品。因此应当重视这种检测方式。

齿轮的检测方式按照被测参数的不同又可分为单项测量和综合测量两种。单项测量是指对齿轮的每一个被测参数单独进行测量,如测量齿形误差、齿向误差和周节误差等。综合测量是指被测齿轮在接近于使用状态的情况下,与“测量件”相啮合过程中进行的测量,故其测量结果是各个单项参数作用的综合。

一般来说,为了验收产品应当进行综合测量,而为了查明各项工艺因素对产品质量的影响还需要进行单项测量。目前新发展的整体误差测量法既可用于验收检测,又便于进行工艺分析。又如谐波分析法亦可以从综合测量的结果中找出影响综合精度的单项因素。

齿轮测量技术的发展概况可以简述如下:

由于汽车制造及机械制造的发展,需要大量的合于要求的齿轮,齿轮测量技术是自二十

世纪初期逐步发展起来的。齿轮测量技术的发展、齿轮误差理论的发展与当时的科学技术水平有密切的关系。早期, 齿轮误差的概念认为, 齿轮是机器零件的一种形式, 齿轮误差应与齿轮的几何参数相对应, 因而齿轮误差只包括齿距误差、齿形误差、齿向误差和齿厚偏差。由于齿轮安装偏心会对上述误差项目有较大的影响, 因此又补充了反映齿轮安装偏心的项目——齿圈径向跳动。与上述各项误差相适应, 在当时已具有较精密的机械加工的基础上, 发展了测量这些误差项目的测量方法和测量仪器, 如周节误差测量仪、齿形误差测量仪、导程误差测量仪、齿圈径向跳动检查仪和齿厚卡尺等。但是在当时所能达到的加工精度的限制下, 制造较高精度的齿轮误差测量仪器有一定的困难, 因此, 适应当时对齿轮精度的要求, 又发展了一些结构简单的齿轮量具如公法线千分尺等。用这类量具测量出的测量结果能间接的反映上述各项误差。这种齿轮误差理论及相适应的单项参数的测量技术和仪器在今日还具有其实用性。随着仪器制造精度的提高, 特别是近年来光电技术及计算机控制技术的发展, 这类仪器的精度及自动化程度大为提高, 如自动周节误差测量仪、演算式齿形误差齿向误差测量仪等, 仍是高精度齿轮测量及作工艺分析必不可少的手段。为了减少安装次数, 充分发挥仪器的作用, 不少生产厂家生产了“齿轮测试中心”, 在这种测量设备上, 可以在一次安装的情况下, 测量出各主要单项误差。美国 Fellows 公司生产的计算机控制专用四坐标测量机就是这种“齿轮测量中心”, 见图 1-1。在坐标机中有三个能作直线移动的滑板和一旋转式工作台, 直线移动量用氦氖激光干涉仪测量, 其最小读数值为 $0.075\mu\text{m}$, 回转的角度量由圆光栅测角装置测量, 最小角度读数值为 $0.62''$ 。可测渐开线、螺旋线、周节、不圆度、跳动量及进行单面啮合检查等。还可以分析测量结果, 对工艺过程提出修正的量值。

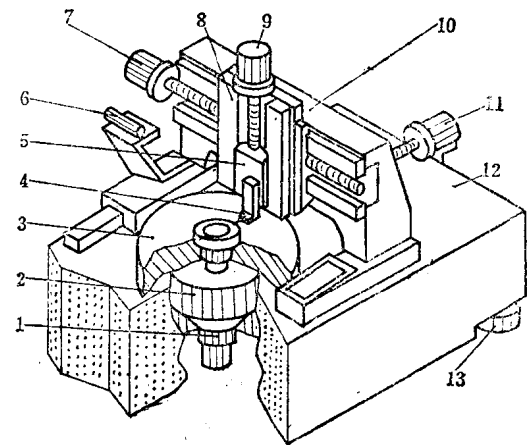


图 1-1

通过早期齿轮误差理论和齿轮测量技术的研究, 除了各项单项误差外, 还提出了综合误差的概念, 提出了单面啮合误差及双面啮合误差两个综合误差项目。由于双面啮合检查仪比较容易制造, 很快就获得实用。而单面啮合的测量原理虽然也在三十年代就已提出, 但由于制造困难, 当时并未能制成实用的仪器。

进而, 在齿轮误差理论的研究中认为, 齿轮是一种传动零件, 它传递运动的作用线就是一对齿轮传动时的啮合线, 在加工时的加工误差是通过啮合线反映到齿轮上, 在使用时, 齿轮的误差也将通过啮合线反映到齿轮传动链上。这就是齿轮副啮合线增量理论。由这种理论而推论出只有单面啮合检测才能完整地反映齿轮的误差状况, 而单项误差检测只能局部地反映齿轮的误差状况。新误差理论的提出又促进测量技术的发展, 普遍地重视研究行之有效的单面啮合测量仪。当把光电技术引入测量原理后, 不少国家试制出实用的单面啮合测量仪, 我国于六十年代后期在研究新型单面啮合测量技术的基础上, 提出了“单面啮合间齿测量法”, 设计了间齿多头蜗杆型的标准件, 用这种标准件进行测量时, 单面啮合的重合度小于 1, 从

而可以测出全齿形误差。采用这种测量方法作为仪器原理所制成的单面啮合测量仪可以测出“截面整体误差曲线”，当再配上测量齿向的装置则可测出“全齿宽整体误差曲线”，在这种误差曲线图中几乎包括了齿轮误差的全部信息，因此这种测量技术可以用于验收检测，适用于工艺分析及齿轮传动质量的分析。

早期创立的齿轮静态几何学的误差理论及后来所创立的运动学的误差理论（啮合线增量理论）虽然能够揭示齿轮误差与齿轮传动质量之间的关系，但是，齿轮在实际啮合传动时，由于各种条件的差异，其传动特性是极其复杂的，近年来，为了掌握更有实际意义的动态规律特性，国内外一些齿轮研究工作者欲从动力学的观点出发，研究齿轮误差与力的关系，进而研究齿轮误差与振动、噪声的关系，以期创立更具有普遍意义的齿轮动力学误差理论以及动态综合测量技术。

为使我国的齿轮质量赶上和接近国际水平，我国的齿轮研究工作者在深入地进行理论研究和广泛地实验测试的基础上制定了渐开线圆柱齿轮新标准（JB179-83），其标准水平与国际 ISO 标准相当。为了贯彻新标准，从新标准的要求出发，相应的修订了齿轮机床、齿轮刀具和齿轮量仪的标准。这对我国机械工业打基础，提高齿轮质量，并使机械产品进入国际市场都是非常必要的。

齿轮测量技术发展概况说明，新技术的应用是推动齿轮测量技术向前发展的有力因素。特别是光电技术、数字技术和计算机（包括微型计算机）技术的应用，已在齿轮测量中形成了一套与传统测量技术不同的新型测量技术。例如，由数控技术及计算机误差修正技术相结合所形成的电子展成机构可代替传统的机械展成机构，成为提高仪器精度的重要途径；由数字式的激光、光栅传感器与计算机结合所组成的齿轮误差专用坐标测量机能够实现自动采集（测量）误差数据、自动处理误差数据以及测量过程全部自动化，从而使传统的坐标测量法成为便于应用的实用技术。我国独特的单面啮合整体误差测量技术也是在应用这些新技术的基础上逐步形成的。即使是传统的齿轮测量仪器，如果配上电学式测微仪，也可以通过模一数转换把测量数据转换为数字量送入计算机内进行数据处理。在表 1-1 中列出了一些带有计算机的齿轮量仪典型产品。可以这样说，由于光电技术、数字技术以及计算机技术的应用，已经形成了一套齿轮误差的近代测量技术及光、机、电结合的新型齿轮测量仪器。

随着通用三坐标机的发展，齿轮的各项误差参数可以直接在通用三坐标机上进行测量。

本书所研究的正是齿轮误差的近代测量技术及新型齿轮测量仪器。因此，本书不打算叙述所有的齿轮测量技术及齿轮量仪。为了便于理解，对于传统的测量技术与仪器亦做简略的介绍。

本书在内容安排上是考虑到读者已具有“几何量测量”、“几何量电测量仪”及“计算机原理”等方面的知识。

§ 1-2 渐开线齿轮的基本方程

渐开线作为齿轮齿廓的形状是由 L. Euler 最先提出的。由于它具有一系列优点，如采用这种齿形能保证恒定的瞬时传动比，即使在中心距发生变化时仍能保证传动比不变；又如，制造这种齿轮所用的切齿刀具的形状简单，易于制造，可以用相同的模数及压力角的一把刀具切削不同齿数的齿轮，并且可以用标准刀具切削变位齿轮。因此，这种齿形应用最为广泛。

表 1-1

序号	产品名称	规格	精度	计算机型号	自动化程度	制造厂家	说明
1	Micrologs 50 型 万能测齿仪	最大可测直径 1270 mm	直线: $\pm 0.03\mu\text{m}$ 角度: $\pm 0.02''$	PDP 8	CNC	美国 Fellows 公司	可测项目: 齿形、绝对等分、 导程、径向跳动、圆度等
2	GC 12 HP 型 齿轮测量仪	最大可测直径4200mm 模数1~25mm	10次重复精度 1 μm (齿形)	HITAG —10 II A	CNC	日本 大阪精机	可测项目: 齿形、齿向、周 节
3	891 E 型 齿轮测量仪	最大可测螺旋角 $\pm 65^\circ$ 最大可测齿顶直径550mm 模数0.2~20mm	直线: 0.2 μm (分辨率) 角度: 0.5'' (分辨率)	—	CNC	联邦德国 Carl Mahr 公司	可测项目: 齿形、齿向、 周节等
4	TA 450 D 型自动 周节仪	可测直径 12~450mm 模数 1~12mm	可测二级精度齿轮	专用处理机	(固定程序) 自动操作	民主德国 Ziess 厂	座 式
5	ES—400 型 自动周节仪	可测直径 不限 模数 1~40 mm	100次重复精度1 μm	专用处理机	(固定程序) 自动操作	瑞士 Maag 公司	上 置 式
6	ES—430/55 型 齿形测量仪	可测最大直径不限 X、Y坐标行程分别 为 $\pm 150\text{mm}$ 及150mm	小于 $\pm 1\mu\text{m}$	单板计算机	(固定程序) 自动操作	瑞士 Maag 公 司	上 置 式
7	CDQ320 型 单面啮合整体 误差测量仪	最大可测直径320mm 模数至6mm 可测螺旋角 $\pm 45^\circ$	齿形 5 级周节 3 级齿向 5 级	专用处理机	(固定程序) 自动操作	中 国 成都工具 研究所	可测项目: 齿形、齿向、周节、 基节、径跳、公法线变动等单项 误差及径向、切向综合误差
8	3001 型 万能齿轮测量机	最大可测直径450mm 模数 0.5~15mm	齿形 4 级周节 3 级	专用处理机	(固定程序) 自动操作	中 国 哈尔滨量具 刃具厂	可测项目: 齿形、直齿齿向、周 节、基节、径跳、公法线变动等 单项误差及截面切向综合误差、 截面切向相等齿综合误差
9	CD320 W 型 万能式单面 啮合检查仪	最大可测直径320mm 模数 0.5~6mm 可测螺旋角 $\pm 45^\circ$	齿形 5 级周节 3 级齿向 5 级	专用处理机	(固定程序) 自动操作	中 国 北京工具 研究所	可测项目: 齿形、周节、基节、 径跳、公法线变动等单项误差及 径向、切向综合误差

一、渐开线齿形方程

(一) 渐开线形成及其特性

若一条曲线 G_1 的法线是另一条曲线 G_2 的切线, 则 G_1 为 G_2 的渐开线。如果不特别说明, 常说到的渐开线都是指圆的渐开线。圆的渐开线形成可以看成: 当一直线沿着一个圆周做无滑动的滚动时, 直线上的任一点的轨迹称为该圆的渐开线, 该直线称为渐开线的发生线, 见图1-2。由形成的过程可以看出渐开线具有以下几个特点:

1) 渐开线上任一点K的法线 $\overline{KB}$ 都是与基圆相切, 或者说圆的渐开线上各点的法线的包络线是一个圆, 这个圆就是渐开线的基圆;

2) $\overline{KB}$ 的长度是渐开线在K点的曲率半径 ρ_K , ρ_K 等于发生线在基圆上滚过的一段弧长 $\widehat{AB}$, 即,

$$\rho_K = \overline{KB} = \widehat{AB} = r_b (\theta_K + \alpha_K) = r_b \varphi_K \quad (1-1)$$

显然, 渐开线愈靠近基圆, 曲率半径愈小, 曲线弯曲程度愈大;

3) 基圆上任一点可以向两方向各展成一条渐开线, 基圆内无渐开线;

4) 基圆上所引的两同向渐开线为“等距曲线”, 两渐开线间的法向距离处处相等。或者说, 渐开线的等距曲线仍是渐开线;

5) 基圆相同则渐开线完全相同, 基圆愈大渐开线在相应点的曲率愈小, 即渐开线愈平直, 当基圆半径趋于无穷大时, 渐开线即趋近于直线。

(二) 渐开线齿形方程

由于选用的坐标不同, 渐开线齿形方程可写出以下几种形式。

1. 极坐标参数方程 由图1-2可见, 当发生线转过 φ_K 角, K点与中心O点的距离OK称为K点的极半径 R_K , 所对应的极角为 θ_K , 则

$$\left. \begin{aligned} \theta_K &= \text{inv} \alpha_K = \text{tg} \alpha_K - \alpha_K \\ R_K &= \frac{r_b}{\cos \alpha_K} \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

为渐开线极坐标参数方程, 以 α_K 角为参变量。式中 $\text{inv} \alpha_K$ 为渐开线函数。 α_K 为K点的压力角。

2. 直角坐标参数方程 如图1-3, 渐开线上任一点K的 x_K 、 y_K 坐标为:

$$\left. \begin{aligned} x_K &= r_b (\cos \varphi_K + \varphi_K \sin \varphi_K) \\ y_K &= r_b (\sin \varphi_K - \varphi_K \cos \varphi_K) \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

式(1-3)为渐开线的直角坐标方程。 φ_K 为发生线相对于基圆滚过的角度, 称为展开角。 $\varphi_K = \theta_K + \alpha_K$, 因此直角坐标方程式是以 φ_K 或 α_K 为参变量。

在直线BK上另一点K'所展开的渐开线, 其方程为:

$$\left. \begin{aligned} x_K &= r_b \cos \varphi_K + r_b (\varphi_K - \varphi') \sin \varphi_K \\ y_K &= r_b \sin \varphi_K - r_b (\varphi_K - \varphi') \cos \varphi_K \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

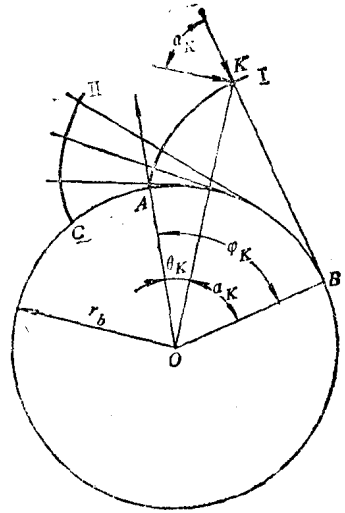


图 1-2

3. 矢量参数方程 如图1-3中直线OK为渐开线的矢径 $\vec{r}_K$, 渐开线的矢量参数方程为:

$$\vec{r}_K = r_b (\cos \varphi_K + \varphi_K \sin \varphi_K) \vec{i} + r_b (\sin \varphi_K - \varphi_K \cos \varphi_K) \vec{j} \quad (1-5)$$

4. 法线极坐标方程 渐开线上各点曲率半径的计算式如下:

$$\rho = \frac{1}{K} = r_b \varphi$$

K为渐开线上各点的曲率, 习惯上又称 ρ 为渐开线上各点的展开长度。展开长度常用L表示, 则

$$L = r_b \varphi \quad (1-6)$$

上式即为渐开线的法线极坐标方程, 这是由于L是在渐开线的法线上度量而得名。显然L与 r_b 或 φ 都是一次关系。由于法线极坐标方程最为简单, 因此它是在渐开线齿形测量中最基本的数学模型。

5. 广义渐开线方程 在研究渐开线测量中还要用到两种渐开线的变形, 即延长渐开线及缩短渐开线。当直线沿基圆作无滑动滚动时, 直线外一点K。(位于基圆之内) 所形成的轨迹称为延长渐开线, 见图1-4a。延长渐开线的极坐标方程为:

$$\left. \begin{aligned} r_K &= \frac{r_b - b}{\cos \alpha_K} \\ \theta_K &= \varphi_K - \alpha_K \\ \alpha_K &= \text{tg}^{-1} \frac{r_b \varphi_K}{r_b - b} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

当直线沿基圆作无滑动滚动时, 直线外一点K。(位于基圆之外) 所形成的轨迹称为缩短渐开线, 见图1-4b。缩短渐开线极坐标方程为:

$$\left. \begin{aligned} r_{K'} &= \frac{r_b + b}{\cos \alpha_{K'}} \\ \theta_{K'} &= \varphi_{K'} - \alpha_{K'} \\ \alpha_{K'} &= \text{tg}^{-1} \frac{r_b \varphi_{K'}}{r_b + b} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

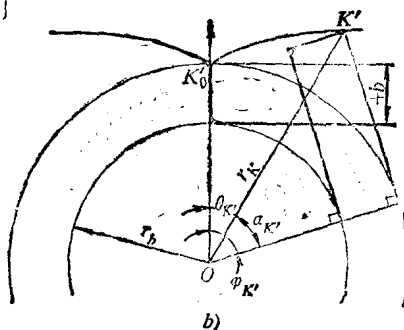
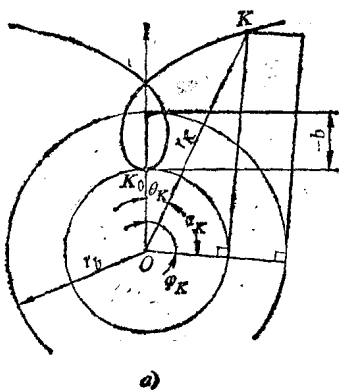


图 1-4

式中 b 为直线外一点至直线的距离。如果距离 b 为负值表示点在基圆之内, b 为正值表示点在基圆之外, 则式 (1-8) 即为广义渐开线方程。当 b 为零, 即 K_0 点在直线上, 这时广义渐开线方程转变为一般渐开线极坐标参量方程。

二、渐开线螺旋面的形成及方程

渐开线斜齿圆柱齿轮 (斜齿轮) 的齿面由渐开线螺旋面组成。如果把一个无厚度的三角形绕在一个圆柱面上, 直角三角形的斜边在圆柱面上形成圆柱螺旋线, 如图 1-5 所示的曲线 G , 其直角坐标的参数方程为:

$$\left. \begin{aligned} x &= r_b \cos \varphi \\ y &= r_b \sin \varphi \\ z &= r_b \operatorname{ctg} \beta_b \cdot \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

式中 r_b ——圆柱面的半径;

β_b ——螺旋线的螺旋角。

如果把绕在圆柱面上的直角三角形逐渐展开, 三角形的斜边在空间所形成的轨迹就是渐开线螺旋面, 仍见图 1-5。可以定义, 一平面 QSR 切于圆柱面, 其上有一条与圆柱面母线成 β_b 角的斜线 $\overline{QS}$, 当平面沿圆柱面作纯滚动时, $\overline{QS}$ 所形成的轨迹面称为渐开线螺旋面。如果 Q 是直线 $\overline{QS}$ 切于圆柱面的切点, Q 点在圆柱面上形成的曲线是圆柱螺旋线。平面 QSR 称为展开面, $\triangle QSR$ 称为渐展三角形, 圆柱面称为基圆柱面。直线 $\overline{QS}$ 称为渐开线螺旋面的直母线。由渐开螺旋面的形成原理可以写出曲面的矢量方程。见图 1-5, 设动点 P 的矢径为 $\vec{R}$

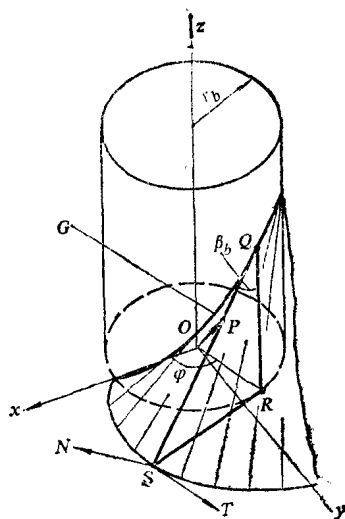


图 1-5

$$\vec{R} = \vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} \quad (1-10)$$

式中 $\vec{OQ}$ ——切点 Q 的矢径;

$\vec{QP}$ ——切点 Q 至动点 P 的有向线段。

$$\vec{OQ} = r_b \cos \varphi \vec{i} + r_b \sin \varphi \vec{j} + r_b \operatorname{ctg} \beta_b \varphi \vec{k} \quad (1-11)$$

$$\vec{QP} = t \vec{m} \quad (1-12)$$

式中 t —— $\vec{QP}$ 的模;

$\vec{m}$ —— $\vec{QP}$ 矢量的元矢, 即直母线的元矢。

为了求出直母线元矢 $\vec{m}$ 与各坐标的元矢 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ 之间的关系, 可从图 1-5 的俯视图 (图 1-6) 所示出的关系来求出。由图 1-6 可知

$$-\vec{m} = \cos\beta_b \vec{K} + \sin\beta_b \vec{e}(\varphi)$$

式中 $\vec{e}(\varphi)$ ——圆O在R点的切线的元矢；

$$\vec{e}(\varphi) = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}$$

因此可以得出

$$-\vec{m} = \cos\beta_b \vec{K} + \sin\beta_b \cos\varphi$$

$$\vec{j} - \sin\beta_b \sin\varphi \vec{i} \quad (1-13)$$

式(1-13)代入(1-12)得

$$\vec{QP} = t \sin\beta_b \sin\varphi \vec{i} - t \sin\beta_b \cos\varphi \vec{j} - t \cos\beta_b \vec{K} \quad (1-14)$$

将式(1-11)、(1-14)代入式(1-10)得出渐开线螺旋面的矢量方程：

$$\begin{aligned} \vec{R} = & (r_b \cos\varphi + t \sin\beta_b \sin\varphi) \vec{i} + (r_b \sin\varphi \\ & - t \sin\beta_b \cos\varphi) \vec{j} + (r_b \operatorname{ctg}\beta_b \varphi - t \cos\beta_b) \vec{K} \end{aligned} \quad (1-15)$$

可以相应地写出渐开线螺旋面的直角坐标参数方程：

$$\left. \begin{aligned} x &= r_b \cos\varphi + t \sin\beta_b \sin\varphi \\ y &= r_b \sin\varphi - t \sin\beta_b \cos\varphi \\ z &= r_b \operatorname{ctg}\beta_b \varphi - t \cos\beta_b \end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

方程的参数为 t 及 φ 。

由渐开线螺旋面的参数方程可以分析出它的几个特点：

1) 渐开线螺旋面是由直线组成的直纹曲面，用切于基圆柱面的平面相截，交线为直线。由式(1-16)中设 φ 为定值即可得出以 t 为参数的空间直线方程，并可以看出直线与 z 轴的交角为定值 β_b 。

2) 用 xOy 坐标面或用平行于 xOy 面的平面与渐开螺旋面相截，交线为渐开线，见图1-7a。设平行于 xOy 坐标面的平面方程为：

$$z = B \quad (1-17)$$

由渐展三角形 $\triangle QRS$ (图1-7b) 的QP线段的长度，即 $\vec{QP}$ 的模应为：

$$t = \frac{r_b(\varphi - \varphi')}{\sin\beta_b} \quad (1-18)$$

式中 φ' —— SP' 展开长度所对应的中心角，(见图1-7a)。

式(1-18)代入式(1-16)得出

$$\left. \begin{aligned} x &= r_b \cos\varphi + r_b(\varphi - \varphi') \sin\varphi \\ y &= r_b \sin\varphi - r_b(\varphi - \varphi') \cos\varphi \\ z &= B \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

式(1-19)表明这是一条在 $z = B$ 平面上的渐开线的方程。

3) 如果用一个与基圆柱面同轴且半径大于 r_b 的圆柱面 Cr 与渐开螺旋面相截，交线是

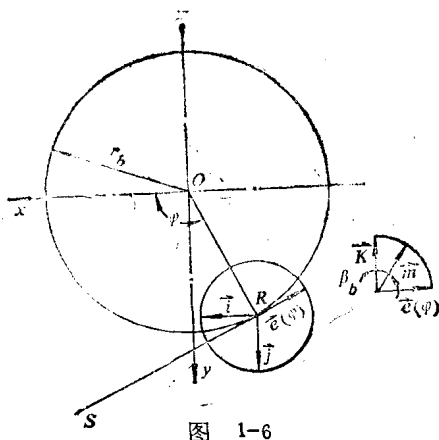


图 1-6

该圆柱面上的螺旋线，且各圆柱面上螺旋线的导程相等。

三、螺旋齿轮传动齿面接触迹线的方程

虽然螺旋齿轮传动的两啮合齿面是点接触，作为一种传动形式，它不如直齿轮传动及斜齿轮传动应用得广泛，但是螺旋齿轮的啮合原理却是许多齿轮加工方法及测量方法所依据的基本原理。例如，以间齿蜗杆作为标准元件的整体误差测量法就是这种啮合原理的具体应用。

两螺旋齿轮的齿面 F_1 与 F_2 啮合时齿面上接触点的轨迹称为齿面上的接触迹线。在间齿法整体误差的测量中，把间齿蜗杆与被测齿轮视为一对螺旋齿轮传动，被测齿轮齿面上的接触迹线又称为该齿面上的法向齿形线，这种测量方法可直接测出法向齿形线的误差。

螺旋齿轮的齿面是渐开线螺旋面，为了写出啮合齿面的接触迹线的方程，需设定两个坐标系：与被研究的齿面 F_1 相固连的坐标系 $s(x, y, z)$ 及空间固定坐标系 $S(X, Y, Z)$ ，两坐标系的 z, Z 轴重合。

当齿面 F_1 啮合转动了 ψ 角， s 坐标系相对于 S 坐标系也转过 ψ 角，如图 1-8 所示。 F_1 齿面将在 S 坐标系中形成一个渐开线螺旋面的齿面族。在螺旋齿轮传递转动时，若能保证恒定的传动比，齿面上接触点的法线必然通过啮合节点 P ，其在水平面上的投影如图 1-9 所示。由图中可看出，齿面啮合转动角 ψ 与渐开线螺旋面的展开角 φ 之间的关系为：

$$\varphi = \alpha - \psi$$

接触迹线的方程为：

$$(1-20)$$

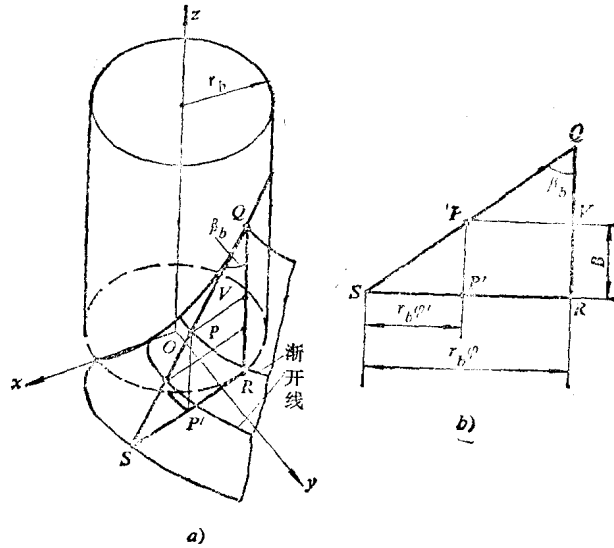


图 1-7

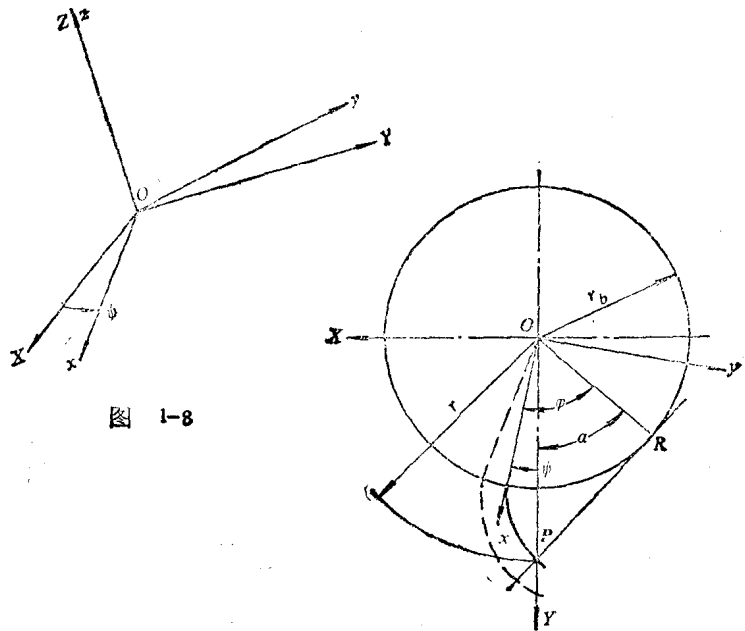


图 1-8

图 1-9